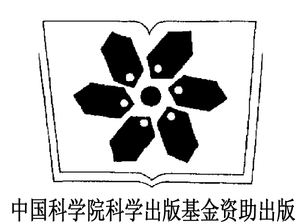
现代物理基础丛书 20

经典黑洞和量子黑洞

王永久 著

科学出版社
www.sciencep.com



中国科学院科学出版基金资助出版

现代物理基础丛书　20

经典黑洞和量子黑洞

王永久　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书系统地阐述了黑洞物理领域近年来的新进展，包括作者、合作者和国内外同行学者们的近期研究成果．书中内容系统而深刻，物理思想灵活，数学技巧丰富．诸多内容适合于硕士生、博士生用于专业课学习和科研选题．

全书包括施瓦西黑洞，克尔黑洞，经典黑洞热力学，黑洞热力学的量子理论，黑洞的量子辐射，黑洞的准正规模和晚期拖尾，黑洞的正则量子化，黑洞的面积谱、质量谱、电荷谱、角动量谱和黑洞的引力效应等七章七十七节．

本书可供物理、天文和应用数学专业的硕士生、博士生和研究人员阅读，也可供本科高年级学生和自学者参考．

图书在版编目(CIP)数据

经典黑洞和量子黑洞/王永久著．—北京：科学出版社，2008
(现代物理基础丛书；20)
ISBN 978-7-03-022539-9
Ⅰ. 经…　Ⅱ. 王…　Ⅲ. 黑洞-量子论-研究　Ⅳ. P145.8 O413
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 106346 号

责任编辑：鄢德平　刘凤娟　胡　凯／责任校对：陈玉凤
责任印制：赵德静／封面设计：王　浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2008 年 8 月第　一　版　开本：B5(720×1000)
2008 年 8 月第一次印刷　印张：23
印数：1—2 500　字数：440 000

定价：68.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换〈文林〉)

前　　言

本书内容包括黑洞的经典理论和量子理论两部分. 经典理论部分包括球对称引力场的奇异性, 球对称恒星的引力塌缩, Kerr 黑洞、Kerr-Newman 黑洞和经典黑洞热力学等内容. 量子理论部分包括黑洞热力学的量子理论、黑洞的量子辐射、黑洞的微扰理论和黑洞的量子化等内容. 在内容安排上, 侧重于黑洞的量子理论.

近年来, 许多学者对黑洞熵的量子理论颇感兴趣. 严格地说, 计算黑洞量子熵须用到量子引力理论, 而至今还没有建立一个令人满意的量子引力理论. 用量子引力理论研究黑洞的熵依赖于量子引力理论的细节. 但是, 如果认为黑洞熵和视界面积成正比这一结论是普适的, 则黑洞熵就应该与量子引力理论的细节没有关系. 因此, 人们可以避开量子引力理论的细节, 来研究黑洞的热力学熵和统计力学熵. 书中详细讨论了黑洞热力学的量子修正, 黑洞量子熵的计算方法, 即壳(on shell)和离壳(off shell)方案(其中包括砖墙模型、顶角奇异性方法、钝锥方法和体积截断方法), 协变欧氏方案和共形场论方法.

黑洞热力学的四条定律与普通热力学定律的一致, 使人们自然认为黑洞处于热平衡状态(至少静态和稳态黑洞如此). 如果给黑洞一个微扰, 微扰衰减后黑洞应该回到平衡状态. 黑洞微扰理论表明, 微扰场在黑洞时空中的演化过程分为初始扰动、准正规模(指数衰减)和晚期拖尾(幂律衰减)三个阶段. 黑洞状态对于微扰是稳定的. 研究表明, 黑洞准正规模的频谱只决定于黑洞本身的性质, 与扰动的初始形式无关. 这一结果在黑洞的天文观测中具有重要而深远的意义, 因此也使人们对黑洞准正规模的研究产生了极大的兴趣. 犹如不同的乐器发出不同种类的声音一样, 不同的黑洞具有不同的准正规模频谱. 书中详细讨论了几种黑洞时空的准正规模频谱和它们的晚期幂律拖尾.

黑洞是宇宙中最简单和最漂亮的物体, 只由三个参量(质量, 电荷和角动量)便可唯一确定. 所有其他性质, 如磁场、磁矩、物质结构(轻子数、重子数)等性质在形成黑洞时已全部化为乌有.

黑洞如此简单, 很像氢原子, 它只有质量、电荷和角动量三个经典自由度. 氢原子也只有三个经典自由度, 即电子的三个空间坐标 x, y, z. 因此人们想到, 不用量子引力理论, 用量子力学描述黑洞的量子化, 揭示黑洞的量子性质. 书中讨论了黑洞时空的哈密顿正则量子化方案, 给出类似薛定谔方程的黑洞时空动力学方程, 导出量子化的黑洞质量谱、面积谱、电荷谱和角动量谱. 书中还讨论了暗物

质和暗能量，以及被暗能量包围的黑洞的量子性质.

本书假定读者已具备广义相对论、量子场论、张量分析和微分几何等基础知识.

作者与同事、合作者荆继良教授、余洪伟教授和唐智明教授获得过两次国际引力研究荣誉奖(美国)和一次教育部科技进步奖;在几种相关杂志上发表过一些文章(Phys. Rev. D 32 篇，Ap. J. Lett. 3 篇，ASS 2 篇，Nucl. Phys. B 15 篇，JHEP 3 篇,Phys. Lett. A&B 22 篇,《中国科学》4 篇),加上诸多国内外同行学者的原始论文，其中部分相关内容经补充推导和加工整理已写入书中.

作者深深感谢刘辽教授、郭汉英研究员、张元仲研究员、D. Kramer 教授、C. Will 教授、V. Cruz 教授、易照华教授和王绶琯院士、曲钦岳院士、杨国桢院士、周又元院士、陆埮院士，他们曾对作者的部分论文的初稿提出过有益的意见，对作者的科研工作给予热情的关心和支持.

作者和须重明教授、彭秋和教授、梁灿彬教授、赵峥教授、王永成教授、李新洲教授、桂元星教授、钟在哲教授、黄超光研究员、沈有根研究员、罗俊教授、李芳昱教授进行过多次讨论和交流，受益颇多，在此一并致谢.

作者还要感谢樊军辉教授、吕君丽教授、郭鸿钧教授、黎忠恒教授、鄢德平编审以及黄亦斌、罗新炼、陈菊华、黄秀菊、陈松柏、潘启元诸位博士，他们对作者的科研工作和本书的出版给予了热情的帮助和支持.

本书得到了中国科学院出版基金委员会给予的出版基金资助，作者谨致谢意.

王永久

2008 年 5 月于长沙岳麓山

目　　录

第 1 章　施瓦西黑洞

黎曼空间度规张量既决定于空间的几何性质又依赖于坐标系的选择. 因此, 度规的奇异性分为两种, 一种是内禀奇异性, 另一种是坐标奇异性. 坐标奇点可以通过坐标变换消除, 而内禀奇点是空间的内禀属性, 不能由坐标变换消除.

1.1　施 瓦 西 面

在施瓦西外部场中,

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\Omega^2, \tag{1.1.1}$$

$r = r_s = 2m$ 处有 $g_{11} = \infty$, $g_{00} = 0$, 称为**施瓦西奇点**. 由于在 $r = r_s$ 处度规张量的行列式和标曲率都是正常的, $g = -r_s^4\sin^2\theta$, $R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = 12r_s^{-4}$, 可见 $r = r_s$ 处的奇异性并不是度规的内禀特性. 下面将看到, 通过适当的坐标变换可以消除奇点 $r = r_s$, 因此这是坐标奇点. 施瓦西度规还有一个奇点, 即 $r = 0$. 由于相应的标曲率 $R = 12r_s^2/r^6 \to \infty$, 所以这一奇点是无法用坐标变换消除的, 这是内禀奇点(或称真奇点).

施瓦西奇点 $r = r_s$ 构成一个面, 称为**施瓦西面**. 现在我们讨论这个面的性质. 容易发现, 满足条件 $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\varphi = 0$ 的线是短程线, 沿着这些线有

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2. \tag{1.1.2}$$

这些线在 $r > r_s$ 的区域是类空的, 在 $r < r_s$ 区域是类时的. 但一条短程线的切矢量在沿短程线移动时不能由类时的变为类空的(只能沿线平移), 因此, 这两个区域在面上无光滑连接. 我们也可以考虑沿径向传播的光线来说明这一点. 此时有 $\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\varphi = 0, \mathrm{d}s = 0$,

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm\left(1 - \frac{r_s}{r}\right). \tag{1.1.3}$$

类时方向包含在光锥之内, 我们考察当 r 减小时光锥顶角的变化. 在区域 $r > r_s$ 中, 光锥顶角随 r 的减小而减小; 当 $r \to r_s$ 时光锥顶角趋于零; 进入区域 $r < r_s$ 之后, 坐标 t 的参数线变为类空的, 光锥转 90°; r 从 r_s 到 0, 光锥顶角减小. 上述情况如图 1 所示. 比较施瓦西面两侧的两个不同的光锥图, 可见 $r > r_s$ 和 $r < r_s$ 两个区域无光滑连接.

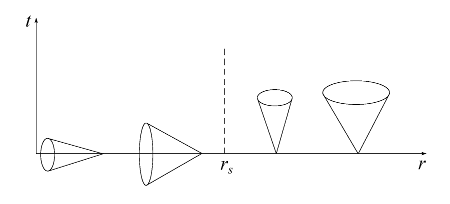


图 1

考虑一粒子沿径向自由落下，此时有 $u^2=u^3=0, u^\mu=\frac{dx^\mu}{ds}$. 由短程线方程可得

$$\frac{du^0}{ds}+\Gamma^0_{\mu\nu}u^\mu u^\nu=0,$$

$$\frac{du^0}{ds}=-\Gamma^0_{\mu\nu}u^\mu u^\nu=-g^{00}g_{00,1}u^0u^1=-g^{00}\frac{dg_{00}}{ds}u^0. \tag{1.1.4}$$

积分，得到

$$g_{00}u^0=k=\text{const.}. \tag{1.1.5}$$

式中常数 k 是 $u^1=0$(开始自由下落)处 g_{00} 的值. 又由线元的表达式(1.1.1)可得

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu=g_{00}u^{02}+g_{11}u^{12}=1. \tag{1.1.6}$$

用 g_{00} 乘以(1.1.6)式并注意 $g_{00}g_{11}=-1$，得到

$$k^2-u^{12}=1-\frac{r_s}{r},$$

由此得到

$$u^1=-\left(k^2-1+\frac{r_s}{r}\right)^{1/2}\ (\text{注意 } u^1<0). \tag{1.1.7}$$

由(1.1.5)和(1.1.7)式可知

$$\frac{dt}{dr}=\frac{u^0}{u^1}=-k\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}\left(k^2-1+\frac{r_s}{r}\right)^{-1/2}. \tag{1.1.8}$$

积分(1.1.8)式，得到

$$t=-\int_{r_0}^{r_s}\frac{k\,dr}{(1-r_s/r)\sqrt{k^2-1+r_s/r}}\to\infty. \tag{1.1.9}$$

(1.1.9)式表明，自由粒子自 $r=r_0>r_s$ 处落至施瓦西面，在远处观察者看来，需要经过无限长时间. 自 r_0 至 r_s 的径向距离是有限的，由 $dl^2=\gamma_{ij}dx^idx^j$ 得

$$l=\int_{r_0}^{r_s}\frac{dr}{\sqrt{1-r_s/r}}, \tag{1.1.10}$$

此式具有有限值.

在与下落粒子固连的坐标系中，测得的对应时间间隔为

$$\int_0^s \mathrm{d}s = \int_{r_0}^{r_s} \frac{\mathrm{d}r}{u^1} = -\int_{r_0}^{r_s} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{k^2 - 1 + r_s/r}}, \tag{1.1.11}$$

此式具有有限值. 这就是说，对于自由下落的观察者来说，质点经过有限长时间便可到达施瓦西面. 此后它可以越过施瓦西面一直到达 $r=0$（如果源质量集中在中心奇点）. 如果把恒星物质看作零压流体（“尘埃”），恒星一经坍缩，由上面的讨论可知，在随动坐标系观测，恒星表面将在有限时间内缩至奇点 $r=0$. 而在远处观察者看来，恒星表面缩至 $r=r_s$ 需要无限长时间. 在 2.2 节中我们还要讨论这一问题.

设一束光波由施瓦西面附近发出，频率为 ν_A，远处观察者接收到的频率为 ν_B. 由光谱线的频移公式有

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = \frac{\sqrt{g_{00}^A}}{\sqrt{g_{00}^B}},$$

对无限远处的观察者 B，$g_{00}^B \to 1$. 所以当 $g_{00}^A = 0$ 时出现无限红移. 即当光源位于施瓦西面上时，远处观察者测得无限红移. 故称面 $r=r_s$（$g_{00}=0$ 的面）为**无限红移面**. 由此可知，当试验粒子落到无限红移面上时，粒子上发生的一切物理过程，在远处观察者看来都变得无限缓慢.

1.2　自由下落坐标系

在沿径向自由下落的坐标系中测得粒子自 $r=r_0$ 到达 $r=r_s$ 需要有限长时间，可见在这一坐标系中奇点 $r=r_s$ 已不存在. 因此，为了把施瓦西度规延拓到 $r<r_s$ 的区域，我们寻找一个坐标变换，由施瓦西坐标系 (t,r) 变至自由下落坐标系 (τ,ρ). 为此，令

$$\tau = t + f(r),\ \rho = t + \varphi(r). \tag{1.2.1}$$

式中 f 和 φ 是待定函数. 我们希望能够通过 f 和 φ 的选择，以新的线元表达式 $\mathrm{d}\tau^2 - \frac{r_s}{r}\mathrm{d}\rho^2$ 代替（1.1.1）式的右端，这样便消除了奇点 $r=r_s$. 由（1.2.1）式有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\tau^2 - \frac{r_s}{r}\mathrm{d}\rho^2 &= (\mathrm{d}t + f'\mathrm{d}r)^2 - \frac{r_s}{r}(\mathrm{d}t + \varphi'\mathrm{d}r)^2 \\
&= \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - 2\left(f' - \frac{r_s}{r}\varphi'\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}r + \left(f'^2 - \frac{r_s}{r}\varphi'^2\right)\mathrm{d}r^2.
\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

式中 $f' \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}$. 可见只要选择 f 和 φ，使之满足

$$f' = \frac{r_s}{r}\varphi', \tag{1.2.3}$$

$$\frac{r_s}{r}\varphi'^2 - f'^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}. \tag{1.2.4}$$

从这些方程中消去f, 得到

$$\varphi' = \left(\frac{r_s}{r}\right)^{-1/2}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}, \tag{1.2.5}$$

积分得

$$\varphi = \frac{2}{3A}r^{3/2} + 2Ar^{1/2} - A^2\ln\frac{r^{1/2} + A}{r^{1/2} - A}. \tag{1.2.6}$$

式中$A = r_s^{1/2}$. 又由(1.2.3)和(1.2.5)式得

$$\varphi' - f' = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\varphi' = \left(\frac{r}{r_s}\right)^{1/2},$$

积分上式, 注意到(1.2.1)式, 得到

$$\varphi - f = \rho - \tau = \frac{2}{3}r_s^{-1/2}r^{3/2}, \tag{1.2.7}$$

或者

$$r = r_s^{1/3}\left[\frac{3}{2}(\rho - \tau)\right]^{2/3}. \tag{1.2.8}$$

由(1.2.6)和(1.2.7)式便完全确定了变换(1.2.1)式:

$$\begin{aligned} r &= r_s^{1/3}\left[\frac{3}{2}(\rho - \tau)\right]^{2/3} \\ t &= \tau - 2\sqrt{r_s r} - r_s\ln\frac{|\sqrt{r} - \sqrt{r_s}|}{\sqrt{r} + \sqrt{r_s}} \\ &= \tau - 2r_s^{2/3}\left[\frac{3}{2}(\rho - \tau)\right]^{1/3} - r_s\ln\frac{\left|\left[\frac{3}{2}(\rho - \tau)\right]^{1/3} - r_s^{1/3}\right|}{\left|\left[\frac{3}{2}(\rho - \tau)\right]^{1/3} + r_s^{1/3}\right|}. \end{aligned} \tag{1.2.9}$$

这就是说, 可以找到满足(1.2.3)~(1.2.4)式的函数f和φ. 于是施瓦西度规变为

$$ds^2 = d\tau^2 - \left[\frac{3}{2}\left(\frac{\rho - \tau}{r_s}\right)\right]^{-2/3}d\rho^2 - r_s^{2/3}\left[\frac{3}{2}(\rho - \tau)\right]^{4/3}d\Omega^2. \tag{1.2.10}$$

此即 Lemaitre 度规.

由(1.2.7)式可知, 当$r = r_s$时, $\rho - \tau = 2r_s/3$, 此时度规(1.2.10)式不再有奇异性.

由于度规(1.2.10)式和施瓦西度规由坐标变换相联系, 所以度规(1.2.10)

式在 $r>r_s$ 区域满足爱因斯坦方程;解析延拓至 $r<r_s$ 的区域之后，由 $r=r_s$ 处无奇点可以推断，在 $r\leqslant r_s$ 区域(1.2.10)式仍满足爱因斯坦方程. 仅在 $r=0$(即 $\rho-\tau=0$)处有一奇点.

由(1.2.7)式得到

$$\mathrm{d}\rho = \mathrm{d}\tau + \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r_s}}\mathrm{d}r = \mathrm{d}t + \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r_s}}\frac{\mathrm{d}r}{1-r_s/r}. \tag{1.2.11}$$

由(1.1.5)和(1.1.7)式给出

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{k}{1-r_s/r}, \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} = u^1 = -\left(k^2 - 1 + \frac{r_s}{r}\right)^{1/2}. \tag{1.2.12}$$

粒子开始下落时有 $u^1=0, r\to\infty$，代入(1.2.12)式确定 $k=1$，于是(1.2.12)式给出 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}=-\frac{\sqrt{r_s}}{\sqrt{r}}, \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=k(1-r_s/r)^{-1}$，代入(1.2.11)式，得到 $\mathrm{d}\rho=0$. 这正表明坐标系(τ,ρ)是自由下落的.

显然，度规(1.2.10)式是一个动态度规.

在施瓦西度规中，$r>r_s$ 和 $r<r_s$ 两个区域的 g_{00} 和 g_{11} 均反号，这相当于时间轴和空间轴对换，导致两个区域不连通，$r=r_s$ 为奇异面. 在 Lemaitre 度规中，这一奇异性已消除. 由(1.2.10)式可知，在 $r>r_s$ 和 $r<r_s$ 两个区域，ρ 恒为空间轴，τ 恒为时间轴，除 $r=0$ 以外不存在施瓦西奇点.

1.3 施瓦西黑洞

我们考察沿径向的光信号的行为. 令 $\mathrm{d}s=0, \mathrm{d}\theta=\mathrm{d}\varphi=0$，得到

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\tau} = \pm c\sqrt{\frac{r}{r_s}}. \tag{1.3.1}$$

式(1.3.1)给出的空-时图表明，在 R 区($r>r_s$ 的区域)，沿径向向外发射的光线可达无限远处，沿径向向内的光线可穿过施瓦西面到达奇点 $r=0$. 在 T 区($r<r_s$ 的区域)，沿两个方向的光线都要到达奇点 $r=0$. 总之，施瓦西面是一个**单向膜**，外面的粒子或光子可以通过它进入 T 区，到达奇点 $r=0$，而里面(T 区)的粒子和光子都不可能到达 R 区. 这一单向膜称为**视界**(horizon)，T 区称为施瓦西黑洞(black hole).

由于爱因斯坦引力场方程在时间反演下是不变的，所以度规(1.2.10)式经过时间反演变换后仍满足爱因斯坦方程. 这时有

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\tau^2 - \left[\frac{3}{2}\frac{\rho+\tau}{r_s}\right]^{-2/3}\mathrm{d}\rho^2 - \left[\frac{3}{2}(\rho+\tau)\right]^{4/3} r_s^{2/3}\mathrm{d}\Omega^2. \tag{1.3.2}$$

这仍是一个动态度规.

对于径向光线($ds=0, d\theta=d\varphi=0$), 由空-时图可见, 径向光信号的行为与图 2 给出的相反, 任何粒子和光子都不可能由 R 区进入 $\tilde{T}$ 区, 而 $\tilde{T}$ 区的粒子和光子都要进入 R 区(图 3). 这样, 施瓦西面仍是单向膜, 但只允许由里向外的辐射. $\tilde{T}$ 区称为**白洞**(white hole).

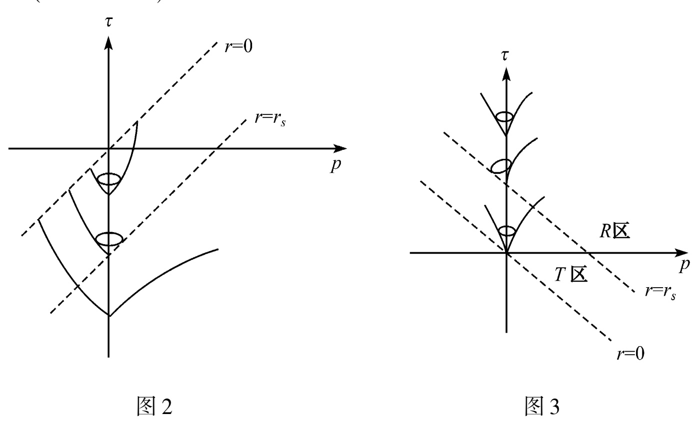


图 2　　图 3

1.4　Kruskal 坐标

1.3 节中引入的 Lemaitre 度规虽然消除了施瓦西度规中的奇点 $r=r_s$, 但是仍不能统一地描述 R 区、T 区和 $\tilde{T}$ 区的过程(图 4). Kruskal(1960)提出一个坐标变换, 使施瓦西度规在新坐标系中除了 $r=0$ 以外不存在奇点, 而且可以统一地描述 R 区、T 区和 $\tilde{T}$ 区的过程.

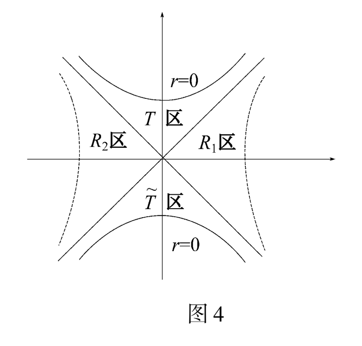


图 4

如果从流形中任一点出发的短程线在两个方向上都可无限延长, 或终止于内禀奇点, 则此流形称为**最大解析的流形**. 如果从流形中任一点出发的短程线在两个方向上都可无限延长, 则此流形称为**完备的**. 下面讨论的 Kruskal 流形是最大解析的但不是完备的(有奇点 $r=0$).

Kruskal 引入一个新的坐标系:

$$x^0 = v, \quad x^1 = u, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \varphi. \tag{1.4.1}$$

度规具有形式:

$$ds^2 = f^2 dv^2 - f^2 du^2 - r^2(v,u) d\Omega^2. \tag{1.4.2}$$

令(1.4.2)和(1.1.1)式相等, 并要求函数 $f=f(r)$, 当 $v=u=0$ 时, f 有限且不等于零, 可以确定由施瓦西坐标变至 Kruskal 坐标的变换式, 当 $r>r_s$ 时, 得

$$v = \pm \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right)^{1/2} \exp\left(\frac{r}{2r_s} \right) \mathrm{sh}\left(\frac{t}{2r_s} \right),$$

$$u = \pm \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right)^{1/2} \exp\left(\frac{r}{2r_s} \right) \mathrm{ch}\left(\frac{t}{2r_s} \right). \tag{1.4.3}$$

逆变换为

$$\left(\frac{r}{r_s} - 1 \right) \exp\left(\frac{r}{r_s} \right) = u^2 - v^2,$$

$$\frac{t}{2r_s} = \mathrm{arcth}\left(\frac{v}{u} \right); \tag{1.4.4}$$

f 由(1.4.5)式确定：

$$f^2 = \frac{32m^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_s} \right) = f^2(u^2 - v^2). \tag{1.4.5}$$

式中右端表示自变量为$(u^2 - v^2)$的一个超越函数.

当 $r < r_s$ 时，得到

$$v = \pm \left(1 - \frac{r}{r_s} \right)^{1/2} \exp\left(\frac{r}{2r_s} \right) \mathrm{ch}\left(\frac{t}{2r_s} \right),$$

$$u = \pm \left(1 - \frac{r}{r_s} \right)^{1/2} \exp\left(\frac{r}{r_s} \right) \mathrm{sh}\left(\frac{t}{2r_s} \right); \tag{1.4.3a}$$

逆变换为$\left(\frac{r}{r_s} - 1 \right) \exp\left(\frac{r}{r_s} \right) = u^2 - v^2$,

$$\frac{t}{2t_s} = \mathrm{arc\ th} \frac{u}{v}. \tag{1.4.4a}$$

最后得到 Kruskal 度规：

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{32m^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_s} \right) (\mathrm{d}v^2 - \mathrm{d}u^2) - r^2 \mathrm{d}\Omega^2. \tag{1.4.6}$$

由(1.4.6)式可见，度规除了 $r = 0$ 有一奇点以外，再无奇点. 由(1.4.4)可知，$r = r_s$ 对应于 $v = \pm u$，即空-时图中两条 $\pm \frac{\pi}{4}$分角线. 由(1.4.4)还可看出，中心奇点 $r = 0$ 对应于 $v^2 - u^2 = 1$，是两条等轴双曲线，其渐近线就是上述两条 $\pm \frac{\pi}{4}$分角线.

以 $r = 0$(两条双曲线)和 $r = r_s$(两条分角线)为界，可将空时分成四个区域：左右两个区域(R_2 区和 R_1 区)，$r > r_s$；上下两个区域(T 区和 $\tilde{T}$ 区)，$r < r_s$.

在 R_1 区和 R_2 区，$r =$ 常数 $> r_s$ 对应于 $u^2 - v^2 = C > 0$，是以 u 轴为对称轴的双曲面簇.

在 T 区和 $\tilde{T}$ 区，$r =$ 常数 $< r_s$ 对应于 $v^2 - u^2 = C > 0$，是以 v 轴为对称轴的双曲面簇.

对于光子的径向运动，$\mathrm{d}s=\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}\varphi=0$，由(1.4.6)得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\pm 1, \tag{1.4.7}$$

即光锥面与 $\pm\frac{\pi}{4}$分角线平行，与狭义相对论中的情形相同. 因此类时线满足

$$\mathrm{d}s^2>0, \quad \left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right|<1,$$

与 u 轴夹角大于$\frac{\pi}{4}$. 类空线满足

$$\mathrm{d}s^2<0, \quad \left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right|>1,$$

与 u 轴夹角小于$\frac{\pi}{4}$.

由空-时图可见，R_1 区和 R_2 区的粒子随时间坐标 v 的增大不可能进入 $\tilde{T}$ 区，只能进入 T 区；T 区的粒子随 v 的增大将一律到达中心奇点 $r=0$，不可能沿相反方向运动. 因此，T 区即施瓦西黑洞，$r=r_s$ 为视界.

$\tilde{T}$ 区内的粒子将一律进入 R 区(R_1，R_2)，相反的过程是不可能的. 因此，$\tilde{T}$ 区即施瓦西白洞，$r=r_s$ 仍为单向膜.

在 Kruskal 空时中存在两个不联通的宇宙，对应于 R_1 区和 R_2 区. 不可能用任何信号把这两个区域联系起来. 两个区域中间隔一个“喉”(throat)或称为“虫洞”(wormhole). 这两个宇宙的含义现在尚不清楚.

1.5　Penrose 图

首先区分下列几个不同的无穷远概念：

I^+：类时未来无穷远

定义　对于任一有限 r 值，当 $t\to+\infty$ 时，类时世界线伸展的区域.

I^-：类时过去无穷远

定义　对于任一有限 r 值，当 $t\to-\infty$ 时，类时世界线伸展的区域.

I^0：类空无穷远

定义　对于任一有限 t 值，当 $t\to\infty$ 时，类空世界线伸展的区域.

$\mathscr{L}^+$：类光未来无穷远

定义　当$(t-r)$为有限值，而$(t+r)\to\infty$ 的区域，或所有出射类光世界线的伸展区域.

$\mathscr{L}^-$：类光过去无穷远

定义　当$(t+r)$为有限值，而$(t-r)\to-\infty$ 的区域，或发出入射类光世界线

的区域.

可以证明，在共形变换下，闵可夫斯基时空图 5 可变为 Penrose 图 6. 同样，Kruskal 时空图 4 可变为 Penrose 图 7.

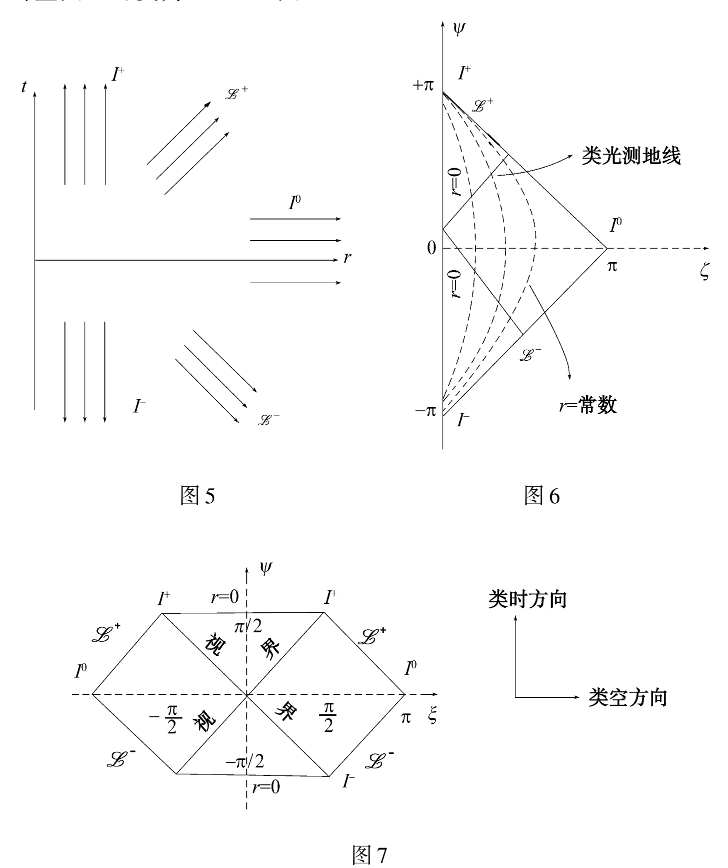


图 5

图 6

图 7

第2章 球对称恒星的引力坍缩

一颗温度高于环境温度的恒星会连续发射能量，它的质量不断减少. 恒星物质在引力的压缩过程中被加热，使氢核聚变，成为氦，从而提供防止恒星冷却的能源，并产生强大的辐射压与引力相平衡. 这样的恒星的平均密度是 $1\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$. 太阳就是这类恒星的一个例子.

当恒星的氢燃烧殆尽以后，可以发生其他的核反应过程，产生更重的核. 但这些过程持续的时间很短. 在强大的引力的作用下，恒星物质密度迅速增大，致使恒星物质(除极薄的外层部分以外)的电子发生简并，于是恒星进入一个新的平衡阶段，由电子的简并压和引力相平衡. 这种恒星的密度约为 $10^7\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$，白矮星就属于这类恒星.

质量大于 $1.2M_\odot$ 的白矮星不可能稳定，电子和核内的质子反应变为中子，从而使恒星物质呈中子态. 中子星便属于这类恒星，其密度约为 $10^{14}\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$. 如果中子星质量 $M<3.2M_\odot$，则可以稳定存在. 现在人们知道，脉冲星即中子星，它们发出的光和电磁辐射脉冲周期从 $10^{-3}\sim 1\mathrm{s}$. 观测到的脉冲星周期相当准确，这只可能解释为中子星在旋转，而以这样的周期旋转的恒星半径应该相当小. 中子星靠着简并中子气产生的简并压支撑引力以维持力学平衡.

质量大于 $3.2M_\odot$ 的中子星不可能稳定，它会无限坍缩，成为黑洞*.

2.1 广义相对论恒星的引力平衡

施瓦西内部解为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{\nu}\mathrm{d}t^2 - \mathrm{e}^{\lambda}\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\Omega^2. \tag{2.1.1}$$

式中 $\nu=\nu(r)$, $\lambda=\lambda(r)$. 度规(2.1.1)描述静态球对称恒星内部的引力场. 质量密度 $\rho=\rho(r)$、压力 $p=p(r)$ 的理想流体模型是星际物质的一个很好的近似. 当 ρ 不等于常数时，解场方程得到(2.1.1)式中的度规系数

$$\mathrm{e}^{-\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r}. \tag{2.1.2}$$

式中 $m(r)$ 为质量函数，定义为

---

* 白矮星和中子星的临界质量的数值因态方程(模型)不同而略有不同.

$$m(r) \equiv 4\pi\int_0^r \rho(x) r^2 \mathrm{d}r. \tag{2.1.3}$$

采用(2.1.2)式，可将其余场方程写为

$$\nu' = -\frac{2p'}{p+\rho}, \tag{2.1.4}$$

$$kp = \frac{\nu'}{r}\left(1-\frac{2m}{r}\right) - \frac{2m}{r^3}. \tag{2.1.5}$$

我们先讨论 $\rho=\rho(r)$ 的一般情况，然后再讨论 $\rho=\text{const.}$ 的情况. 一个稳定平衡的恒星须满足一些物理条件. 设恒星半径为 r_0，$p(r_0)=0$，$p_{\max}=p(0)=$有限值，$\rho_{\max}=\rho(0)=$有限值；质量密度 $\rho(r)$ 随 r 的增大而减小：

$$\rho'(r) < 0. \tag{2.1.6}$$

在恒星表面，e^{ν} 和它的导数应该是连续的，$m(r_0)$ 应等于施瓦西外解中的质量 M：

$$m(r_0) \equiv M. \tag{2.1.7}$$

由(2.1.3)式可知，在 $r=0$ 处 $m(r)/r^3$ 是有限的.

下面我们要寻求对于给定 r_0 的最大可能质量 M，即寻求恒星的**临界质量**. 令

$$f(r) \equiv e^{\nu/2}, \tag{2.1.8}$$

上述压强有限的条件可表示为，f'/rf 在 $r=0$ 处有限. (2.1.9)

由(2.1.4)和(2.1.5)式可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\sqrt{1-\frac{2m}{r}}f'\right] = \frac{f}{\sqrt{1-2m/r}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{m}{r^3}\right). \tag{2.1.10}$$

由(2.1.6)式可知，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{m}{r^3}\right) \leqslant 0$，故有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\sqrt{1-\frac{2m}{r}}f'\right] \leqslant 0. \tag{2.1.11}$$

在 $r=r_0$，应有 $p(r_0)=0$，且内、外解应光滑连接，因此有

$$f^2(r_0) = 1-\frac{2M}{r_0}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right|_{r=0} = \frac{M}{r_0^2}\frac{1}{\sqrt{1-2M/r_0}}. \tag{2.1.12}$$

用(2.1.12)式对(2.1.11)式从 r 到 r_0 积分，得到

$$f'(r) \geqslant \frac{Mr}{r_0^3}\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1/2}. \tag{2.1.13}$$

应用条件(2.1.12)和(2.1.13)式，在 0 到 r_0 之间积分，得到

$$f(0) \leqslant \left(1-\frac{2M}{r_0}\right)^{1/2} - \frac{M}{r_0^3}\int_0^{r_0}\frac{r\mathrm{d}r}{(1-2m/r)^{1/2}}. \tag{2.1.14}$$

把 $\rho(r)$ 写成

$$\rho(r) = \rho_0 + \mu.$$

式中 $\rho_0 = 6M/kr_0^3$，μ 满足式

$$\int_0^{r_0} \mu(r) r^2 \mathrm{d}r = 0, \quad \mu' \leqslant 0, \ \mu(0) \geqslant 0. \tag{2.1.15}$$

则有

$$m(r) = M\frac{r^3}{r_0^3} + \int_0^r \mu(r) r^2 \mathrm{d}r. \tag{2.1.16}$$

式中的积分总是正的. 用 $m(r)$ 代替 Mr^3/r_0^3 将使(2.1.14)式右端的值增大. 由此可以得到

$$f(0) \leqslant \frac{3}{2}\left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)^{1/2} - \frac{1}{2}. \tag{2.1.17}$$

注意 $f(0) > 0$，则由(2.1.17)式得到

$$\frac{2M}{r_0} < \frac{8}{9}. \tag{2.1.18}$$

这就是恒星保持稳定平衡的条件. 应注意(2.1.18)式中 M 和 r_0 的定义. M 是质量密度 ρ 在坐标体积中的积分，对应于牛顿引力理论中的引力质量. 半径 r_0 的定义要使表面积为 $4\pi r_0^2$. (2.1.18)式表明，表面积一定的恒星，只要其质量小于临界质量，就是稳定的. 质量大于临界质量的恒星不会稳定，会因引力的作用而坍缩.

当 $\rho = \text{const.}$ 时，由(2.1.3)，(2.1.7)和(2.1.18)式得到临界质量的表示式：

$$M_c = \frac{8}{9}\sqrt{\frac{2}{3kC^2\rho}}. \tag{2.1.19}$$

式中 $C^2 = 1.86 \times 10^{-27}$ cm · g^{-1}. 代入几个典型密度，得到下列临界质量：

$\rho/(\mathrm{g\cdot cm^{-3}})$	1	10^6	10^{15}
$M_c/M_\odot$	1.14×10^8	1.14×10^5	3.96

这些数值虽不很精确，但已清楚地表明，中子星只能具有几倍太阳的质量，质量再大的中子星将没有稳定的终态.

由(2.1.18)式及光谱线引力红移的公式可以得到，稳定的恒星表面发出的光最大的红移值是 $Z = 2$.

2.2　球对称恒星的引力坍缩

2.1 节的讨论已经表明，在恒星演化的晚期，如果恒星质量大于中子星的临界质量，将无限坍缩. 这实际上只是一个直观的假设. 在本节中，我们利用一个简单的态方程，进行严格的计算，来证明上述假设的正确性.

假设恒星物质是零压流体. 由于压强等于零, 只要恒星开始收缩, 就必然要坍缩至一点. 由这一模型所得到的度规在整个空时区域内满足爱因斯坦场方程.

取随动坐标系(t, r, θ, φ), 解爱因斯坦场方程, 将得到 Tolman 度规:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{[R'(r,t)]^2}{1+f(r)}dr^2 - R^2(r,t)d\Omega^2. \tag{2.2.1}$$

式中$f(r)$是满足条件$f(r) > -1$的任意函数. 令$R(r,t) = R(t) \cdot r$, $f(r) = -kr^2$, 得到一个最简单的恒星内部解:

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2\right]. \tag{2.2.2}$$

这正是 Robertson-Walker 度规. 由于它描述均匀、各向同性空-时, 所以在宇宙学中有重要意义.

在随动坐标系中有$u^i = 0, u^0 = 1$, 守恒方程$T^{\nu}_{\mu;\nu} = 0$的空间分量自然满足, 时间分量为

$$T^{\nu}_{0;\nu} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} - \rho\left[\frac{\dot{a}}{2a} + \frac{\dot{b}}{b}\right] = 0. \tag{2.2.3}$$

式中, $a \equiv -\frac{R^2(t)}{1-kr^2}, b \equiv -R^2(t)r^2$.

又由场方程$R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R = 4\pi T_{11}$得

$$2k - \ddot{R}(t)R(t) - 2\dot{R}^2(t) = 4\pi\rho. \tag{2.2.4}$$

由(2.2.3)和(2.2.4)式得到$\rho(t)R^3(t) = \text{const.}$, 调整径向坐标, 使

$$R(0) = 1. \tag{2.2.5}$$

此时有$\rho(t)R^3(t) = \rho(0)$, 即

$$\rho(t) = \rho(0)R^{-3}(t). \tag{2.2.6}$$

将(2.2.5)~(2.2.6)和(2.2.2)式代入场方程, 可将场方程化为

$$4\pi\rho(0)R^{-1}(t) = 2k + R(t)\ddot{R}(t) + 2\dot{R}^2(t), \tag{2.2.7}$$

$$\frac{4\pi}{3}\rho(0)R^{-1}(t) = -R(t)\ddot{R}(t). \tag{2.2.8}$$

消去$\ddot{R}(t)$, 得到

$$\dot{R}^2(t) = -k + \frac{8\pi}{3}\rho(0)R^{-1}(t). \tag{2.2.9}$$

假设$t = 0$时流体是静止的, 则有

$$\dot{R}(t) = 0. \tag{2.2.10}$$

代入(2.2.9)式得

$$k = \frac{8\pi}{3}\rho(0). \tag{2.2.11}$$

(2.2.9)式化为

$$\dot{R}^2(t) = k[R^{-1}(t) - 1], \tag{2.2.12}$$

此方程的解具有形式：

$$\begin{cases} t = \dfrac{1}{2\sqrt{k}}(\psi + \sin\psi), & (2.2.13) \\ R = \dfrac{1}{2}(1 + \cos\psi). & (2.2.14) \end{cases}$$

这是摆线(图8)的参数方程，当 $\psi = \pi$，即当 $t = \pi/2\sqrt{k}$时，$R(t) = 0$. 这表明一个零压流体球将在有限长的时间 $\pi/2\sqrt{k}$内从静止坍缩到中心奇点.

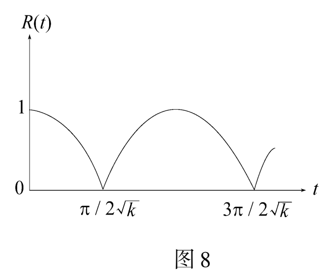


图8

虽然在随动坐标系中观测，这一坍缩过程只需要有限长时间，但是对于远处观察者，由1.1节可知，星体表面要达到施瓦西面需经过无限长时间；要坍缩到 $r=0$，外面的观察者是看不到的.

由随动坐标系变至施瓦西坐标系，可以求得远处观察者测得的自星球表面发出的光的红移(Weinberg,1972)：

$$Z \equiv \frac{\Delta\nu}{\nu} = \left(1 - \frac{ka^2}{R(t)}\right)^{-1}\left[\sqrt{1 - ka^2} + a\sqrt{k[1 - R(t)]R^{-1}(t)}\right] - 1. \tag{2.2.15}$$

对(2.2.15)式的详细分析表明，由开始坍缩时记时(对于远处观察者)，红移 Z 由零开始缓慢增大，然后 Z 的增大速度突然加快(接近指数规律)，红移趋于无限大. 这就是说，在远处观察者看来，坍缩着的恒星实际上是突然消失的.

第 3 章　克 尔 黑 洞

施瓦西解是球对称无转动场源的引力场，这是十分特殊的情况. 一般的引力坍缩不可能是球对称的，因为各种天体都具有角动量. 本章讨论具有轴对称性的旋转天体的引力性质.

3.1　克 尔 度 规

轴对称旋转天体的引力场由 Papapetrou 度规描述：

$$ds^2 = f(dt - \omega d\varphi)^2 - f^{-1}[e^{2r}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2]. \tag{3.1.1}$$

变换到椭球坐标：

$$\rho = k(x^2 - 1)^{1/2}(1 - y^2)^{1/2}, \quad z = kxy. \tag{3.1.2}$$

令　$k \equiv \frac{Mp}{\delta}$，将场方程的解写为

$$f = A_\delta / B_\delta, e^{2r} = A_\delta / p^{2\delta}(x^2 - y^2)^{\delta 2},$$
$$\omega = -2MqC_\delta(1 - y^2)/A_\delta. \tag{3.1.3}$$

式中 p 和 q 满足条件 $p^2 + q^2 = 1$；不旋转时 $q = 0$，$p = 1$. $\delta = 1$，对应于 Kerr 解

$$A_1 = p^2 x + q^2 y - 1, \quad B_1 = (px + 1)^2 + q^2 y,$$
$$C_1 = -(px + 1). \tag{3.1.4}$$

$\delta = 2$ 时的解为

$$\begin{aligned}
A_2 &= [p^2(x^2 - 1)^2 + q^2(1 - y^2)]^2 \\
&\quad - 4p^2q^2(x^2 - 1)(1 - y^2)(x^2 - y^2), \\
B_2 &= (p^2x^4 + q^2x^4 - 1 + 2px^3 - 2px)^2 \\
&\quad + 4q^2y^2(px^3 - pxy^2 - y^2 + 1)^2, \\
C_2 &= p^2(x^2 - 1)[-4x^2(x^2 - y^2) + (x^2 - 1)(1 - y^2)] \\
&\quad + p^3x(x^2 - 1)[-2(x^4 - 1) - (3 + x^2)(1 - y^2)] \\
&\quad + q^2(3x + 1)(1 - y^2)^3.
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

设物体的角动量为 J，则有

$$J = M^2 q = Ma. \tag{3.1.6}$$

将 $\delta = 1$ 的解作变换

$$px = \frac{r}{M} - 1, \quad y = \cos\theta, \tag{3.1.7}$$

得到通常形式的 Kerr 度规

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left(1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right)dt^2 - \frac{r^2 + a^2\cos^2\theta}{r^2 + a^2 - 2Mr}dr^2 \\ & - (r^2 + a^2\cos^2\theta)d\theta^2 - \left[(r^2 + a^2)\sin^2\theta \right. \\ & \left. + \frac{2Mra^2\sin^4\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right]d\varphi^2 + \frac{4Mra\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}dtd\varphi. \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

3.2　特征曲面

无限红移面是 $g_{00} = 0$ 的面. 施瓦西场的无限红移面为 $r = r_s \equiv 2m$，克尔场中的无限红移面为

$$r_{\pm}^{\infty} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta}. \tag{3.2.1}$$

由空–时图可知，一个超曲面 $f(x^\mu) = 0$ 为单向膜的条件是其法向矢量 $n_\mu = f_{,\mu}$ 为非类空矢量，n_μ 为零矢量对应于单向膜开始出现的超曲面，称为**视界**. 因此，视界 $f(x^\mu) = 0$ 满足条件

$$n_\mu n^\mu = g^{\mu\nu}\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{\partial f}{\partial x^\nu} = 0. \tag{3.2.2}$$

将施瓦西度规代入(3.2.2)式，注意到球对称性$[f(x^\mu) = f(r)]$，得到

$$g^{\mu\nu}f_{,\mu}f_{,\nu} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 = 0.$$

此方程的解为 $r = 2M \equiv r_s$. 显然，施瓦西场的视界和无限红移面重合.

将克尔度规(3.1.8)式代入(3.2.2)式，注意到辐射对称性$[f(x^\mu) = f(r,\theta)]$，得到

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}f_{,\mu}f_{,\nu} &= g^{11}f_{,1}^2 + g^{22}f_{,2}^2 \\ &= \frac{2Mr - r^2 - a^2}{r^2 + a^2\cos^2\theta}f_{,1}^2 - \frac{1}{r^2 + a^2\cos^2\theta}f_{,2}^2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $r^2 + a^2\cos^2\theta \neq 0$，得到

$$(r^2 + a^2 - 2Mr)f_{,1}^2 + f_{,2}^2 = 0. \tag{3.2.3}$$

分离变量，得到此方程的解：

$$r_{\pm}^{h} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \tag{3.2.4}$$

比较(3.2.4)和(3.2.1)式，知克尔场的无限红移面和视界不重合.

类似地，将 Kerr-Newman 度规代入(3.2.2)式，得到视界面

$$r_{\pm}^{h} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - kQ^2} \tag{3.2.5}$$

对于 Kerr-Newman-Kasyua 场，只要将(3.2.5)式中的 Q^2 换为(e^2+q^2).

在克尔空-时中，直角坐标(x,y,z)与坐标(r,θ,φ)的关系为(Kerr,1963)

$$\begin{aligned} x &= (r\cos\varphi - a\sin\varphi)\sin\theta, \\ y &= (r\sin\varphi + a\cos\varphi)\sin\theta, \\ z &= r\cos\theta. \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

在直角坐标系中，克尔度规具有形式：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 \\ &\quad - \frac{2Mr}{r^4 + a^2 z^2}\left[\frac{r(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) - a(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)}{r^2 + a^2}\right. \\ &\quad \left. + \frac{z\mathrm{d}z}{r} + \mathrm{d}t\right]^2. \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

这一表达式消除了视界处的坐标奇异性. $r=0$ 处仍为奇点. 由(3.2.6)式可知，中心奇点对应于

$$z = 0,\quad x^2 + y^2 = a^2\sin^2\theta,\quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{3.2.8}$$

这是二维空间(x,y)中的一个圆盘. 又由度规(3.1.8)可知

$$r^2 + a^2\cos^2\theta = 0 \tag{3.2.9}$$

为奇异面. (3.2.9)式仅当 $r=0$ 且 $\theta=\frac{\pi}{2}$时方能成立$(a\neq 0)$. 由于此时标曲率 $R=\infty$，可知这一奇异性是内禀的. 在直角坐标系(3.2.5)中，这一奇异性对应于

$$z = 0,\quad x^2 + y^2 = a^2. \tag{3.2.10}$$

这是二维空间(x,y)中的一个圆环. 比较(3.2.10)和(3.2.8)式可以发现，只有圆环(3.2.10)式才是内禀奇异的. 圆盘(3.2.8)式比圆环(3.2.10)式多出来的一个开域只是坐标奇异的，因为在这个开域上$\left(r=0,\theta<\frac{\pi}{2}\right)$度规(3.1.8)式是解析的.

由(3.2.4)，(3.2.6)和(3.2.10)式可以看出，在二维空间(x,y)内，内禀奇异环(3.2.10)在视界 $r_{\pm}^{h}$ 的里面. 即**克尔场的视界面包围了真奇点**(内禀奇点)，如图 9 所示. 图中虚线表示视界，实线表示无限红移面，* 表示真奇点.

详细分析表明，$\delta=1,2,3,\cdots$对应的辐射对称解中，只有 $\delta=1$ 的解(Kerr 解)没有裸奇点.

克尔时空的无限红移面 $r_{\pm}^{s}$ 和视界 $r_{\pm}^{h}$ 满足

$$r_{+}^{s} \geqslant r_{+}^{h} > r_{-}^{h} \geqslant r_{-}^{s},$$

如图 10 所示. 视界 r_{+}^{h} 和无限红移面包围的区域叫能层. 面 r_{+}^{h} 和 r_{+}^{s} 在自转轴处相切. 对于施瓦西黑洞，$r_{+}^{h}=r_{+}^{s}$，能层不存在.

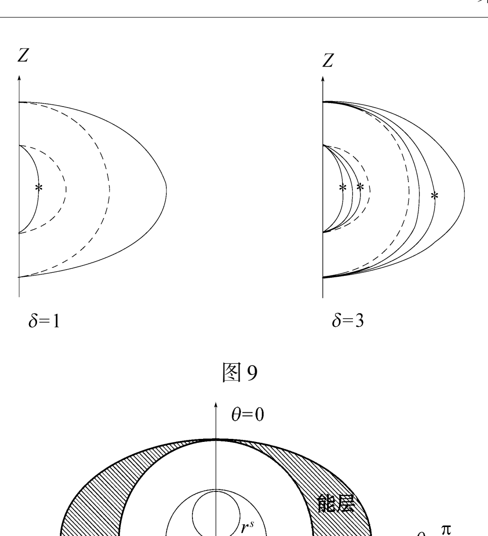


图9

图10

当粒子静止于能层外面时，有

$$g_{00}=\left(1-\frac{2mr}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right)>0,$$

$$ds^2=g_{00}c^2dt^2>0,$$

世界线为类时曲线，这当然是合理的.但是当粒子位于能层内部(静止)时，

$$g_{00}=\left(1-\frac{2mr}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right)<0,$$

$$ds^2=g_{00}c^2dt^2<0.$$

世界线是类空曲线，这表明粒子不可能静止于能层内部.

在能层内部，线元可写为

$$ds^2=g_{00}c^2dt^2+g_{11}dr^2+g_{22}d\theta^2+g_{33}d\varphi^2+2g_{03}cd\varphi dt,$$

其中，

$$g_{00}=\left(1-\frac{2mr}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right)<0,$$

$$g_{11}<0,\quad g_{22}<0,\quad g_{33}<0,\quad g_{03}>0.$$

因此，不能再把 t 看作时间坐标，把 r,θ,ϕ 看作空间坐标.但是可以把线元改写为

$$ds^2=\left(g_{00}-\frac{g_{02}}{g_{33}}\right)c^2dt^2+g_{11}dr^2+g_{22}d\theta^2$$

$$+ g_{33}\left(\mathrm{d}\phi + \frac{g_{03}}{g_{33}} c\mathrm{d}t \right)^2.$$

由于 $r > r_+^h$ 时有

$$\left(g_{00} - \frac{g_{03}^2}{g_{33}} \right) = \frac{r^2 - 2mr + a^2}{r^2 + a^2 + \dfrac{2mra^2\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}} > 0,$$

所以只要令

$$\left(\mathrm{d}\phi + \frac{g_{03}}{g_{33}} c\mathrm{d}t \right) = 0,$$

便可以保证 $r = \text{const.}$ 和 $\theta = \text{const.}$ 时，$\mathrm{d}s^2 > 0$. 这表明，t 仍可作为时间轴，其余三个轴可看作空间轴. 这正是能层外部观测者所看到的. 但是这时坐标轴随转动球一起作同方向转动. 我们有

$$\dot{\phi} = -\frac{cg_{03}}{g_{33}} = \frac{r_g ar}{(r^2 + a^2\cos^2\theta)(r^2 + a^2) + r_g ra^2\sin^2\theta},$$

在靠近视界的地方有

$$\dot{\phi} \to a/r_g r_+^h,$$

一般地，有

$$\dot{\phi}(r = r_+^h) > \dot{\phi}(r > r_+^h), \qquad r_g = 2m.$$

这就是说，能层内部的坐标系必须被转动球体拖曳，以角速度

$$\dot{\phi} = -\frac{cg_{03}}{g_{33}}$$

绕对称轴与球体作同方向转动. 无限红移面是一个静止的界面，亦称静界.

3.3 黑洞的无毛定理

Carter-Robinson 定理断言，渐近平直稳态轴对称中性黑洞的外部引力场有唯一解，即克尔解. 这就是说，所有渐近平直的稳态黑洞，都只由三个参量唯一确定，这三个参量就是黑洞的质量 M，角动量 J(或比角动量 a)以及电荷(有电荷时相应的解为克尔–纽曼解).

下面我们导出克尔黑洞的两个基本关系式，积分关系式

$$M = 2\Omega J + \frac{\kappa}{4\pi}A, \tag{3.3.1}$$

和微分关系式

$$\delta M = \Omega\delta J + \frac{\kappa}{8\pi}\delta A. \tag{3.3.2}$$

稳态轴对称空间存在两个 Killing 矢量, 类时 Killing 矢量 $\xi_{(t)}$ 和类空 Killing 矢量 ξ_{φ}, 它们满足恒等式

$$\xi_{(t)\mu;\nu}=\xi_{(t)[\mu;\nu]};\quad \xi_{(\varphi)\mu;\nu}=\xi_{(\varphi)[\mu;\nu]}, \tag{3.3.3}$$

$$\xi_{(t)\mu;\nu}\xi^{\nu}_{(\varphi)}=\xi_{(\varphi)\mu;\nu}\xi^{\nu}_{(t)}, \tag{3.3.4}$$

$$\xi^{\mu;\nu}_{(t);\nu}=-R^{\mu}_{\nu}\xi^{\nu}_{(t)}, \tag{3.3.5}$$

$$\xi^{\mu;\nu}_{(\varphi);\nu}=-R^{\mu}_{\nu}\xi^{\nu}_{(\varphi)}. \tag{3.3.6}$$

由关于 $\xi^{\mu}_{(t)}$, $\xi^{\mu}_{(\varphi)}$ 的 Killing 方程

$$\xi_{(t)\mu;\nu}+\xi_{(t)\nu;\mu}=0,$$

得

$$-\xi_{(t)\nu;\mu}=\xi_{(t)\mu;\nu},$$

故

$$\xi_{(t)[u;\nu]}\equiv\frac{1}{2}(\xi_{(t)u;\nu}-\xi_{(t)\nu;u})=\xi_{(t)u;\nu}.$$

类似地可证

$$\xi_{(\varphi)\mu;\nu}=\xi_{(\varphi)[\mu;\nu]}.$$

(3.3.4)式的证明如下. 设时间位移生成元和 φ 位移生成元分别为

$$I_t=\frac{\partial}{\partial t}=\xi^{u}_{(t)}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}},$$

$$I_{\varphi}=\frac{\partial}{\partial\varphi}=\xi^{\mu}_{(\varphi)}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}.$$

由于 $I_t\cdot I_{\varphi}=I_{\varphi}\cdot I_t$, 故

$$\xi^{\mu}_{(t)}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left[\xi^{\nu}_{(\varphi)}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\right]=\xi^{\nu}_{(\varphi)}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left[\xi^{\mu}_{(t)}\right]\frac{\partial}{\partial x^{\mu}},$$

即

$$\xi^{\mu}_{(t)}\xi^{\nu}_{(\varphi),\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}=\xi^{\nu}_{(\varphi)}\xi^{\mu}_{(t),\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}},$$

或

$$\begin{aligned}\xi^{\mu}_{(t)}(\xi^{\nu}_{(\varphi);\mu}-\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\xi^{\lambda}_{(\varphi)})\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}&=\xi^{\mu}_{(\varphi)}(\xi^{\mu}_{(t);\nu}-\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}\xi^{\lambda}_{(t)})\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\\&=\xi^{\mu}_{(\varphi)}\left[\xi^{\nu}_{(t);\mu}-\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\xi^{\lambda}_{(t)}\right]\frac{\partial}{\partial x^{\nu}},\end{aligned}$$

即

$$(\xi^{\mu}_{(t)}\xi^{\nu}_{(\varphi);\mu}-\xi^{\mu}_{(\varphi)}\xi^{\nu}_{(t);\mu})\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}=0.$$

由于这是一个恒等式, 故(3.3.4)式得证.

现在4维时空中选一个不含奇异性的类空超曲面(例 t = 常数)，对(3.3.5)式两边进行面积分得

$$\int_S \xi^{\mu;\nu}_{(t);\nu} \mathrm{d}\Sigma_\mu = \int_S R^\mu_\nu \xi^\nu_{(t)} \mathrm{d}\Sigma_\mu.$$

按高斯定理

$$\int_S \xi^{\mu;\nu}_{(t);\nu} \mathrm{d}\Sigma_\mu = \int_S \xi^{\mu;\nu}_{(t)} \mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu},$$

式中∂S是类空超曲面S的边界，取∂S为

$$\partial S = \partial S_B + \partial S_\infty,$$

其中∂S_B为包围黑洞的界面，∂S_∞为无限远界面.在无限远处度规渐近球对称，$\xi^\mu_{(t)} = (\xi^0_t, 0, 0, 0)$，我们有

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S_\infty} \xi^{\mu;\nu}_{(t)} \mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu} &= \int \xi^{0;r}_{(t)} \mathrm{d}\Sigma_{0r} = \int g^{rr} \xi^0_{(t);r} \mathrm{d}\Sigma_{0r} \\
&= \int g^{rr} \left(\frac{\partial \xi^0_{(t)}}{\partial r} + \Gamma^0_{0r} \xi^0_{(t)} \right) \mathrm{d}\Sigma \\
&= \int g^{rr} \Gamma^0_{0r} \xi^0_{(t)} \mathrm{d}\Sigma_{0r} = \int \frac{1}{2} g^{rr} g^{00} g_{00,r} \mathrm{d}\Sigma_{0r} \\
&= \int \frac{1}{2} g^{rr} g^{00} g_{00,r} \sqrt{g_{00} g_{rr}}\, r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \\
&= -\int \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{2M}{r^2} \right) r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \\
&= -4\pi M.
\end{aligned}$$

故

$$M = \frac{1}{4\pi} \int_S R^\mu_\nu \xi^\nu_{(t)} \mathrm{d}\Sigma_\mu + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial S_B} \xi^{\mu;\nu}_{(t)} \mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu}. \tag{3.3.7}$$

可见等式右边第一个积分即黑洞外部空间总质量，右边第二个积分即黑洞总质量.若选取上述类空超曲面处处与$\xi^\mu_{(\varphi)}$相切，并对(3.3.6)式两边进行面积分得

$$\int_S \xi^{\mu;\nu}_{(\varphi)\nu} \mathrm{d}\Sigma_\mu = -\int_S R^\mu_\nu \xi^\nu_{(\varphi)} \mathrm{d}\Sigma_\mu,$$

上式左边可化为

$$\int_{\partial S} \xi^{\mu;\nu}_{(\varphi)} \mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu}.$$

右边利用

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu},$$

可化为

$$-4\pi \int_S (2T^\mu_\nu - T\delta^\mu_\nu) \xi^\nu_{(\varphi)} \mathrm{d}\Sigma_\mu = -8\pi \int_S T^\mu_\nu \xi^\nu_{(\varphi)} \mathrm{d}\Sigma_\mu \quad (\text{因 } \xi^\mu_{(\varphi)} \mathrm{d}\Sigma_\mu = 0).$$

令 $\mathrm{d}\Sigma_\mu = (\mathrm{d}\Sigma_0, 0, 0, 0)$，则

$$-\int_S T_\nu^{\ \mu}\xi_{(\varphi)}^\nu \mathrm{d}\Sigma_\mu = -\int_S T_\varphi^{\ 0}\mathrm{d}\Sigma_0 = J.$$

这显然就是超曲面 S 内的总角动量 J. 若黑洞外无物质分布, J 即黑洞总角动量, M 即黑洞质量.

$$J = -\frac{1}{8\pi}\int_{\partial S_B}\xi_{(\varphi)}^{\mu;\nu}\mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu}, \tag{3.3.8}$$

$$M = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial S_B}\xi_{(t)}^{\mu;\nu}\mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu}. \tag{3.3.9}$$

由于视界的性质, 过视界上任一点有且仅有一光锥和视界面相切, 即有且仅有一根视界面上的零短程线(称为视界的母线).

沿上述母线上任一点引入以时间 t 为参量的零短程线切矢量

$$l^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t},$$

则

$$l^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t} = \delta_t^\mu + \delta_\varphi^\mu\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \xi_{(t)}^\mu + \Omega\xi_{(\varphi)}^\mu. \tag{3.3.10}$$

由于 $\xi_{(t)}^\mu, \xi_{(\varphi)}^\mu$ 都是 Killing 矢量, 故 l^μ 也是 Killing 矢量, 满足 Killing 方程

$$l_{\mu;\nu} + l_{\nu;\mu} = 0.$$

由(3.3.8)和(3.3.9)式得

$$\begin{aligned}M &= \frac{1}{4\pi}\int_{\partial S_B}(l^{\mu;\nu} - \Omega\xi_{(\varphi)}^{\mu;\nu})\mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu}\\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\partial S_B}l^{\mu;\nu}\mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu} - \Omega\int\frac{1}{4\pi}\xi_{(\varphi)}^{\mu;\nu}\mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu}\\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\partial S_B}l^{\mu;\nu}\mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu} + 2\Omega J.\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

现在在视界上任一点引入局部零标架 l^μ, $n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu$. 其中 l^μ 即沿母线该点的切矢, n^μ 是与 ∂S_B 垂直的法矢, m^μ, $\bar{m}^\mu$ 是在视界内的另两个切矢量. 视界面上的面元可写为

$$\mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(l_\mu n_\nu - l_\nu n_\mu)\mathrm{d}A = l_{[\mu}n_{\nu]}\mathrm{d}A.$$

由此得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi}\int_{\partial S_B}l^{\mu;\nu}\frac{1}{2}(l_\mu n_\nu - l_\nu n_\mu)\mathrm{d}A\\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B_S}\frac{1}{2}l_\mu n_\nu(l^{\mu;\nu} - l^{\nu;\mu})\mathrm{d}A\\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B_S}l_\mu n_\nu l^{\mu;\nu}\mathrm{d}A\\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial B_S}l_{\nu;\mu}l^\mu n^\nu\mathrm{d}A\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial S_B} l_{\mu;\nu} n^{\mu} l^{\nu} \mathrm{d}A = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial S_B} \kappa \mathrm{d}A. \tag{3.3.12}$$

式中

$$\kappa \equiv -l_{\mu;\nu} l^{\nu} \cdot n^{\mu} = -\frac{Dl^{\mu}}{\mathrm{d}t} \cdot n_{\mu},$$

代表与视界一起转动的粒子的坐标加速度的内法向分量，也就是视界面上的引力加速度，它满足

$$\kappa_{,\mu} l^{\mu} = \kappa_{,\mu} m^{\mu} = \kappa_{,\mu} \overline{m}^{\mu} = 0.$$

因此，κ 在视界面上为一常数. 由(3.3.11)和(3.3.12)式便得到(3.3.1)式.

下面计算 Ω, A 和 κ, 能层内各点的拖曳角速度 Ω 具有形式

$$\Omega = -\frac{cg_{03}}{g_{33}},$$

代入 $r = r_+^h$，便得到视界的角速度

$$\Omega = \frac{a}{r_g r_+^h} = \frac{J}{2M[M^2 + (M^4 - J^2)^{1/2}]} = \frac{J}{4M \cdot M_{ir}^2}. \tag{3.3.13}$$

式中

$$M_{ir} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[M^2 + (M^4 - J^2)^{1/2}]^{1/2}$$

叫黑洞的不可约质量. 在施瓦西黑洞的情况下它等于黑洞的质量 M.

由(3.3.13)式可以看出，视界上所有的点具有同一个拖曳角速度，即黑洞作刚性转动，只有一个角速度 Ω.

令 $t = \text{const.}$，$r = r_+^h$，克尔度规变为

$$\mathrm{d}l^2 = -(r_+^{h2} + a^2\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta^2 - \left[(r_+^{h2} + a^2)\sin^2\theta + \frac{2mr_+^h a^2 \sin^4\theta}{r_+^{h2} + a^2\cos^2\theta}\right]\mathrm{d}\varphi^2,$$

$$g^{1/2} = \begin{vmatrix} g_{\theta\theta} & g_{\theta\varphi} \\ g_{\varphi\theta} & g_{\varphi\varphi} \end{vmatrix}^{1/2} = (r_+^{h2} + a^2)\sin\theta.$$

故

$$\mathrm{d}A = \sqrt{g}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,$$

即

$$\begin{aligned} A = \int \mathrm{d}A &= 4\pi(r_+^{h2} + a^2) \\ &= 8\pi[M^2 \pm (M^4 - J^2)^{1/2}] = 16\pi M_{ir}^2. \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

对于克尔-纽曼黑洞有

$$A = \frac{4\pi G}{c^4}\left[2GM^2 - Q^2 + 2(G^2M^4 - J^2c^2 - GM^2Q^2)^{1/2}\right].$$

由(3.3.13)和(3.3.14)式可以得到

$$M = 4\pi\frac{J}{A\Omega} = 2\Omega J - 2\Omega J + 4\pi\frac{J}{A\Omega}.$$

而右端第二、三项为

$$4\pi\frac{J}{A\Omega} - 2\Omega J = \left(M^2 - \frac{J^2}{M^2}\right)^{1/2} = \frac{1}{M}(M^4 - J^2)^{1/2},$$

将此两式与(3.3.1)式比较，可知

$$\frac{\kappa}{4\pi}A = \frac{1}{M}(M^4 - J^2)^{1/2},$$

即

$$\kappa = 4\pi\frac{(M^4 - J^2)^{1/2}}{MA} = \frac{(M^4 - J^2)^{1/2}}{2M[M^2 + (M^4 - J^2)^{1/2}]}$$
$$= \frac{2M_{ir}^2 - M^2}{4MM_{ir}^2} = \frac{(r_+^h - r_-^h)}{2(r_+^{h2} + a^2)}.$$

在克尔-纽曼黑洞的情况下(采用CGS制)有

$$\kappa = \frac{4\pi}{A}\left[G^2M^2 - \frac{J^2c^2}{M^2} - GQ^2\right]^{1/2}.$$

在施瓦西黑洞的情况下，显然有 $\kappa = \frac{1}{4M} = \frac{M}{r_g^2}$，即施瓦西黑洞表面的引力加速度.

由克尔情况可知，当 $M^2 = J$(或 $M = a$)时 $\kappa = 0$. 这可以解释为惯性离心力和引力相抵消;这类黑洞称为极端克尔黑洞.

如果 $J > M^2$(或者 $a > M$)，视界不存在，中心奇点裸露，这在物理学中是不可接受的. 所以 Penrose(1968)提出:“……是否存在一位‘宇宙监督’，他严禁出现裸奇点，把每一个奇点都用视界面覆盖住?”这就是著名的宇宙监督原理. 按照这一原理，不可能有 $J > M^2$.

下面证明(3.3.2)式:

对 M_{ir}的定义式

$$2M_{ir}^2 = M^2 + (M^4 - J^2)^{1/2},$$

两边微分，得到

$$\delta M_{ir} = \frac{M_{ir}}{(M^2 - a^2)^{1/2}}\left[\delta M - \frac{J}{4MM_{ir}^2}\delta J\right].$$

考虑到(3.3.13)式知上式即

$$\delta M_{ir} = \frac{M_{ir}}{(M^2 - a^2)^{1/2}}[\delta M - \Omega\delta J].$$

由(3.3.14)和(3.3.15)式知上式即

$$\delta M = \Omega\delta J + \frac{\kappa}{8\pi}\delta A.$$

在 CGS 单位制中

$$\delta(Mc^2) = \Omega\delta J + \frac{\kappa c^2}{8\pi G}\delta A.$$

在克尔–纽曼黑洞的情况下有

$$\delta M = \Omega\delta J + \frac{\kappa}{8\pi}\delta A + V\delta Q,$$

$$V = \frac{Qr_+^h}{c^2(r_+^{h2} + a^2)}.$$

3.4 Rindler 变换

这是一个由闵可夫斯基时空坐标$(X-T)$向弯曲时空坐标$(x-t)$的变换，变换式为

$$\begin{cases} T = x\mathrm{sh}t, \\ X = x\mathrm{ch}t; \end{cases} \quad R\text{ 区} \tag{3.4.1}$$

$$\begin{cases} T = -x\mathrm{sh}t, \\ X = -x\mathrm{ch}t; \end{cases} \quad L\text{ 区} \tag{3.4.2}$$

$$\begin{cases} T = x\mathrm{ch}t, \\ X = x\mathrm{sh}t; \end{cases} \quad F\text{ 区} \tag{3.4.3}$$

$$\begin{cases} T = -x\mathrm{ch}t, \\ X = -x\mathrm{sh}t; \end{cases} \quad P\text{ 区} \tag{3.4.4}$$

$$Y = y, \quad Z = z.$$

在上述变换下，线元由闵可夫斯基的

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}T^2 - \mathrm{d}X^2 - \mathrm{d}Y^2 - \mathrm{d}Z^2 \tag{3.4.5}$$

化为

$$\mathrm{d}s^2 = x^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 \quad (R,\ L\text{ 区}); \tag{3.4.6}$$

$$\mathrm{d}s^2 = -x^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 \quad (F,\ P\text{ 区}). \tag{3.4.7}$$

Rindler 变换把闵可夫斯基时空分为 4 个区域(如图 11 所示)，以 T, X 轴的角平分线划分.

R 区和 L 区是两个 Rindler 时空区，它们与闵氏时空一样是静态的，但都只能覆盖闵氏时空的一部分. R 区和 L 区没有因果关系，可以看作互不连通的两个时

空. 闵氏时空无内禀奇点, 也无坐标奇点. Rindler 时空当然也没有内禀奇点, 但在 $x=0$ 有坐标奇点. 此处有

$$g_{00} = x^2 = 0, \tag{3.4.8}$$

可见这是无限红移面. 考虑到 Rindler 时空有 3 个 Killing 矢量$\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$, 零曲面方程具有形式

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{\partial f}{\partial x^\nu} &= \frac{1}{x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \\ &= \frac{1}{x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

(3.4.9)式两端乘以 x^2, 消去$\frac{\partial f}{\partial t}$项, 并注意$\frac{\partial f}{\partial x}\neq 0$, 我们得到具有 Rindler 时空对称性的零超曲面

$$x = 0. \tag{3.4.10}$$

可以证明, 此面即 Rindler 时空的事件视界.

图 12 是闵氏时空的 Penrose 图. 比较 Rindler 变换和施瓦西时空的克鲁斯卡变换, 以及二者的时空图和 Penrose 图, 可以发现, 闵氏时空对应于克鲁斯卡时空, Rindler 时空对应于施瓦西时空. 其 F 区和 P 区分别对应于施瓦西的黑洞和白洞.

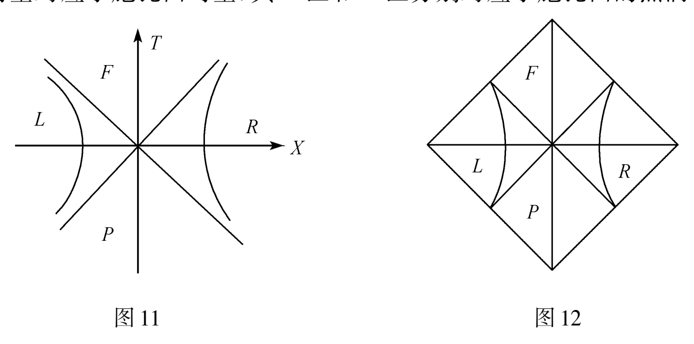


图 11　　　　图 12

Rindler 系中静止观测者的固有加速度具有形式

$$\begin{aligned} a &= -\sqrt{-g_{11}}\,\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\tau^2} \\ &= -\sqrt{-g_{11}}\,\Gamma^1_{00}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \\ &= -\sqrt{-g_{11}}\,\frac{\Gamma'_{00}}{g_{00}} = \frac{1}{x}. \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

此式表明, 静止于 x 点的观测者的固有加速度为一常数, 即观测者做匀加速运动.

加速度的方向沿 x 增加的方向，惯性力指向视界 $x=0$.

在视界（$x=0$），$a\to\infty$. 静止于施瓦西黑洞表面的观测者的固有加速度也等于无限大，这是事件视界的特点. 人们定义在视界上不发散的“表面引力”加速度：

$$\kappa \equiv \lim_{g_{00}\to 0}(a\sqrt{g_{00}}). \tag{3.4.12}$$

对于 Rindler 视界有

$$\kappa = \lim_{g_{00}\to 0}\left(\frac{1}{2}g_{00,1}\sqrt{-g_{11}/g_{00}}\right) = 1. \tag{3.4.13}$$

Rindler 坐标系是一个匀加速系. Rindler 时空是闵氏时空的一部分，是静态的，存在事件视界.

引入新的坐标变换

$$\begin{cases} t = a\eta, \\ x = \dfrac{1}{a}+\xi, \\ (y,z\ \text{不变}). \end{cases} \tag{3.4.14}$$

式中 (x,y,z,t) 为 Rindler 坐标，Rindler 变换成为

$$\begin{cases} T = \left(\dfrac{1}{a}+\xi\right)\mathrm{sh}(a\eta), \\ X = \left(\dfrac{1}{a}+\xi\right)\mathrm{ch}(a\eta); \end{cases} \quad R\ \text{区} \tag{3.4.15}$$

$$\begin{cases} T = -\left(\dfrac{1}{a}+\xi\right)\mathrm{sh}(a\eta), \\ X = -\left(\dfrac{1}{a}+\xi\right)\mathrm{ch}(a\eta); \end{cases} \quad L\ \text{区} \tag{3.4.16}$$

$$\begin{cases} T = \left(\dfrac{1}{a}+\xi\right)\mathrm{ch}(a\eta), \\ X = \left(\dfrac{1}{a}+\xi\right)\mathrm{sh}(a\eta); \end{cases} \quad F\ \text{区} \tag{3.4.17}$$

$$\begin{cases} T = -\left(\dfrac{1}{a}+\xi\right)\mathrm{ch}(a\eta), \\ X = -\left(\dfrac{1}{a}+\xi\right)\mathrm{sh}(a\eta); \end{cases} \quad P\ \text{区} \tag{3.4.18}$$

线元为

$$\mathrm{d}s^2 = \pm(1+a\xi)^2\mathrm{d}\eta^2 \mp \mathrm{d}\xi^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2. \tag{3.4.19}$$

上面的符号对应于 R 区和 L 区，下面的符号对应于 F 区和 P 区.

变换（3.4.15）～（3.4.18）式称为局部 Rindler 变换.

代替（3.4.14）式，引入另一坐标变换：

$$t = a\eta, \quad x = \frac{1}{a}e^{a\xi}, \quad (y, z \text{ 不变}) \tag{3.4.20}$$

则由 Rindler 变换得到

$$\begin{cases} T = a^{-1}e^{a\xi}\text{sh}(a\eta), \\ X = a^{-1}e^{a\xi}\text{ch}(a\eta); \end{cases} \quad R \text{ 区} \tag{3.4.21}$$

$$\begin{cases} T = -a^{-1}e^{a\xi}\text{sh}(a\eta), \\ X = -a^{-1}e^{a\xi}\text{ch}(a\eta); \end{cases} \quad L \text{ 区} \tag{3.4.22}$$

$$\begin{cases} T = a^{-1}e^{a\xi}\text{ch}(a\eta), \\ X = a^{-1}e^{a\xi}\text{sh}(a\eta); \end{cases} \quad F \text{ 区} \tag{3.4.23}$$

$$\begin{cases} T = -a^{-1}e^{a\xi}\text{ch}(a\eta), \\ X = -a^{-1}e^{a\xi}\text{sh}(a\eta); \end{cases} \quad P \text{ 区} \tag{3.4.24}$$

线元的表示式为

$$ds^2 = \pm e^{2a\xi}(d\eta^2 - d\xi^2) - dy^2 - dz^2. \tag{3.4.25}$$

式中 + 号对应于 R 区和 L 区，- 号对应于 F 区和 P 区. 这一时空的特点是事件视界移至坐标无限远($\xi \to -\infty$)处，这是乌龟坐标的特点. 由(3.4.19)式可得

$$\xi = \frac{1}{a}\ln(ax), \tag{3.4.26}$$

可见 ξ 确是 Rindler 时空中的乌龟坐标. 此坐标系中，静止观测者的固有加速度为 $ae^{-a\xi}$，视界面上表面引力加速度为 $\kappa = a$. 在原点($\xi = 0$)，加速度也等于 $\kappa = a$. 在原点附近，线元(3.4.25)趋近闵氏时空的线元.

闵氏时空的零坐标为

$$V = T + X, \quad U = T - X, \tag{3.4.27}$$

Rindler 时空的零坐标为

$$v = t + \ln x, \quad u = t - \ln x. \tag{3.4.28}$$

和施瓦西时空相似，在 R 区有

$$V = e^v, \quad U = -e^u. \tag{3.4.29}$$

在未来视界上，v 为群参量，V 为仿射参量；在过去世界上，u 为群参量，U 为仿射参量. $\kappa = 1$ 是群参量对仿射参量的偏离.

对于式(3.4.21)中的 Rindler 坐标，相应的零坐标为

$$\tilde{v} = \eta + \xi, \quad \tilde{u} = \eta - \xi. \tag{3.4.30}$$

在 F 区有

$$V = e^{a\tilde{v}}, \quad U = e^{-a\tilde{u}}. \tag{3.4.31}$$

在视界面上，$\kappa = a$ 也表示群参量对仿射参量的偏离.

3.5 稳态时空中的事件视界

超曲面方程可表示为

$$F(x^{\mu})=0 \quad (\mu=0,1,2,3), \tag{3.5.1}$$

其法矢量具有形式

$$n^{\mu}=F_{,\mu}. \tag{3.5.2}$$

零超曲面定义为

$$n^{\mu}n_{\mu}=0, \tag{3.5.3}$$

或

$$g^{\mu\nu}F_{,\mu}F_{,\nu}=0. \tag{3.5.4}$$

对于稳态时空,(3.5.4)具有形式:

$$g^{00}F_{,0}^{2}+2g^{03}F_{,03}+g^{11}F_{,1}^{2}+g^{22}F_{,2}^{2}+g^{33}F_{,3}^{2}=0. \tag{3.5.5}$$

设 $g^{00}\neq 0$,(3.5.5)式可写为

$$F_{,0}^{2}+(g^{00})^{-1}(2g^{03}F_{,03}+g^{11}F_{,1}^{2}+g^{22}F_{,2}^{2}+g^{33}F_{,3}^{2})=0. \tag{3.5.6}$$

稳态条件使 $F_{,0}=0$,(3.5.6)式化为

$$(g^{00})^{-1}(g^{11}F_{,1}^{2}+g^{22}F_{,2}^{2}+g^{33}F_{,3}^{2})=0. \tag{3.5.7}$$

此方程可分为两个方程:

$$(g^{00})^{-1}=0, \tag{3.5.8}$$

和

$$g^{11}F_{,1}^{2}+g^{22}F_{,2}^{2}+g^{33}F_{,3}^{2}=0. \tag{3.5.9}$$

(3.5.9)式的解和(3.5.8)式的解均满足(3.5.7)式.

(3.5.9)式就是通常稳定稳态视界的方程,而(3.5.8)式则常被忽略.这一忽略,用数学的语言表述就是解方程丢了根.

采用拖曳坐标时我们有

$$z_{,0}=-g_{03}/g_{33}. \tag{3.5.10}$$

线元可写为

$$\begin{aligned} ds^{2}&=g_{00}dx^{0^2}+2g_{03}dx^{0}dx^{3}+g_{11}dx^{1^2}+g_{22}dx^{2^2}+g_{33}dx^{3^2}\\ &=\hat{g}_{00}dx^{0^2}+g_{11}dx^{1^2}+g_{22}dx^{2^2}+g_{33}dx^{3^2}, \end{aligned} \tag{3.5.11}$$

式中

$$g_{\hat{0}\hat{0}} = g_{00} - \frac{g_{03}^2}{g_{33}}. \qquad (3.5.12)$$

容易证明

$$g_{\hat{0}\hat{0}} = (g^{00})^{-1}. \qquad (3.5.13)$$

这样，零曲面条件(3.5.8)可写成

$$g_{\hat{0}\hat{0}} = 0. \qquad (3.5.14)$$

在克尔黑洞的情况下，坐标为(t, r, θ, φ). 除了稳态条件$F_{,0}=0$以外，还有轴对称，即$F_{,3}=0$. 于是(3.5.9)式简化为

$$g^{11}F_{,1}^2 + g^{22}F_{,2}^2 = 0. \qquad (3.5.15)$$

不难看出，(3.5.14)和(3.5.15)式都化为同一个方程

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2mr = 0. \qquad (3.5.16)$$

在施瓦西场的情况下(静态球对称)，方程(3.5.7)化为两个简单的方程：

$$g_{00} = 0 \text{ 和 } g^{11} = 0,$$

这两个方程是同一个方程，解为

$$r = 2m.$$

对于 Rindler 时空，$g_{00} = -x^2, g_{11} = 1$. 可以发现，方程(3.5.9)无解，而方程(3.5.8)有解：

$$-x^2 = 0, \quad x = 0.$$

即视界位于$x=0$处. 这表明方程(3.5.7)分解成的两个方程(3.5.8)和(3.5.9)是不能随便丢掉一个的.

显然，不是所有的零超曲面都是事件视界. 稳态时空中的事件视界应是满足下述条件的零超曲面：① 曲面的母线线汇应该是零短程线汇；② 该线汇的切矢量场应该是零 Killing 矢量场；这里说的零矢量指 null(类光)矢量. 也就是说，作为 Killing 视界的超曲面才是事件视界.

3.6　黑洞的第四个参量

对于真空 Einstein 方程，唯一性定理告诉我们，由总质量 M 和角动量 J 这两

个参数所表征的 Kerr 度规是其最一般的稳态渐近平直黑洞解.唯一性定理使我们能够划分质量充分大的物体(例如质量超过 Chandrasekhar 极限的恒星)引力坍缩的最终状态.真空情况下,黑洞只具有两种“毛发”或者说“荷”,即质量和角动量.原来物质分布的许多特性都在引力坍缩中消失了.正比于其事件视界面积的黑洞的熵就是这样一种信息丢失的例子.在真空情况下,除零极矩(质量)和一极矩(角动量)外,原来质量分布的所有其他多极矩也都在引力坍缩中被辐射掉了.

如果考虑引力与一个 Abell 规范场(电磁场)的耦合,则黑洞可带有电荷和磁荷.耦合的 Maxwell-Einstein 方程有一个类似于真空情形的唯一性定理——存在一个由 Kerr-Newmann 度规所描述的唯一的 4 参数黑洞解族.当将 Abell 规范理论推广到非 Abell 情形时,目前并没有类似的结果存在.因为非线性的非 Abell 理论的结构毕竟要比线性的 Abell 情形丰富和复杂得多.除了质量、角动量和电(磁)荷之外,黑洞是否还能含有第四种参量呢?

正如 Bowick 指出的那样,目前仍不很清楚黑洞是否可携带非 Abell 荷(毛发),例如 QCD 色荷.为了研究这个问题,必须研究引力与 Yang-Mills 场和 Yang-Mills-Higgs 场的耦合,即耦合 EYM 系统和耦合 EYMH 系统.

引力与 SU(5)大统一理论的耦合由下述作用量描述:

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\Big[-\frac{R}{16\pi G}-\frac{1}{2}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}T_r(F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma})+g^{\mu\nu}T_r(D_\mu\phi D_\nu\phi)+g^{\mu\nu}(D_\mu H)^+(D_\nu H)-V(\phi,H)\Big],\tag{3.6.1}$$

其中,

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu-\mathrm{i}g'[A_\mu,A_\nu],$$

$$A_\mu=A_\mu^a\lambda^a,a=1,\cdots,24,$$

$$D_\mu\phi=\partial_\mu\phi-\mathrm{i}g'[A_\mu,\phi],$$

$$D_\mu H=\partial_\mu H-\mathrm{i}g'A_\mu H,$$

$$V(\phi,H)=a_1T_r\left[\left(\phi-\frac{1}{\sqrt{15}}\nu\right)^2\left(\phi+\frac{3\nu}{2\sqrt{15}}\right)^2\right]+a_2(2T_r\phi^2-\nu^2)^2+a_3(H^+H-\omega^2)^2+a_4H^+\left(\phi+\frac{3}{2\sqrt{15}}\nu\right)^2H,$$

$$a_i > 0,\quad \nu \sim 10^{14}\mathrm{GeV},\quad \omega \sim 10^2\mathrm{GeV},\quad g' = \left(\frac{8}{3}\right)^{1/2} e,$$

这里 g' 是 SU(5) 规范耦合常数，e 是正电子电荷. 群生成元 λ^α 满足 $T_r\lambda^a\lambda^b = \frac{1}{2}\delta^{ab}$, $\lambda^{+a} = \lambda^a$. Higgs 场 ϕ 和 H 分别是 SU(5) 的 24 维和 5 维表示. 它们的如下真空平均值将 SU(5) 破缺到 $SU(3)_c \times U(1)_{em}$：

$$\langle\phi\rangle = \nu\mathrm{diag}\left[\sqrt{\frac{1}{15}},\quad \sqrt{\frac{1}{15}},\quad \sqrt{\frac{1}{15}},\quad \frac{-3}{2\sqrt{15}},\quad \frac{-3}{2\sqrt{15}}\right],$$

$$\langle H\rangle = \mathrm{Col.}(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \omega).$$

与(3.6.1)式相应的能-动张量是

$$\begin{aligned} T^\mu_\nu = & -2g^{\mu\alpha}g^{\rho\beta}T_r(F_{\alpha\beta}F_{\nu\rho}) + \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta}T_r(F_{\rho\sigma}F_{\alpha\beta}) \\ & + 2g^{\mu\rho}T_r(D_\rho\phi D_\nu\phi) - \delta^\mu_\nu g^{\rho\sigma}T_r(D_\rho\phi D_\sigma\phi) \\ & + 2g^{\mu\rho}(D_\rho H)^+(D_\nu H) - \delta^\mu_\nu g^{\rho\sigma}(D_\rho H)^+(D_\sigma H) \\ & + \delta^\mu_\nu V(\phi,\ H). \end{aligned} \tag{3.6.2}$$

从(3.6.1)式可求出关于 A_μ, $g^{\mu\nu}$, ϕ, H 的运动方程如下：

$$\left\{\begin{aligned} & R^{\mu\nu} - 1/2g^{\mu\nu}R = \delta\pi GT^{\mu\nu}, \\ & (\sqrt{-g})^{-1}D_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F_{\rho\sigma}) = -\mathrm{i}g'g^{\mu\nu}[\phi,\ D_\nu\phi] \\ & -\mathrm{i}g'g^{\mu\nu}\lambda^a(H^+\lambda^a D_\nu H - (D_\nu H)^+\lambda^\alpha H), \\ & (\sqrt{-g})^{-1}D_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}D_\nu\phi) = -\frac{1}{2}\frac{\partial V(\phi,\ H)}{\partial\phi}, \\ & (\sqrt{-g})^{-1}D_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}D_\nu H) = -\frac{\partial V(\phi,\ H)}{\partial H^+}. \end{aligned}\right. \tag{3.6.3}$$

具有球对称性的最一般的静态度规可表示为

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^A,\ -\mathrm{e}^B,\ -r^2,\ -r^2\sin^2\theta).$$

这里 μ, $\nu = t, r, \theta, \varphi$, A 和 B 仅仅是 r 的函数. 为了求得球对称解，对 A_ν, ϕ, H, 假定

$$
\begin{cases}
H(r) = \dfrac{1}{g'}\mathrm{Col.}(0,0,0,0,h(r)), \\
\phi(r) = \dfrac{1}{g'}\mathrm{diag}(\phi_1(r),\phi_1(r),\phi_2(r) \\
\qquad + \phi_3(r)\hat{r}\cdot\tau, -2(\phi_1(r)+\phi_2(r))), \\
A_t(r) = \dfrac{1}{g'}\mathrm{diag}\Big[J_1(r),J_1(r),J_2(r)+\dfrac{1}{2}J_3(r)\hat{r}\cdot\tau \\
\qquad -2(J_1(r)+J_2(r))\Big], \\
A_i(r) = \dfrac{K(r)-1}{g'r}(\boldsymbol{T}\times\hat{\boldsymbol{r}})_i, \\
T = \dfrac{1}{2}\mathrm{diag}(0,0,\tau,0), \quad \hat{\boldsymbol{r}} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}.
\end{cases}
\tag{3.6.4}
$$

上述形式是球对称且拓扑稳定的. 这里球对称定义为 $\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{T}$ 的不变性($L = \mathrm{i}\boldsymbol{r}\times\nabla$).

利用上述假定, 耦合 EYMH 方程(3.6.3)简化为下面的径向方程:

$$
\begin{cases}
\mathrm{e}^{-B}(rB'-1)/r^2 + 1/r^2 = 8\pi G T^t_t, \\
-\mathrm{e}^{-B}(rA'+1)/r^2 + 1/r^2 = 8\pi G T^r_r, \\
-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-B}\Big[A'' + \dfrac{1}{2}A'^2 - \dfrac{1}{2}A'B' + (A-B)'/r\Big] = 8\pi G T^\theta_\theta = 8\pi G T^\varphi_\varphi, \\
(rJ_1)'' - \dfrac{1}{2}r(A+B)'J'_1 + \dfrac{2}{5}r\mathrm{e}^B(J_1+J_2)h^2 = 0, \\
(rJ_2)'' - \dfrac{1}{2}r(A+B)'J'_2 + \dfrac{2}{5}r\mathrm{e}^B(J_1+J_2)h^2 = 0, \\
(rJ_3)'' - \dfrac{1}{2}r(A+B)'J'_3 + \dfrac{2}{5}r\mathrm{e}^B(J_1+J_2)h^2 - 2\mathrm{e}^B J_3K^2/r = 0, \\
K'' + \dfrac{1}{2}(A-B)'K' - \mathrm{e}^B K(K^2 - 1 + 4r^2\phi_3^2 - \mathrm{e}^{-A}(rJ_3)^2)/r^2 = 0 \\
(r\phi_1)'' + \dfrac{1}{2}r(A-B)'\phi'_1 = -\dfrac{1}{2}g'^2 r\mathrm{e}^B\dfrac{\partial V}{\partial\phi_1}, \\
(r\phi_2)'' + \dfrac{1}{2}r(A-B)'\phi'_2 = -\dfrac{1}{2}g'^2 r\mathrm{e}^B\dfrac{\partial V}{\partial\phi_2}, \\
(r\phi_3)'' + \dfrac{1}{2}r(A-B)'\phi'_3 - 2\mathrm{e}^B K^2\phi_3/r^2 = -\dfrac{1}{2}g'^2 r\mathrm{e}^B\dfrac{\partial V}{\partial\phi_3}, \\
(rh)'' + \dfrac{1}{2}r(A-B)'h' + 4r\mathrm{e}^{B-A}(J_1+J_2)^2h = -rg'^2\mathrm{e}^B\dfrac{\partial V}{\partial h}.
\end{cases}
\tag{3.6.5}
$$

能–动张量则成为

$$
\left\{
\begin{aligned}
T_t^t &= \frac{1}{g'^2}\{e^{-A-B}[2J_1'^2 + 4(J'_1 + J'_2)^2 + 2J_2'^2 + J_3'^2/2] \\
&\quad + e^{-B}K'^2/r^2 + e^{-A}J_3^2K^2/r^2 \\
&\quad + (K^2 - 1)^2/2r^4 + e^{-B}[2\phi_1'^2 + 4(\phi'_1 + \phi'_2)^2 \\
&\quad + 2\phi_2'^2 + 2\phi_3'^2] + 4\phi_3^2K^2/r^2 \\
&\quad + 4e^{-A}(J_1 + J_2)^2h^2 + h'^2/r^2 + g'^2V(\phi, H)\}, \\
T_r^r &= \frac{1}{g'^2}\{e^{-A-B}[2J_1'^2 + 4(J'_1 + J'_2)^2 + 2J_2'^2 + J_3'^2/2] \\
&\quad - e^{-B}K'^2/r^2 + e^{-A}J_3^2K^2/r^2 + (K^2 - 1)^2/2r^4 \\
&\quad - e^{-B}[2\phi_1'^2 + 4(\phi'_1 + \phi'_2)^2 + 2\phi_2'^2 + 2\phi_3'^2] + 4\phi_3^2K^2/r^2 \\
&\quad - 4e^{-A}(J_1 + J_2)^2h^2 - h'^2/r^2 + g'^2V(\phi, H)\}, \\
T_\theta^\theta &= \frac{1}{g'^2}\{e^{-A-B}[2J_1'^2 + 4(J'_1 + J'_2)^2 + 2J_2'^2 + J_3'^2/2] \\
&\quad + e^{-B}[2\phi'^2 + 4(\phi'_1 + \phi'_2)^2 + 2\phi_2'^2 + 2\phi_3'^2] \\
&\quad - (K^2 - 1)^2/2r^4 - 4e^{-A}(J_1 + J_2)^2h^2 \\
&\quad + h'^2/r^2 + g'^2(V\phi, H)\} \\
&= T_\varphi^\varphi.
\end{aligned}
\right.
\tag{3.6.6}
$$

从方程组(3.6.5)的第一和第二两个方程，可以导出

$$
\begin{aligned}
\frac{e^{-B}}{r}(A + B)' &= 8\pi G(T_t^t - T_r^r) \\
&= \frac{16\pi G}{g'^2}[e^{-B}\{2(\phi'_1)^2 + 4(\phi'_1 + \phi'_2)^2 \\
&\quad + 2(\phi'_2)^2 + 2\phi_3'^2\} + e^{-A}J_3^2K^2/r^2 \\
&\quad + e^{-B}K'^2/r^2 + h'^2/r^2 + 4e^{-A}(J_1 + J_2)^2h^2] \\
&\geqslant 0.
\end{aligned}
\tag{3.6.7}
$$

我们将寻求运动方程的静态球对称解，故要求 $T_t^t = T_r^r$. 利用(3.6.7)式，有

$$
\left\{
\begin{aligned}
&A + B = C(\text{常数}), \quad \phi'_i = 0, \quad i = 1,2,3, \\
&h' = 0, \quad K' = 0, \quad J_3K = 0, \quad (J_1 + J_2)h = 0.
\end{aligned}
\right.
\tag{3.6.8}
$$

在下面的讨论中，将令常数 C 等于零. 这样得到的度规是渐近平直的. 利用(3.6.8)式及无穷远处 Higgs 场趋于其真空平均值这一边界条件和 J_i, K 所满足的运动方程，得到

$$
\phi_1 = \sqrt{\frac{1}{15}}\nu g', \quad \phi_2 = -\frac{1}{4\sqrt{15}}\nu g', \quad \phi_3 = \frac{5}{4\sqrt{15}}\nu g',
$$

$$h=\omega g', \quad J_1+J_2=0, \quad K=0.$$

$$J_i=\begin{cases}0,\\ b_i/r+c_i, \quad 且\ b_1=-b_2, \quad c_1=-c_2.\end{cases} \tag{3.6.9}$$

这里 b_i, c_i 是积分常数. 注意 $J_i=0$ 的情形对应磁单极解, 而 $J_i\neq 0$ 的情形则与所谓双荷解相对应. 把以上结果代入(3.6.2)式便有

$$T_t^{\,t}=T_r^{\,r}=-T_\theta^{\,\theta}=-T_\varphi^{\,\varphi}=\frac{1+4b_1^2+4b_2^2+b_3^2}{2g'^2r^4}. \tag{3.6.10}$$

求解关于 A, B 的方程, 可得

$$e^A=e^{-B}=1-2GM/r+\frac{4\pi G(1+4b_1^2+4b_2^2+b_3^2)}{g'^2r^2}. \tag{3.6.11}$$

这里 M 是积分常数, 它代表本书所求得解的质量.

由于这里所得度规是渐近平直的, 因而, 可利用相应场在无穷远处球面上的积分来求场方程解所具有的电荷、磁荷和色荷. 电磁场强度可以定义为

$$F'_{\mu\nu}\equiv\frac{2}{g'}T_r(F_{\mu\nu}(r)Q(r)). \tag{3.6.12}$$

这里电荷算子 $Q(r)\underset{r\to 0}{\sim}\to e\,\mathrm{diag}(-1/3,-1/3,1/3-2\hat{r}/3\cdot\tau,0)$. 而通常的电场强度 $E(r)$ 和磁场强度 $B(r)$ 由下式给出:

$$E_i(\boldsymbol{r})\equiv F'_{0i}(r)=\frac{2}{g'}T_r(F_{0i}(\boldsymbol{r})Q(\boldsymbol{r})),$$

$$B_i(\boldsymbol{r})\equiv\frac{1}{g'}T_r(\varepsilon_{ijk}F_{jk}(\boldsymbol{r})Q(\boldsymbol{r})). \tag{3.6.13}$$

从(3.6.4)和(3.6.9)式, 可以求得

$$\begin{cases}F_{ij}(\boldsymbol{r})=-\dfrac{2}{g'r^2}T_a(\varepsilon_{jab}\hat{r}_b\hat{\boldsymbol{r}}_i-\varepsilon_{iab}\hat{r}_b r_j-\varepsilon_{ija})\\ \qquad\qquad -\dfrac{1}{g'r^2}\varepsilon_{ijb}\hat{r}_b\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{T},\\ F_{0i}(\boldsymbol{r})=\dfrac{\hat{r}_i}{g'r^2}\mathrm{diag}\left(b_1,b_1,b_2+\dfrac{b_3}{2}\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\tau,0\right).\end{cases} \tag{3.6.14}$$

这样

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\underset{r\to\infty}{\sim}\frac{\hat{r}}{2er^2}, \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\underset{r\to\infty}{\sim}\frac{-b_1+b_2-b_3}{2e}\cdot\frac{\hat{r}}{r^2}. \tag{3.6.15}$$

而对 $SU(3)_c$. 色电场 $\boldsymbol{E}^a(\boldsymbol{r})$ 和色磁场 $\boldsymbol{B}^a(\boldsymbol{r})$, 有

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_i^a(\boldsymbol{r}) \equiv 2T_r(\boldsymbol{F}_{0i}(\boldsymbol{r})\lambda^a(\boldsymbol{r})) \underset{r\to\infty}{\sim} \dfrac{4\pi(4b_1 - b_3)}{\sqrt{8}e} \dfrac{\hat{r}}{4\pi r^2}\delta^{a8}, \\ \lambda^a \text{ 是 Gell-Mann 矩阵}, a = 1, \cdots, 8, \\ \boldsymbol{B}_i^a(\boldsymbol{r}) \equiv T_r(\varepsilon_{ijk}F_{ij}(\boldsymbol{r})\lambda^a(\boldsymbol{r})) \underset{r\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{3}} \dfrac{\hat{r}}{g' r^2}\delta^{a8}. \end{cases} \tag{3.6.16}$$

从上述结果可以看出，场方程解所具有的电荷 Q、磁荷 P 和 QCD 色荷 C^a 分别是

$$Q = \frac{4\pi(-b_1 + b_2 - b_3)}{2e}, \quad P = \frac{4\pi}{2e},$$

$$C^a = \frac{4\pi(4b_1 - b_3)}{\sqrt{8}e}\delta^{a8}. \tag{3.6.17}$$

因此，所得度规便可表为

$$\begin{aligned} dS^2 = &\left[1 - 2GM/r + \frac{3G}{8\pi r^2}\left[P^2 + \frac{2}{3}(Q^2 + (C^8)^2)\right]\right]dt^2 \\ &- \left[1 - 2GM/r + \frac{3G}{8\pi r^2}\left[P^2 + \frac{2}{3}(Q^2 + C^8)^2\right]\right]^{-1}dr^2 \\ &- r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \end{aligned} \tag{3.6.18}$$

从度规表达式(3.6.18)容易证明，存在如下事件视界：

$$r_H = GM \pm \sqrt{(GM)^2 - \frac{3G}{8\pi}\left[P^2 + \frac{2}{3}(Q^2 + (C^8)^2)\right]}. \tag{3.6.19}$$

因此，如果

$$\frac{3G}{8\pi}\left[P^2 + \frac{2}{3}(Q^2 + (C^8)^2)\right] \leqslant (GM)^2, \tag{3.6.20}$$

则我们所得的解就代表一个黑洞，它除了带有通常的电荷和磁荷外，还带有 $SU(3)_c$ 色荷.

下面我们给出耦合 EYMH 方程组(3.6.3)的一个稳态轴对称解. 对于稳态轴对称情形，时空度规可表为如下形式：

$$dS^2 = Xdt^2 - Ydr^2 - Zd\theta^2 - Vd\varphi^2 - 2Wdtd\varphi. \tag{3.6.21}$$

这里 X, Y, Z, V, W, 只是 r,θ 的函数. 为了寻求场方程的稳态轴对称解，将球对称的 Dokos Tomaras 假定推广为如下的轴对称形式：

$$A_0(r,\theta) = \frac{1}{g'\Sigma}\text{diag}\left[B_1, B_1, B_2 + \frac{\hat{r}\cdot\tau}{2}B_3, -2(B_1 + B_2)\right],$$

$$A_r = 0, \quad A_\theta(r,\theta) = \frac{C}{g'\Sigma}(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R})_\theta,$$

$$A_\varphi(r,\theta) = \frac{D}{g'\Sigma}(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R})_\varphi,$$

$$\phi(r,\theta) = \frac{1}{g'\Sigma}\text{diag}(F_1, F_1, F_2 + F_3\hat{r}\cdot\tau, -2(F_1 + F_2)),$$

$$H(r,\theta)=\frac{1}{g'}\mathrm{Col.}(0,0,0,0,/(r,\theta)),\tag{3.6.22}$$

其中,

$$T=1/2\,\mathrm{diag}(0,0,\tau,0),\quad \hat{r}=\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}},$$

$$R=\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_x+\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_y+E(r,\theta)\cos\theta\boldsymbol{e}_z,$$

$$\Sigma=r+a^2\cos^2\theta.$$

B_i, C, D, E, F_i, I 均是 r,θ 的函数. 显然, 当转动参数 $a=0$ 时, (3.6.22)式应回到(3.6.4)式, 故应有

$$\begin{cases} B_i/\Sigma=J_i(r), \quad \Sigma^{-1}C=(K(r)-1)r^{-1}, \\ D/\Sigma=(K(r)-1)/r, \quad a=0. \\ E=1, \quad F_i/\Sigma=\phi_i(r), \quad I=h(r). \end{cases}\tag{3.6.23}$$

对于 $a\neq0$, 即轴对称情形, 将(3.6.21)和(3.6.22)式代入耦合 EYMH 方程组(3.6.3), 我们很幸运地找到了场方程的一个严格解:

$$\begin{cases} B_1=b_1r=-B_2=b_2r, \quad B_3=b_3r-a\cos\theta, \\ C=-\dfrac{\Sigma}{r}\cdot\dfrac{1}{\sin^2\theta+E\cos^2\theta}, \\ D=-(r+b_3a\cos\theta), \quad E=\dfrac{r^2+a^2-b_3ra\sin\theta\tan\theta}{r^2+b_3ra\cos\theta}, \\ F_1=\sqrt{\dfrac{1}{15}}\nu g'\Sigma, \quad F_2=-\dfrac{1}{4\sqrt{15}}\nu g'\Sigma, \\ F_3=\dfrac{5}{4\sqrt{15}}\nu g'\Sigma, \quad I=\omega g', \end{cases}\tag{3.6.24}$$

及

$$\begin{cases} X=1-\dfrac{G}{\Sigma}\left(2Mr-\dfrac{3}{8\pi}\left\{P^2+\dfrac{2}{3}[Q^2+(C^8)^2]\right\}\right), \\ Y=\Sigma/\Delta, \quad Z=\Sigma, \\ V=\left[r^2+a^2+\dfrac{G}{\Sigma}\left(2Mr-\dfrac{3}{8\pi}\right.\right. \\ \qquad \left.\left.\times\left\{P^2+\dfrac{2}{3}[Q^2+(C^8)^2]\right\}\right)a\sin^2\theta\right]\sin^2\theta, \\ W=-\dfrac{G}{\Sigma}\left(2Mr-\dfrac{3}{8\pi}\left\{P^2+\dfrac{2}{3}[Q^2+(C^8)^2]\right\}\right)a\sin^2\theta, \\ \Delta=r^2+a^2-G\left(2Mr-\dfrac{3}{8\pi}\left\{P^2+\dfrac{2}{3}[Q^2+(C^8)^2]\right\}\right), \end{cases}\tag{3.6.25}$$

其中，b_i 是积分常数，P，Q，C^8 的值由(3.6.17)式给出. 可以看出，M 代表质量，a 代表单位质量的角动量. 至于 P，Q，C^8，利用与上节同样的分析方法，即可得出它们分别代表磁荷、电荷和 $\mathrm{SU}(3)_c$ 色荷.

从度规表达式(3.6.25)，可以证明存在如下事件视界：

$$r_H^{\pm} = GM \pm \left[(GM)^2 - a^2 - \frac{3G}{8\pi}\left\{ P^2 + \frac{2}{3}[Q^2 + (C^8)^2] \right\} \right]^{1/2}. \quad (3.6.26)$$

因此，若

$$a^2 + \frac{3G}{8\pi}\left\{ P^2 + \frac{2}{3}[Q^2 + (C^8)^2] \right\} \leqslant (GM)^2, \quad (3.6.27)$$

则本节所给出的解就代表一个具有电荷、磁荷及 $\mathrm{SU}(3)_c$ 色荷的旋转黑洞. 进一步，在条件(3.6.27)下，可求出黑洞的无限红移面为

$$r_{\pm}^{\infty} = GM \pm \left[(GM)^2 - a^2\cos^2\theta - \frac{3G}{8\pi}\left\{ P^2 + \frac{2}{3}[Q^2 + (C^8)^2] \right\} \right]^{1/2}. \quad (3.6.28)$$

注意　利用度规表达式(3.6.21)，(3.6.24)和(3.6.25)，可计算出 Einstein 张量 $E^{\mu}_{\nu} \equiv R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}R$ 的非零分量为

$$\begin{aligned}
E^t_t = &\frac{1}{4Y\rho}\Big[2X\partial_r^2 V + \partial_r V\partial_r X + 2W\partial_r^2 W + (\partial_r W)^2 \\
&- (X\partial_r V + W\partial_r W)\partial_r\Big(\ln\frac{\rho Y}{Z} \Big) \Big] \\
&+ \frac{1}{4Z\rho}\Big[2X\partial_\theta^2 V + \partial_\theta V\partial_\theta X + 2W\partial_\theta^2 W + (\partial_\theta W)^2 \\
&- (X\partial_\theta V + W\partial_\theta W)\partial_\theta\Big(\ln\frac{\rho z}{Y} \Big) \Big] \\
&+ \frac{1}{4YZ}[2\partial_r^2 Z + 2\partial_\theta^2 Y - \partial_r Z\partial_r(\ln YZ) - \partial_\theta Y\partial_\theta(\ln YZ)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E^t_\varphi = &-\frac{1}{4Y\rho}\Big[2\partial_r(W\partial_r V - V\partial_r W) \\
&- (W\partial_r V - V\partial_r W)\partial_r\Big(\ln\frac{\rho Y}{Z} \Big) \Big] \\
&- \frac{1}{4Z\rho}\Big[2\partial_\theta(W\partial_\theta V - V\partial_\theta W) \\
&- (W\partial_\theta V - V\partial_\theta W)\partial_\theta\Big(\ln\frac{\rho Z}{Y} \Big) \Big],
\end{aligned}$$

$$E^r_r = \frac{1}{4Y\rho}[\partial_r\rho\partial_r(\ln Z) + \partial_r Z\partial_r V + (\partial_r W)^2]$$

$$+\frac{1}{4Z\rho}[2\partial_\theta^2\rho-\partial_\theta\rho\partial_\theta(\ln\rho Z)-\partial_\theta X\partial_\theta V-(\partial_\theta W)^2],$$

$$E_\theta^r=-\frac{1}{4Y\rho}[2\partial_r\partial_\theta\rho-\partial_r\rho\partial_\theta(\ln\rho Y)-\partial_r(\ln Z)\partial_\theta\rho$$
$$-(\partial_r X\partial_\theta V+\partial_\theta X\partial_r V+2\partial_r W\partial_\theta W)],$$

$$E_\theta^\theta=\frac{1}{4Y\rho}[2\partial_r^2\rho-\partial_r\rho\partial_r(\ln\rho Y)-\partial_r X\partial_r V-(\partial_r W)^2]$$
$$+\frac{1}{4Z\rho}[\partial_\theta\rho\partial_\theta(\ln Y)+\partial_\theta X\partial_\theta V+(\partial_\theta W)^2],$$

$$E_\varphi^\varphi=\frac{1}{4Y\rho}[2V\partial_r^2X+\partial_r X\partial_r V+2W\partial_r^2W+(\partial_r W)^2$$
$$-(V\partial_r X+W\partial_r W)\partial_r\left(\ln\frac{\rho Y}{Z}\right)]$$
$$+\frac{1}{4Z\rho}\left[2V\partial_\theta^2X+\partial_\theta X\partial_\theta V+2W\partial_\theta^2W+(\partial_\theta W)^2\right.$$
$$\left.-(V\partial_\theta X+W\partial_\theta W)\partial_\theta\left(\ln\frac{\rho Z}{Y}\right)\right]+\frac{1}{4YZ}[2\partial_r^2Z+2\partial_\theta^2Y$$
$$-\partial_r Z\partial_r(\ln YZ)-\partial_\theta Y\partial_\theta\ln(YZ)],$$

这里 $\rho=XV+W^2$，$\sqrt{-g}=(\rho YZ)^{1/2}$. 从(3.6.22)和(3.6.24)式，经过冗长的计算，有

$$F_{tr}=\frac{1}{g'\Sigma^2}\mathrm{diag}(\Gamma_1,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2+\Gamma_3\,\hat{r}\cdot\ \tau/2,\ -2(\Gamma_1+\Gamma_2)),$$

$$F_{t\theta}=\frac{a\sin\theta}{g'\Sigma^2}\mathrm{diag}(\Lambda_1,\ \Lambda_1,\ \Lambda_2+\Lambda_3\,\hat{r}\cdot\ \tau/2,\ 0),\qquad F_{t\varphi}=0,$$

$$F_{\theta\varphi}=\frac{1}{g'\Sigma^2}\mathrm{diag}(0,\ 0,\ \Lambda_3(r^2+a^2)\sin\theta\,\hat{r}\cdot\ \tau/2,\ 0),$$

$$F_{\varphi r}=\frac{1}{g'\Sigma^2}\mathrm{daig}(0,0,\ -\Gamma_3 a\sin^2\theta\,\hat{r}\cdot\ \tau/2,\ 0),\qquad F_{r\theta}=0,$$

$$D_\mu\phi=0,\quad \mu=t,r,\theta,\ \varphi,\quad D_\mu H=0,\quad \mu=t,r,\theta,\ \varphi.$$

(在推导 $D_\mu H=0$ 时，利用了关系 $B_1=-B_2$，)其中

$$\Gamma_1=b_1(r^2-a^2\cos^2\theta),\qquad \Gamma_2=b_2(r^2-a^2\cos^2\theta),$$
$$\Gamma_3=-2ra\cos\theta+b_3(r^2-a^2\cos^2\theta)$$
$$(B_1=-B_2\Rightarrow b_1=-b_2\Rightarrow\Gamma_1+\Gamma_2=0);$$
$$\Lambda_1=-2b_1ra\cos\theta,\qquad \Lambda_2=-2b_2ra\cos\theta,$$
$$\Lambda_3=-2b_3ra\cos\theta-(r^2-a^2\cos^2\theta)$$
$$(B_1=-B_2\Rightarrow b_1=-b_2\Rightarrow\Lambda_1+\Lambda_2=0).$$

为了得到能-动张量的明显表达式，将用到逆变度规张量 $g^{\mu\nu}$. 按照(3.6.21)式，

它们可写为

$$g^{tt}=\frac{V}{\rho},\quad g^{rr}=-\frac{1}{Y},\quad g^{\theta\theta}=-\frac{1}{Z},$$

$$g^{\varphi\varphi}=\frac{X}{\rho},\quad g^{t\varphi}=-\frac{W}{\rho},\quad \rho=XV+W^2.$$

将上述式子代入(3.6.2)式，可求得能-动张量的非零分量为

$$\begin{aligned}
T_t^t&=\frac{3}{64\pi^2}\left[P^2+\frac{2}{3}(Q^2+(C^8)^2)\right]\\
&\quad\times\frac{1}{\Sigma^3}(r^2+a^2(1+\sin^2\theta))=-T_\varphi^\varphi,\\
T_\varphi^t&=-\frac{3}{32\pi^2}\left[P^2+\frac{2}{3}(Q^2+(C^8)^2)\right]\\
&\quad\times\frac{1}{\Sigma^3}(r^2+a^2)a\sin^2\theta,\\
T_t^\varphi&=\frac{3}{32\pi^2}\left[P^2+\frac{2}{3}(Q^2+(C^8)^2)\right]\cdot\frac{a}{\Sigma^3},\\
T_r^r&=\frac{3}{64\pi^2}\left[P^2+\frac{2}{3}(Q^2+(C^8)^2)\right]\cdot\frac{1}{\Sigma^3}\\
&=-T_\theta^\theta.
\end{aligned}$$

利用前面所给出的一系列结果，经验证(3.6.24)和(3.6.25)式的确是耦合EYMH方程组(3.6.3)的一个严格解.

第 4 章　经典黑洞热力学

1973 年 J. D. Bekenstein 指出, 可以在黑洞物理学中引入热力学概念——黑洞也具有温度和熵. 黑洞的熵是以它的面积表征的. 与此相联系, 我们首先讨论黑洞物理学中最重要的一个定理.

4. 1　经典黑洞的面积不减定理

经典施瓦西黑洞的面积唯一地决定于质量, 而经典施瓦西黑洞的质量不可能减少, 所以它的面积不减是不言而喻的. 一般黑洞没有这么简单, 面积不减这一结论是需要证明的.

面积不减定理的一般证明是霍金于 1972 年给出的.

Penrose 于 1968 年给出一定理, 其内容是:黑洞的视界以零短程线为其母线(generator);沿着逆时间方向母线可能在视界上的某一焦散点(caustic)离开视界而进入外部空间, 顺着时间方向母线一旦进入视界将不会再离开视界, 而且母线永不相交叉;母线通过视界上任一点(焦散点除外)有一条且仅有一条. 此定理的证明如下.

过视界上任一点都只有一条零短程线. 如果有两条零短程线在视界上一点处相交, 则过此点的局部光锥一定要与视界相交, 这显然是不可能的. 这表明, 视界以零短程线为母线, 且母线在视界上永不相交.

如果沿着顺时针方向, 母线在视界上一点离开视界, 则沿此母线上的点的逆时方向, 母线的切矢量就是该点过去局部光锥与视界的切矢量. 又沿这一母线的顺时方向, 母线只能在该点的未来局部光锥面上, 由于零短程线在该点的切矢量是唯一的, 故沿顺时针方向, 该点的母线就是未来局部光锥与视界的切线. 这就证明了, 一旦母线进入视界就将永不离开视界.

我们认为光波的波长足够短, 以致于在局部时空中可以把它看作平面波. 这样, 光的传播便遵守几何光学的基本定律.

定义波矢量

$$\kappa_{\mu}=\frac{\partial\theta}{\partial x^{\mu}},\ \theta\text{ 为等位相面,}$$

可以证明

$$\kappa_{\nu;\mu}\kappa^{\mu}=0. \tag{4.1.1}$$

实际上，我们有

$$\frac{D\kappa_\mu}{d\lambda}=\frac{d\kappa_\mu}{d\lambda}+\Gamma^{\nu}_{\mu\rho}\kappa_\nu U^\rho=\frac{\partial\kappa_\mu dx^\rho}{\partial x^\rho d\lambda}+\Gamma^{\nu}_{\mu\rho}\kappa_\nu U^\rho$$

$$=\left[\frac{\partial\kappa_\mu}{\partial x^\rho}+\Gamma^{\mu}_{\mu\rho}\kappa_\nu\right]U^\rho=\kappa_{\mu;\rho}U^\rho=0,\quad (U^\rho\sim\kappa^\rho).$$

矢势可以展开为

$$A_\mu=(a_\mu+\varepsilon b_\mu+\varepsilon^2c_\mu+\cdots)e^{i\theta(x,t)/\varepsilon},\tag{4.1.2}$$

其中

$$\theta=\kappa_\mu x^\mu,\quad \varepsilon\sim\frac{\lambda}{L},\quad \lambda\equiv\frac{\lambda}{2\pi},\quad \lambda\ll L,$$

L 即几何光学适用的空间线度. 由广义相对论真空麦克斯韦方程

$$F_{\mu\nu}=A_{\nu;\mu}-A_{\mu;\nu},$$

$$F^{\mu\nu}_{;\nu}=0,$$

$$A^{\mu}_{;\mu}=0,\tag{4.1.3}$$

可以导出

$$-A^{\mu\nu}_{;\nu}+R^{\mu}_{\nu}A^\nu=0.\tag{4.1.4}$$

实际上

$$F^{\mu\nu}_{;\nu}=g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}F_{\lambda\rho;\nu}=g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}(A_{\lambda;\rho}-A_{\rho;\lambda})_{;\nu}$$

$$=A^{\mu\nu}_{;\nu}-A^{\nu\mu}_{;\nu}=0.$$

而

$$A^{\nu\mu}_{;\nu}=g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}A_{\rho;\lambda\nu}=g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}(-R^{\alpha\cdots}_{\cdot\rho\lambda\nu}A_\alpha+A_{\rho;\nu\lambda})$$

$$=-R^{\alpha\nu\mu}_{\cdots\nu}A_\alpha+A^{\nu\mu}_{;\nu}=-R^{\alpha\nu\mu}_{\cdots\nu}A_\alpha.$$

此即(4.1.4)式.

由(4.1.2)式可以得到

$$A^{\mu}_{;\nu}=\left[(a^\mu+\varepsilon b^\mu+\cdots)_{;\nu}+\frac{i}{\varepsilon}\kappa_\nu(a^\mu+\varepsilon b^\mu+\cdots)\right]e^{i\theta/\varepsilon}$$

$$-A^{\mu\nu}_{;\nu}+R^{\mu}_{\nu}A^\nu=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\kappa^\nu\kappa_\nu(a^\mu+\varepsilon b^\mu+\cdots)\right.$$

$$-2\frac{i}{\varepsilon}\kappa^\nu(a^\mu+\varepsilon b^\mu+\cdots)_{;\nu}-\frac{i}{\varepsilon}\kappa^{\nu}_{;\nu}(a^\mu+\varepsilon b^\mu+\cdots)-(a^\mu$$

$$\left.+\varepsilon b^\mu+\cdots)^{;\nu}_{;\nu}+R^{\mu}_{\nu}(a^\nu+\varepsilon b^\nu+\cdots)\right]e^{i\theta/\varepsilon}$$

$$=0.$$

合并同阶项，令其为零，得到

$$\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right),\quad \kappa^\nu\kappa_\nu a^\mu = 0 \text{ 或 } \kappa_\nu\kappa^\nu = 0,$$

此式表明波矢量为零矢量：

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),\quad \kappa^\nu\kappa_\nu b^\mu - 2\mathrm{i}\left(\kappa^\nu a^\mu_{;\nu} + \frac{1}{2}\kappa^\nu_{;\nu}a^\mu\right) = 0.$$

于是得到矢量振幅的传播方程：

$$a^\mu_{;\nu}\kappa^\nu + \frac{1}{2}\kappa^\nu_{;\nu}a^\mu = 0. \tag{4.1.5}$$

对标量振幅的传播方程而言，先引入

$$a_\mu = af_\mu,$$

f_μ 是单位极化矢量且 $f_\mu \cdot f^\mu = 1$. 则

$$\begin{aligned} 2a\kappa^\mu a_{;\mu} &= \kappa^\mu a^2_{;\mu} = \kappa^\mu(a_\nu a^\nu)_{;\mu} = \kappa^\mu a_{\nu;\mu}a^\nu + \kappa^\mu a_\nu a^\nu_{;\mu} \\ &= 2\kappa^\mu a^\nu_{;\mu}a_\nu = -\kappa^\mu_{;\mu}a^\nu a_\nu = -a^2\kappa^\mu_{;\mu}, \end{aligned}$$

故得标量振幅的传播方程为

$$\kappa^\mu a_{;\mu} = -\frac{1}{2}a\kappa^\mu_{;\mu}. \tag{4.1.6}$$

我们可以把(4.1.6)式写成一个微分守恒定律

$$\kappa^\mu a^2_{;\mu} + a^2\kappa^\mu_{;\mu} = 0,\quad \text{即}(a^2\kappa^\mu)_{;\mu} = 0.$$

取如图 13 所示的光束超曲面，应用高斯定理，有

$$\begin{aligned} \int_\Sigma (a^2\kappa^\mu)_{;\mu}\mathrm{d}\Sigma &= \int_V (a^2\kappa^\mu)\mathrm{d}V_\mu \\ &= -\int_{V(1)}(a^2\kappa^\mu)\mathrm{d}V_\mu + \int_{V(2)}(a^2\kappa^\mu)\mathrm{d}V_\mu \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

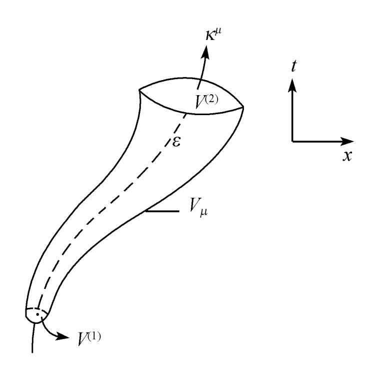


图 13

式中 Σ 是 4 维体积, V 是 3 维超曲面, 侧面与零短程线平行, 上下截面(端面)与零短程线垂直. 由此可以得到积分守恒量

$$\int (a^2 \kappa^{\mu}) \mathrm{d}V_{\mu} = \text{const.}.$$

它在光的传播过程中保持不变, 这自然解释为光通量.

对于一个无穷小光束而言, 设它在 t_0 时刻的截面或等位相面为 σ, 则上述积分守恒量可改写为

$$a^2 \sigma = 常数.$$

亦即

$$\frac{\mathrm{d}(a^2\sigma)}{\mathrm{d}\lambda} = (a^2\sigma)_{;\mu}\kappa^{\mu} = 0,$$

式中 λ 是沿某一零短程线的仿射参量. 利用(4.1.6)式即得在光束传播过程中, 光束截面积的变化规律

$$\kappa^{\mu}\sigma_{;\mu} = \kappa^{\mu}_{;\mu}\sigma. \tag{4.1.8}$$

最后, 我们由自由电磁场方程和 Einstein 引力场方程来推导一个重要的几何光学定理, 即光线束聚焦定理

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{1/2}}{\mathrm{d}\lambda^2} = -\left[\delta^2 + \frac{1}{2}R_{\mu\nu}\kappa^{\mu}\kappa^{\nu}\right]\sigma^{1/2}, \tag{4.1.9}$$

式中

$$\delta^2 \equiv \frac{1}{2}\kappa_{\mu;\nu}\kappa^{\nu;\mu} - \frac{1}{4}(\kappa^{\mu}_{;\mu})^2.$$

实际上我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\sigma^{1/2}}{\mathrm{d}\lambda} &= \kappa^{\mu}(\sigma^{1/2})_{;\mu} = \kappa^{\mu}\sigma_{;\mu}\frac{1}{2}\sigma^{-1/2} \\
&= (\kappa^{\mu}_{;\mu})\sigma \cdot \frac{1}{2}\sigma^{-1/2} = \frac{1}{2}(\kappa^{\mu}_{;\mu})\sigma^{1/2}, \\
\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{1/2}}{\mathrm{d}\lambda^2} &= \frac{1}{2}[(\kappa^{\mu}_{;\mu})\sigma^{1/2}]_{;\nu}\kappa^{\nu} \\
&= \frac{1}{2}[(\kappa^{\mu}_{;\mu})_{;\nu}\kappa^{\nu}\sigma^{1/2} + \kappa^{\mu}_{;\mu}(\sigma^{1/2})_{;\nu}\kappa^{\nu}] \\
&= \frac{1}{2}\left[(\kappa^{\mu}_{;\mu\nu})\kappa^{\nu} + \frac{1}{2}(\kappa^{\mu}_{;\mu})^2\right]\sigma^{1/2} \\
&= \frac{1}{2}\left[(\kappa^{\mu}_{;\nu\mu})\kappa^{\nu} - R^{\mu}_{\cdot\alpha\nu\mu}\kappa^{\alpha}\kappa^{\nu} + \frac{1}{2}(\kappa^{\mu}_{;\mu})^2\right]\sigma^{1/2}.
\end{aligned}$$

又由

$$\kappa^{\mu}_{;\nu}\kappa^{\nu} = 0$$

得

$$(\kappa^{\mu}_{;\nu}\kappa^{\nu})_{;\mu} = 0 = \kappa^{\mu}_{;\nu\mu}\kappa^{\nu} + \kappa^{\mu}_{;\nu}\kappa^{\nu}_{;\mu},$$

或

$$\kappa^{\mu}_{;\nu\mu}\kappa^{\nu} = -\kappa^{\mu}_{;\nu}\kappa^{\nu}_{;\mu},$$

以之代入上式即得(4.1.9)式.现引入能量正定条件

$$T_{00} \geqslant 0.$$

在(4.1.9)式中 $\delta^2 = \frac{1}{2}\kappa_{\mu;\nu}\kappa^{\nu;\mu} - \frac{1}{4}(\kappa^{\mu}_{;\mu})^2$ 是一个广义协变标量,引入局部惯性系后,可令 $\kappa_{\mu} = (\kappa_0, \kappa_3)$, $\kappa^{\mu} = (\kappa_0, -\kappa_3)$,

$$\delta^2 = \frac{1}{4}(\kappa_{0,0} - \kappa_{0,3})^2 \geqslant 0,$$

而

$$R_{\mu\nu}\kappa^{\mu}\kappa^{\nu} = \left(\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \kappa T_{\mu\nu}\right)\kappa^{\mu}\kappa^{\nu}$$

$$= \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\kappa^{\mu}\kappa^{\nu} + \kappa T_{\mu\nu}\kappa^{\mu}\kappa^{\nu} = \kappa T_{\mu\nu}\kappa^{\mu}\kappa^{\nu}.$$

上述不变量在局部随动惯性系中, $T_{03} = T_{30} = 0$.

$$\kappa T_{\mu\nu}\kappa^{\mu}\kappa^{\nu} = \kappa(T_{00}\kappa_0\kappa_0 + T_{33}\kappa_3\kappa_3) = \kappa(T_{00} + T_{33})\kappa_0^2.$$

考虑到 $T_{00} = \rho c^2$ 是能量密度, T_{33}是压强 p, 已知的物态均满足 $\rho c^2 \gg p$, 故仅需 T_{00}或能密度非负,即有

$$R_{\mu\nu}\kappa^{\mu}\kappa^{\nu} \geqslant 0 (\text{所谓零会聚条件}).$$

这就最后证明了

$$\frac{d^2\sigma^{1/2}}{d\lambda^2} \leqslant 0. \tag{4.1.10}$$

即光束截面增长率$\frac{d\sigma^{1/2}}{d\lambda}$沿光束传播方向永不增加.

下面我们证明霍金的面积不减定理:若宇宙监督原理成立,能量正定条件成立,则沿着时间方向,所有黑洞的总面积永不减少.

实际上,可以把视界上的母线分成无限多个无穷小线束,对于任一线束有(4.1.10)式,即

$$\frac{d^2\sigma^{1/2}}{d\lambda^2} \leqslant 0 \text{ 或} \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d\sigma^{1/2}}{d\lambda}\right) \leqslant 0.$$

设当 $\lambda = \lambda_0$ 时, $\left.\frac{d\sigma^{1/2}}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} < 0$, 在此点 $\sigma^{1/2}(\lambda)$曲线单调下降,则当 $\lambda_1 > \lambda_0$ 时,应有

$$\left.\frac{d\sigma^{1/2}}{d\lambda}\right|_{\lambda_1 > \lambda_0} \leqslant \left.\frac{d\sigma^{1/2}}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0}.$$

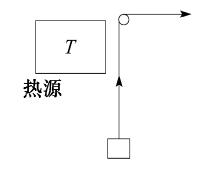
所以在 λ_1 点,曲线仍然单调下降.又因为

$$\frac{d^2\sigma^{1/2}}{d\lambda^2} \leqslant 0,$$

所以曲线还是凸的，肯定要与 λ 轴相交. 这就是说，经过有限长时间[对应于$(\lambda-\lambda_0)$]，使得 $\sigma^{1/2}=0$，在视界上同一线束中的诸多条母线互相交叉，这违背 Penrose 定理. 因此，要么是由于我们的假设$\frac{d\sigma^{1/2}}{d\lambda}<0$ 不合理；要么线束中的母线在交叉之前已落入奇点，这导致奇点裸露，不符合宇宙监督原理. 既然前提是遵守宇宙监督原理和 Penrose 定理的，就只能是$\frac{d\sigma^{1/2}}{d\lambda}\geqslant 0$. 即任一母线束的截面积在顺时针方向不减少，故整个视界面积(线束截面面积之和)永不减少，于是证明了黑洞视界面积不减定理.

4.2　经典黑洞的温度和熵

考虑一个由热源、冷源和工作物质组成的热机(Geroch 引力热机)，如图 14 所示.



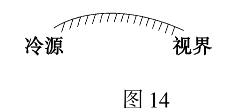


图 14

冷源：克尔-纽曼黑洞.

热源：距黑洞无限远处一个含有(温度为 T 的)黑体辐射的大热库.

工作物质：盒子和缆绳.

循环过程：盒子由热源处装满热辐射，缓慢地移到黑洞视界附近，这一过程系统(引力)对外做功 A_1；打开盒子，将质量为 $\delta\mu$ 的辐射注入黑洞；盒子关上，缓慢地升至热库处，这一过程外界对系统做功 A_2.

在一个循环过程中，系统对外界做功(A_1-A_2). 从热源吸出热量 $Q=\delta\mu$. 此热机的效率为

$$\eta=\frac{A_1-A_2}{Q}=\frac{A_1-A_2}{\delta\mu}. \tag{4.2.1}$$

设盒子(静止的)中心与黑洞视界的固有距离为 d，我们下面将证明，这时盒子和黑洞的结合能为

$$B=\mu(1-\kappa d). \tag{4.2.2}$$

式中 μ 为盒子在渐近平直空间的质量，κ 是黑洞表面的引力加速度，d 远小于黑洞半径. 我们有

$$A_1=B=\mu(1-\kappa d),$$

$$A_2=(\mu-\delta\mu)(1-\kappa d),$$

$$A_1-A_2=\delta\mu(1-\kappa d),$$

于是(4.2.1)给出效率

$$\eta = 1 - \kappa d. \tag{4.2.3}$$

下面证明(4.2.2)式.

有电磁场存在时, 质点的哈密顿主函数

$$S = \int L \mathrm{d}\tau$$

满足哈密顿–雅可比方程

$$g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial S}{\partial x^{\mu}} - eA_{\mu}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x^{\nu}} - eA_{\nu}\right) + \mu^2 = 0. \tag{4.2.4}$$

式中 e 和 μ 分别为荷电质点的电荷和静质量, A_μ 为电磁 4 矢, τ 为固有时. L 可写为

$$L = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial S}{\partial x^{\mu}}\dot{x}^{\mu}. \tag{4.2.5}$$

于是广义动量可写为

$$P_{\mu} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}} = \frac{\partial S}{\partial x^{\mu}}. \tag{4.2.6}$$

克尔–纽曼时空有两个 Killing 矢量: $\frac{\partial}{\partial t}$和$\frac{\partial}{\partial \varphi}$. 广义动量的 4 个分量可表为

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}R(r), \\ P_\theta &= \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}H(\theta), \\ P_\varphi &= \frac{\partial S}{\partial \varphi} = m, \\ P_t &= \frac{\partial S}{\partial t} = -\omega, \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

式中 $R(r)$ 和 $H(\theta)$ 分别表示分离变量后的径向函数和横向函数, m 为磁量子数, ω 为质点能量. 分离变量后, 径向方程和横向方程具有形式

$$\Delta\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)^2 - \frac{1}{\Delta}\left[-\omega(r^2 + a^2) + Ma + Qer\right]^2 + \mu^2 r^2 = -K, \tag{4.2.8}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \left(\frac{M}{\sin\theta} - a\omega\sin\theta\right)^2 + \mu^2 a^2 \cos^2\theta = K. \tag{4.2.9}$$

式中 M, Q 和 a 分别为黑洞的质量, 电荷和比角动量, K 为分离变量常数.

$$\Delta = (r - r_+)(r - r_-) = r^2 + a^2 + Q^2 - 2Mr, \tag{4.2.10}$$

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}. \tag{4.2.11}$$

把(4.2.7)式代入(4.2.8)式, 得到

$$[\omega(r^2+a^2)-(aP_\varphi+Qer)]^2=(P_r\Delta)^2+(\mu^2r^2+K)\Delta. \tag{4.2.12}$$

解此方程，得到

$$\omega=(\Omega P_\varphi+eV_0)\pm\frac{1}{r^2+a^2}[(P_r\Delta)^2+(\mu^2r^2+K)\Delta]^{1/2}. \tag{4.2.13}$$

式中，

$$\Omega=\frac{a}{r^2+a^2},\quad V_0=\frac{Qr}{r^2+a^2}. \tag{4.2.14}$$

对于无限远处的观测者，相对克尔－纽曼黑洞视界面静止的质点满足

$$r=\text{const.},\quad \theta=\text{const.},\quad \varphi=-\frac{g_{03}}{g_{33}},$$

$$P_r=P_\theta=0,$$

$$P_\varphi=\mu U_3=\mu g_{3\alpha}U^\alpha=\mu\left(g_{03}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}+g_{33}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)=0. \tag{4.2.15}$$

由此可知

$$m=0, \tag{4.2.16}$$

即在拖曳系中观测，质点不转动.考虑不带电质点的正能态，(4.2.13)式可简化为

$$\omega=\frac{1}{r^2+a^2}[(\mu^2r^2+K)\Delta]^{1/2}. \tag{4.2.17}$$

设 δ 很小，且有

$$r=r_++\delta, \tag{4.2.18}$$

则

$$r^2+a^2\approx(r_+^2+a^2)\left(1+\frac{2r_+\delta}{r_+^2+a^2}\right),$$

$$\mu^2r^2+K\approx(\mu^2r^2+K)\left(1+\frac{2r_+\delta\mu^2}{\mu^2r_+^2+K}\right),$$

$$\Delta\approx2\delta(r_+-M). \tag{4.2.19}$$

将(4.2.19)式代入(4.2.17)式，略去高阶小量，得到

$$\omega\approx\frac{(\mu^2r_+^2+K)^{1/2}}{r_+^2+a^2}[2\delta(r_+-M)]^{1/2}. \tag{4.2.20}$$

式中 δ 为坐标距离，应该用固有距离表之.固有距离(纯空间距离)具有形式

$$\mathrm{d}l^2=\gamma_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j=g_{11}\mathrm{d}r^2+\left(g_{33}-\frac{g_{03}^2}{g_{00}}\right)\mathrm{d}\varphi^2. \tag{4.2.21}$$

将克尔-纽曼度规代入上式，并注意 $\Delta\sim\delta\to0$，得到

$$\mathrm{d}l\approx\frac{\rho}{\Delta^{1/2}}\mathrm{d}r. \tag{4.2.22}$$

与δ对应的固有距离是

$$d = \int_{r_+}^{r_++\delta} \frac{\rho}{\Delta^{1/2}}\mathrm{d}r \approx \left[\frac{r_+^2 + a^2\cos^2\theta}{r_+ - r_-}\right]^{1/2} \int_{r_+}^{r_++\delta} (r - r_+)\,\mathrm{d}r. \qquad (4.2.23)$$

注意我们用了δ很小这一近似条件，下面不再写近似于的符号，

$$d = 2\delta^{1/2}\left[\frac{r_+^2 - a^2\cos^2\theta}{r_+ - r_-}\right]^{1/2}, \qquad (4.2.24)$$

$$\delta = \frac{d^2(r_+ - r_-)}{4(r_+^2 + a^2\cos^2\theta)}. \qquad (4.2.25)$$

代入(4.2.20)式，得到

$$\omega = \kappa d\left[\frac{\mu^2 r_+^2 + K}{r_+^2 + a^2\cos^2\theta}\right]^{1/2}, \qquad (4.2.26)$$

式中，

$$\kappa = \frac{r_+ - r_-}{2(r_+^2 + a^2)} \qquad (4.2.27)$$

为视界表面的引力加速度.

由(4.2.15)~(4.2.16)和(4.2.9)式可得

$$K = \omega^2 a^2 \sin^2\theta + \mu^2 a^2 \cos^2\theta, \qquad (4.2.28)$$

代入(4.2.26)式，得到

$$\omega = d\kappa\left[\mu^2 + \frac{\omega^2 a^2 \sin^2\theta}{r_+^2 + a^2\cos^2\theta}\right]^{1/2}. \qquad (4.2.29)$$

由(4.2.26)式知ω和d是同阶小量，故右端括号中第二项与第一项比较可略去，于是有

$$\omega = \mu\kappa d. \qquad (4.2.30)$$

此即视界面附近一质点具有的引力势能(无限远处观测). 此质点若静止于无限远处，其能量为μ，因此，当此质点静止于视界面附近时，其引力结合能为

$$B = \mu - \omega = \mu(1 - \kappa d).$$

此即(4.2.2)式.

下面我们继续讨论 Geroch 引力热机的效率(4.2.3)式. 当$d\to 0$，则$\eta\to 1$. Geroch (1971)由此指出第二类永动机的可能性. 但是 Bekenstein (1973) 指出，量子力学原理不允许$b=0$，给出了盒子大小的下限，因此效率仍然小于1.

假设盒子是边长为a的正方体，盒内充满温度为T的热辐射. 显然热辐射的最大波长为

$$\lambda_{\max} = l,$$

或

$$\nu_{\min} = c/l.$$

根据维恩位移定律,

$$\nu_m^w = 2.822kT/h.$$

式中 k 为玻尔兹曼常数. 我们有

$$\nu_{\min} < \nu_m^w,$$

即

$$\frac{1}{2} > \frac{\beta}{T}, \quad \beta = \frac{2\pi\hbar c}{2 \times 2.822k} \approx \frac{\hbar c}{k}.$$

于是有

$$d > \frac{l}{2} > \frac{\beta}{T}.$$

代入(4.2.3)式, 得到

$$\eta < 1 - \frac{\beta\kappa}{T}. \tag{4.2.31}$$

另一方面, 由卡诺定理知道

$$\eta < 1 - \frac{T_B}{T}. \tag{4.2.32}$$

式中 T_B 为黑洞(冷源)的温度. 人们发现, (4.2.31)和(4.2.32)式惊人地相似, 黑洞具有温度

$$T_B = \beta\kappa, \tag{4.2.33}$$

$$T_B = \beta\kappa/c^2 = \hbar\kappa/ck. \text{ (CGS 单位)}. \tag{4.2.34}$$

此式表明, 黑洞的热力学量和它的引力参量有着密切的联系. 由于式中还含有普朗克常数, 此式还表明黑洞温度还具有量子论方面的性质.

由上面的讨论可知, (4.2.34)式适用于克尔黑洞和克尔–纽曼黑洞. 对于施瓦西黑洞这一特殊情况, 我们有

$$\kappa = \frac{c^4}{4GM}, \quad \beta = \frac{\hbar c}{k},$$

$$T_B = \frac{\hbar c^3}{4GMk} \sim 10^{-7}\frac{M_\odot}{M}. \tag{4.2.35}$$

此式表明施瓦西黑洞的温度由其引力质量唯一确定. 质量越大的黑洞, 温度越低. 当 $M \sim M_\odot$, 则 $T_B \sim 10^{-7}$K. 可见质量大的黑洞温度接近绝对零度. 而当 $M \sim 10^{15}$g, $T_B \sim 10^{12}$K. 可见原初小黑洞的温度极高, 约为太阳中心温度($\sim 10^7$K)的 10 万倍.

黑洞具有非零温度, 按热力学第二定律, 黑洞应该有辐射, 即黑洞不是黑的, 这与经典黑洞理论矛盾. 要解决这一矛盾, 必须突破经典(非量子)的概念. 1974 年, 霍金论证了黑洞的量子辐射, 从而解决了这一矛盾. 我们将在第 6 章中专门讨论黑洞的量子辐射.

现在我们继续讨论建立在黑洞温度概念基础上的黑洞热力学问题.

在热力学中，可以证明，对于一个转动物体有

$$\delta M = T\delta S + \Omega\delta J. \tag{4.2.36}$$

考虑到(4.2.33)式，(3.3.2)式可写为

$$\delta M = T\delta\left(\frac{A}{8\pi\beta}\right) + \Omega\delta J. \tag{4.2.37}$$

比较上两式，可认为黑洞作为一热力学系统，具有熵

$$S_B = \frac{A}{8\pi\beta}. \tag{4.2.38}$$

黑洞的熵与其表面积成正比，即与其引力半径的平方或质量平方成正比. 因此，一颗恒星的质量为 M，熵为 S_M，则坍缩成黑洞后，其熵与原来的熵之比为

$$\frac{S_B}{S_M} = \alpha M. \tag{4.2.39}$$

对于太阳，$S_\odot \approx 10^{42}\,\mathrm{erg/K}$，当 $M_B = M_\odot$ 时，有 $S_B \approx 10^{60}\,\mathrm{erg/K}$，所以

$$\frac{S_B}{S_\odot} = \alpha M_\odot = 10^{18},$$

从而有

$$\alpha = 10^{18}/M_\odot.$$

(4.2.39)式具体化为

$$\frac{S_B}{S_M} = 10^{18}\frac{M}{M_\odot}. \tag{4.2.40}$$

可见恒星坍缩为黑洞的过程中熵增加，信息量减少.

Bekenstein 曾指出，在(4.2.40)式中令

$$S_B/S_M = 1,$$

得到

$$M_{\min}^B = 10^{15}\,\mathrm{g}, r_{\min} \approx 10^{-13}\,\mathrm{cm}. \tag{4.2.41}$$

这是可以坍缩为黑洞的恒星质量下限，就是原初小黑洞的质量下限. 这类最小的原初小黑洞所含核子数为 10^{39}，恰等于静电力与引力的比值，它的寿命恰等于宇宙的年龄. 这些看似巧合的事情究竟反映了自然界的什么内在规律至今尚不清楚.

4.3　黑洞热力学的基本定律

前面的讨论可以总结为黑洞热力学的四条基本定律.

1. 热力学第零定律

黑洞可以定义温度. 由于稳态黑洞的表面引力加速度在视界面上是恒定的，

因此可以按(4.2.33)式定义温度.

2. 热力学第一定律

$$\delta M = T\delta S + \Omega\delta J + V\mathrm{d}Q.$$

式中,

$$T = \beta\kappa,\quad S = \frac{A}{8\pi\beta},\quad V = \frac{r + Q}{r_+^2 + a^2}.$$

3. 热力学第二定律

$$\delta(S_B + S_m) \geqslant 0.$$

式中 S_m 为黑洞周围物质的熵.即含黑洞的系统的总熵沿顺时方向永不减少.

4. 热力学第三定律

不可能通过任何有限步骤把黑洞的表面引力加速度 κ 降到零.

下一章将讨论黑洞热力学的量子修正,假定读者已经熟悉热力学中各个量和各个方程,熟悉统计和量子场论的知识.

第5章　黑洞热力学的量子理论

5.1　离壳与即壳

按照黑洞物理中的热力学类比,爱因斯坦引力理论中的黑洞熵(4.2.38)式可写为

$$S^{\mathrm{BH}} = \frac{A^H}{4l_{\mathrm{p}}^2}, \tag{5.1.1}$$

式中 A^H 是黑洞视界面积,$l_{\mathrm{p}} = (\hbar G/c^3)^{1/2}$ 是普朗克长度.在黑洞物理中,Bekenstein-Hawking 熵 S^{BH} 的基本地位与普通热力学中的相同.它可以由含黑洞系统的自由能对系统温度的偏导数决定.在欧氏方案中,自由能直接与真空爱因斯坦方程的规则欧氏解(Gibbons-Hawking 瞬子)的欧氏作用量相联系.按照热力学第一定律,黑洞的热力学熵定义为

$$\mathrm{d}F = -S^{TD}\mathrm{d}T. \tag{5.1.2}$$

式中 T 为系统温度,自由能既含经典(主级)贡献,又含量子(单圈)修正.因此,热力学熵除了含经典(主级)部分 S^{BH} 以外,还应含有量子修正 S_1^{TD}:

$$S^{TD} = S^{\mathrm{BH}} + S_1^{TD}. \tag{5.1.3}$$

为了得到 S^{TD},须比较两个平衡位形.为此,通常确定 S^{TD} 的计算都以规则 G-H 瞬子作为背景度规.这种计算方法称为即壳(on shell)方法.

黑洞热力学的基本问题是其统计力学基础.这个问题包括三部分:① 定义黑洞的内在自由度;② 计算统计力学熵 $S^{SM} = -T_r(\hat{\rho}^H \ln \hat{\rho}^H)$,密度矩阵 $\hat{\rho}^H$ 描述动力学自由度;③ 建立 S^{SM} 和 S^{TD} 之间的关系.

为避免歧义,我们使用了"统计力学熵",以强调 S^{SM} 是按统计力学规则计算得到的.至于密度矩阵 $\hat{\rho}$,其形式和性质依赖于具体模型,本章我们考虑一类模型,黑洞的内部自由度就是其量子激发,这种想法最近有不少文献采用.这类模型的共同特点是所考虑的 $\hat{\rho}$ 是热的,有大量文章就各种黑洞模型计算了统计力学熵.我们下面力图阐明这些计算结果和可观测的热力学黑洞熵 S^{TD} 之间的关系.

应该指出,对于黑洞,S^{TD} 和 S^{SM} 之间的关系并不简单.通常的热力学系统,$S^{TD} = S^{SM}$.而黑洞具有与其他热力学系统不同的性质.在热平衡态下,黑洞质量 M 是温度 T 的普适函数.但是质量唯一决定黑洞几何,从而决定了描述其量子激发的哈密顿的内禀参数.这个性质带来两个后果:① S^{TD} 与 S^{SM} 对黑洞来说是不相同的;② 计算 S^{SM} 并与 S^{TD} 比较要用离壳(off shell)方法.这就是必须把温度 T 和黑洞质

量 M 看成独立参数. 这导致当 $T \neq T_{\mathrm{BH}} \equiv (8\pi M)^{-1}$ 时,不存在规则真空欧氏解. 这样,只能考虑非真空引力场方程解的背景度规,或者去掉视界附近的时空,使解不完整,二者必居其一. 在这两种情况下,自由能的计算都会遇到问题,甚至其结果会依赖于具体离壳方法的选择.

下面我们将给出黑洞熵不同定义之间的关系. 我们还将讨论并比较各种离壳方法(砖墙,顶角奇异性,钝锥,体积截断),以及它们与即壳方法之间的联系. 我们就一个简化了的 2 维模型说明这些联系. 这是因为在这简化模型中所有计算都能精确进行. 可以明显给出热力学熵与统计力学熵不同,我们可以找到单圈修正的 S^{TD} 和 S^{SM} 之间的关系. 其中一主要结果是,在所考虑的 2 维模型中,量子场对热力学熵的单圈贡献 S_1^{TD} 可写成

$$S_1^{TD} = S^{SM} - S_{\mathrm{Rin}}^{SM} + \Delta S. \tag{5.1.4}$$

式中 S_{Rin}^{SM} 是在 Rindler 空间所计算的统计力学熵,ΔS 是一附加的有限修正,来源于量子效应引起的视界改变. 用砖墙和体积截断方法所计算的熵直接和 S^{SM} 相关,它正比于 $\ln\epsilon$,在 2 维情况下是发散的,其中 ϵ 是离视界的距离. 另一方面,用顶角奇异性和钝锥方法计算的熵与 $(S^{SM} - S_{\mathrm{Rin}}^{SM})$ 相符. 因为 S^{SM} 中的对数发散项恰好与 Rindler 熵中的发散项抵消,所以它是有限的.

如所知,决定自由能的单圈有效作用量含局域紫外发散. 为了得到定义很好的有限量,须重正化. 通常假设裸经典作用量所包含的局域结构与单圈计算中出现的相同. 在重正化过程中,通过对经典作用量中耦合常数的重新定义,可以去掉局域单圈发散性. 在我们的讨论中,假设此重正化一开始就已完成,我们把重正化的可观测量当作即壳解的参数,这时,重正化的单圈有效作用量是有限的. 影响此解的量子修正可视为对大质量(远大于普朗克质量)黑洞的微扰,我们发现,用可观测参数表示的所有黑洞热力学特征量都是有限的,且其定义不需要普朗克尺度的物理知识. 下面我们首先重温欧氏方案的主要特征,并给出我们要讨论的熵的一般定义,然后讨论 2 维模型和即壳、离壳方案.

5.2　欧氏方案和热力学熵

用欧氏方案解决黑洞热力学问题的出发点是配分函数 $Z(\beta)$ 和有效作用量 $W(\beta)$. 一个有黑洞存在的系统,其自由能由路径积分定义:

$$\mathrm{e}^{-W(\beta)} = Z(\beta) = \int [D\phi]\, \mathrm{e}^{-I[\phi]}, \tag{5.2.1}$$

式中 $I[\phi]$ 是欧氏经典作用量,而所有的物理量 ϕ,包括引力场 $g_{\mu\nu}$,在欧氏时间 τ 上都假定为周期性的或反周期性的(依赖于统计),周期为 β_∞. (5.2.1) 式中的度规是渐近平直的,参数 β_∞ 的倒数是空间无穷远处测得的温度. 假定积分测度 $[D\phi]$

是协变测度.

计算 W 的标准方法是用半经典近似. 若 ϕ_0 是 $I[\phi]$的稳态点,即若

$$\left.\frac{\delta I}{\delta\phi}\right|_{\phi=\phi_0} = 0, \tag{5.2.2}$$

则有分解式:

$$I[\phi_0 + \tilde{\phi}] = I[\phi_0] + I_2[\tilde{\phi}] + \cdots, \tag{5.2.3}$$

式中,I_2 是线性化作用量中对涨落 ϕ 为二阶的部分,而省略号代表 $\tilde{\phi}$ 的高阶项. 由此可得

$$Z(\beta) = \mathrm{e}^{-I[\phi_0]}\int[D\tilde{\phi}]\mathrm{e}^{-I_2[\tilde{\phi}]} \equiv \mathrm{e}^{-I[\phi_0]}Z_1(\beta). \tag{5.2.4}$$

式中对 $\tilde{\phi}$ 的高斯积分可用相应的波算符 D_j 的行列式表示:

$$Z_1(\beta) \equiv Z_1[\phi_0(\beta)] = \prod_j\{\det[-\mu^2 D_j(\phi_0)]\}^{\pm 1/2}. \tag{5.2.5}$$

算符 D_j 由作用量的二阶部分 $I_2 = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x\ \sqrt{g}\tilde{\phi}D_j\tilde{\phi}$ 决定,其显式依赖于自旋 j. 例如,对于 d 维空间中共形不变的无质量标量场,$D_0 = \Delta - (d-2)[4(d-1)]^{-1}R$. 式中 $\Delta = \nabla_\mu\nabla^\mu$ 是拉普拉斯算符,R 是标曲率. 常数 μ^2 是一任意的重正化参数,量纲为长度,且不依赖于场位形 ϕ. 由(5.2.5)式可以写出单圈近似下的有效作用量:

$$W(\beta) = I[\phi_0(\beta)] - \ln Z_1(\beta) \equiv I[\phi_0(\beta)] + W_1[\phi_0(\beta)]. \tag{5.2.6}$$

单圈贡献 $W_1[\phi_0]$是紫外发散的,且像通常一样,经典作用量这样选择,使得只要重新定义 I 中的耦合常数,就能去掉 W_1 中相应的局域发散性. 现在,我们假定这些程序已经完成,且经典作用量是用重正化参数写出来的,ϕ_0 为其极值点. W_1 是重正化的单圈作用量. (5.2.5)式中参数 μ 选择的任意性对应于重正化后作用量可附加一有限部分.

为了把这个一般方案运用于黑洞情况,我们假设黑洞不旋转,不荷电,且不存在对称性破缺,使得所有场的平均值除引力场外均为零,而且,为了给出引力场(真空)方程的渐近平直解,取重正化宇宙常数为零. 其解代表一个 Gibbons-Hawking 瞬子,它在欧氏视界处规则. 在爱因斯坦理论中,此瞬子由施瓦西度规描述,且只依赖于一个常数,即黑洞质量 m,这一度规在视界处规则的具体含意是 $\beta_\infty = \beta_H = 8\pi m$.

当考虑量子修正时,须记住,对给定边界条件(τ 上的周期性)的系统,黑洞与周围的热辐射处于平衡状态,而此辐射也将对可观测的热力学量有贡献. 对于无限大尺度的热浴(heat bath),此贡献是无限大,而且黑洞与无限大热浴的平衡是不稳定的. 因此,必须从一开始就考虑由一有限尺度的边界面 B 包围的黑洞. 我们假定此面不能被场穿透. 这一点可以由相应的边界条件保证. 为简单起见,设 B 是球面,半径为 r_B,黑洞位于球心处. 对于施瓦西黑洞,若 $r_B < 3m$,则热稳定性便得到保

证. 最后, 在这一问题的描述中, 参数 β 是在 B 上测得的温度的倒数. 另外, 我们假定所有必要的要求都已达到, 不再重复讨论.

(5.2.6) 式中的重正化有效作用量 W 是由一个特殊的经典解计算得到的. 它本身由泛函定义:

$$W[\phi] = I[\phi] + W_1[\phi], \tag{5.2.7}$$

其中场 φ 任意, 边界条件已选定. 极值点

$$\left.\frac{\delta W}{\delta \phi}\right|_{\phi=\bar{\phi}} = 0 \tag{5.2.8}$$

描述一修正的场位形; 与经典解之差为量子修正: $\bar{\phi} = \phi_0 + \hbar\phi_1$. 须强调的是, 如果对单圈效应感兴趣, ϕ_0 和 $\bar{\phi}$ 的 W 值之差将是普朗克常数 $\hbar$ 的二阶项:

$$W(\beta) = W[\phi_0(\beta)] = W[\bar{\phi}(\beta)] + o(\hbar^2). \tag{5.2.9}$$

这可由 (5.2.8) 式得出, 只要量子修正解和经典解满足同样的边界条件.

r_B 固定, 自由能 $F(\beta) = \beta^{-1}W(\beta)$ 对温度倒数 β 的变化便可确定黑洞的热力学熵:

$$S^{TD}(\beta) = \beta^2\frac{\mathrm{d}F(\beta)}{\mathrm{d}\beta} = \left(\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta} - 1\right)W(\beta). \tag{5.2.10}$$

我们记得, 重正化有效作用量 $W(\beta)$ 是即壳计算的, 即 $\beta_\infty = 8\pi m$. 热力学熵可写为

$$S^{TD} = S_0^{TD} + S_1^{TD}. \tag{5.2.11}$$

可以证明,

$$S_0^{TD} = \left(\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta} - 1\right)I[\phi_0(\beta)] \tag{5.2.12}$$

就是 (5.1.1) 给出的 B-H 熵 S^{BH}, 而

$$S_1^{TD}(\beta) = \left(\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta} - 1\right)W_1[\phi_0(\beta)] \tag{5.2.13}$$

表示量子修正. 此修正也含黑洞外热辐射的熵. 由构成来看, 热力学熵 S^{TD} 定义得很好且有限. 所有的计算都是即壳的, 即在一引力场方程的规则完整欧氏解上做出的. 此解的参数仅由重正化耦合常数表示.

5.3　模型描述: 即壳结果

在 4 维情况下, S_1^{TD} 的计算相当复杂, 为了讨论 S_1^{TD} 的性质及其与 S^{SM} 的联系, 我们考虑一个能够精确计算的简化 2 维模型. 虽然这些量的 2 维和 4 维显式不同, 但研究 2 维模型可以对 4 维情况做出一些确定的结论. 为保留与 4 维情况最大限度的相似性, 我们考虑 2 维 dilaton 引力. 其作用量为

$$I = -\frac{1}{4}\int_{M2}[r^2R + 2(\nabla r)^2 + 2]\sqrt{\gamma}\,\mathrm{d}^2x$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\partial M^2} r^2 (k-k_0)\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int \sqrt{\gamma}\varphi_{,\mu}\varphi^{,\mu}\mathrm{d}x. \tag{5.3.1}$$

2 维度规 γ,dilaton 场 r 和标量场 φ 是这一问题的动力学变量. R 为 γ 的曲率,k 为∂M^2 的外曲率. 若标量场 φ 不存在,此作用量可由 4 维欧氏爱因斯坦作用量

$$I^{(4)} = -\frac{1}{16\pi}\int_{M^4} R^{(4)}\sqrt{g}\mathrm{d}^4x - \frac{1}{8\pi}\int_{\partial M^4}(K^{(4)} - K_0^{(4)})\sqrt{h}\mathrm{d}^3x \tag{5.3.2}$$

通过球对称度规

$$\mathrm{d}s^2 = \gamma_{ab}\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b + r^2\mathrm{d}\omega^2 \tag{5.3.3}$$

退化得到. 这里 γ_{ab}是 2 维度规,r 是 2 维流形上的标函数,$\mathrm{d}\omega^2$ 是单位球上的线元,$K_0^{(4)}$ 是标准删除项,且 $k_0 = K_0^{(4)}$.

由于 2 维作用量与 4 维作用量是退化相关的,场对(γ_0,φ_0)显然是泛函数 I 的极值点,其中 $\varphi_0 = 0$;γ_0 是 2 维施瓦西度规

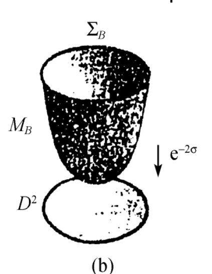
$$\mathrm{d}s^2 = f\mathrm{d}\tau^2 + f^{-1}\mathrm{d}r^2, \quad f = 1 - r_+/r. \tag{5.3.4}$$

$r = r_+$处的规则化条件要求 τ 是周期性的,且周期为 $\beta_H = 4\pi r_+$. 具有度规(5.3.4)式的 G-H 瞬子,即规则完整欧氏流形,如图 15(a)所示.

考虑 G-H 瞬子上外边界 Σ_B($r = r_B$,见图 15(b))内的区域 M_B. 若在面 Σ_B 上固定边界条件,而 β 是线 $r = r_B$ 的固有长度,则由边界条件(β,r_B)表示的区域 M_B 的经典欧氏作用量为

$$I(\beta, r_B) = I[\gamma_0, \varphi_0] = 3\pi r_+^2 - 4\pi r_+ r_B + \beta r_B. \tag{5.3.5}$$


(a)



(b)

图 15

式中 r_+由(5.3.6)式定义:

$$\beta = 4\pi r_+(1 - r_+/r_B)^{1/2}. \tag{5.3.6}$$

β 为 r_B 处温度的倒数. 当 $r_B\to\infty$ 时,$\beta = 4\pi r_+$. 经典作用量简化为

$$I(\beta) = \frac{1}{16\pi}\beta^2. \tag{5.3.7}$$

按照 5.2 节中的一般讨论,有效作用量的单圈贡献为

$$W_1(\beta) = \frac{1}{2}\ln\det(-\mu^2\Delta). \tag{5.3.8}$$

这里,重正化的行列式是在2维瞬子(5.3.4)式的区域 M_B 上计算的.为了具体讨论,我们假定场 φ 在包围黑洞的边界 Σ_B 上遵从狄里克雷边界条件.作用量中去掉的发散项是

$$W_1^{\mathrm{div}}[M_B] = -\frac{1}{8\pi\delta}\int_{M_B}\sqrt{\gamma}\mathrm{d}^2x + \frac{\ln\delta}{12}\chi[M_B], \tag{5.3.9}$$

$$\chi[M_B] = \frac{1}{4\pi}\left(\int_{M_B}R\sqrt{\gamma}\mathrm{d}^2x + 2\int_{\Sigma_B}k\sqrt{h}\mathrm{d}y\right). \tag{5.3.10}$$

式中 δ 是紫外规则化参数, $\chi[M_B]$ 是G-H瞬子 M_B 的欧拉示性数.为了去掉体积发散性 $\int_{M_B}$,须在裸经典作用量中引入宇宙常数 λ.重正化之后我们令它等于 $-1/2$,见(5.3.1)式.要去掉(5.3.10)中其他发散项,需在(5.3.1)式中引入附加项,但由于此项仅为拓扑不变量,故可略去.

应用共形变换,单圈有效作用量 $W_1(\beta)$ 可表为显式.注意度规(5.3.4)式可写为

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1-\frac{r_+}{r}\right)\mathrm{d}\tau^2 + \left(1-\frac{r_+}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 = \mathrm{e}^{2\sigma}\mathrm{d}\tilde{s}^2, \tag{5.3.11}$$

$$\mathrm{d}\tilde{s}^2 = \mu^2(x^2\mathrm{d}\tilde{\tau}^2 + \mathrm{d}x^2). \tag{5.3.12}$$

这里,

$$\tilde{\tau} = \frac{\tau}{2r_+},\quad 0 \leqslant \tilde{\tau} \leqslant 2\pi,$$

$$x = \left(\frac{r-r_+}{r_B-r_+}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{(r-r_B)/2r_+},\quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{5.3.13}$$

且共形因子 σ 为

$$\sigma(r) = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{r_B-r_+}{r}\right) + \frac{r_B-r}{r_+} + 2\ln\left(\frac{2r_+}{\mu}\right)\right]. \tag{5.3.14}$$

为保持量纲一致,在平直空间度规(5.3.12)中引入了量纲为长度的参数 μ.上述共形变换

$$\gamma_{\mu\nu} \sim \tilde{\gamma}_{\mu\nu} = \mathrm{e}^{-2\sigma}\gamma_{\mu\nu} \tag{5.3.15}$$

是区域 M_B 到平直2维单位盘 D^2(用 μ 的单位测量)上的映射.可以证明, μ 的选择不影响物理结果.

对于共形场,此映射下 W_1 的变换式在后面5.11节中给出.用 C 表示单位盘 D^2[(5.3.12)式]的重正化单圈有效作用量,采用关系式(5.11.9),得到

$$W_1(\beta, r_B) = \widetilde{W}_1[\beta, y(\beta, r_B)]. \tag{5.3.16}$$

式中, $y = r_+/r_B$,而且

$$\widetilde{W}_1(\beta, y) = \frac{1}{48}\left[-\frac{2}{y} + 2\ln y + 17 - 2y - 13y^2\right]$$

$$-\frac{1}{6}\ln\frac{\beta}{2\pi\mu}+C. \tag{5.3.17}$$

此两式需作些解释. 首先,不仅边界处的温度倒数 β 依赖于“半径”r_B,单圈有效作用量也依赖于 r_B. 对给定的 r_B 和 β,引力半径 r_+ 由(5.3.6)式定义. 为了简化表达,我们采用量纲为一的变量 $y=r_+/r_B$,而不用 r_B. (5.3.6)式意味着 y 是由关系式

$$y(1-y)^{1/2}=\frac{\beta}{4\pi r_B} \tag{5.3.18}$$

定义的 β 和 r_B 的函数.

自由能和热力学熵的各自单圈贡献 F_1 和 S_1^{TD} 由下列公式确定:

$$F_1(\beta,r_B)=\beta^{-1}W_1(\beta,r_B),$$

$$S_1^{TD}=\beta\frac{\partial W_1(\beta,r_B)}{\partial\beta}\bigg|_{r_B}-W_1(\beta,r_B). \tag{5.3.19}$$

W_1 的导数可用 $\widetilde{W}_1$ 的导数表示:

$$\frac{\partial W_1(\beta,r_B)}{\partial\beta}\bigg|_{r_B}=\frac{\partial\widetilde{W}_1(\beta,y)}{\partial\beta}\bigg|_{y}+\frac{\partial\widetilde{W}_1(\beta,y)}{\partial y}\bigg|_{\beta}\frac{\partial y}{\partial\beta}\bigg|_{r_B}. \tag{5.3.20}$$

式中,

$$\frac{\partial y}{\partial\beta}\bigg|_{r_B}=\frac{2y(1-y)}{\beta(2-3y)}. \tag{5.3.21}$$

(5.3.21)式来源于(5.3.18)式. 根据(5.3.19)~(5.3.21)式,最后得到

$$S_1^{TD}(y,\beta)=\frac{1}{48(2-3y)}\left[\frac{8}{y}-13y-28y^2+13y^3\right]$$

$$-\frac{1}{24}\ln y+\frac{1}{6}\ln\frac{\beta}{2\pi\mu}-\frac{17}{48}-C. \tag{5.3.22}$$

此量是有限的. 量纲为一的常数 C 不依赖于系统的参数,而反映熵定义中的不确定性. 对于进一步讨论,这不确定性并不重要,因此这项和其他类似常数可省略. 当 r_B 很大($r_B\gg r_+$ 或 $y\ll1$)时,S_1^{TD} 中的主要项是 $\frac{\pi}{3}r_B\beta^{-1}$. 此项和一维无质量标量量子热气体的熵相合. 我们所考虑的情况总是 $r_B<\frac{3}{2}r_+$,所以上面的限制只有形式上的意义. 当 $r_B=\frac{3}{2}r_+$ 时,$S_1^{TD}=\infty$,致使 $y=\frac{3}{2}$时热容量为无限大. 可以预见,4 维情况下这些量有相同的行为.

5.4 离壳方法

在前面的讨论中我们用到了(5.3.6)式. 它可以写成 $\beta_\infty=\beta_H$. 其中 $\beta_\infty=\beta($1

$-r_+/r_B)^{-1/2}$,是无限远处观测到的边界 Σ_B 处的温度的倒数,$(1-r_+/r_B)^{-1/2}$ 是红移因子. β_H 是 Hawking 温度倒数(也是在无限远处测量的). $\beta_\infty=\beta_H$ 明显给出了热辐射和黑洞之间的平衡条件. 也正因为有这一条件,我们才谈及即壳量.

下面我们讨论另一种方法——离壳方法,其中背景度规不满足 $\beta_\infty=\beta_H$. 这时有效作用量的单圈贡献为三个变量(β, r_B 和 r_+)的函数:

$$W_1^*=W_1^*(\beta, r_+, r_B, \cdots).$$

用上标 * 表示此量依赖于离壳方案的选择,W_1^* 的自变量中的省略号表示它还可能依赖于某些附加参数,这些参数由于离壳方案的不同而不相同. 因为这些参量并不重要,故下面将不再表示出来.

在一般情况下,离壳熵定义为离壳自由能 $F^*=\beta^{-1}W^*$ 对温度变化的反应. 条件是系统的参数(r_B)和黑洞参数(r_+)固定. 按这个定义,单圈离壳熵为

$$S_1^*=\beta\frac{\partial W_1^*}{\partial\beta}\bigg|_{r_B, r_+, \cdots}-W_1^*. \tag{5.4.1}$$

这里假定计算结束后要回到即壳极限. 这就是说,令 S_1^* 中的 r_+ 等于即壳值,此值由解相应的引力场方程确定.

如果不采用 r_B 和 r_+,而采用量纲为一的变量

$$y=y(r_B, r_+)=\frac{r_+}{r_B},$$

$$\alpha=\alpha(\beta, r_B, r_+)=\frac{\beta_\infty}{\beta_H}=\frac{\beta}{4\pi r_+\sqrt{1-\frac{r_+}{r_B}}}, \tag{5.4.2}$$

则 W_1^* 和 S_1^* 的显式就可以变得很简单. 变量 α 是离壳参数. 当系统即壳时,$\alpha=1$. 定义

$$W_1(\beta, r_B, r_+, \cdots)=\widetilde{W}_1(\beta, \alpha(\beta, r_B, r_+), y(r_+, r_B), \cdots). \tag{5.4.3}$$

当固定 r_+ 和 r_B 时,y 也固定,于是(5.4.2)表明 α 正比于 β. 因此有

$$S_1^*=\beta\frac{\partial\widetilde{W}_1^*(\beta, \alpha, y, \cdots)}{\partial\beta}\bigg|_{\alpha, y, \cdots}+\alpha\frac{\partial\widetilde{W}_1^*(\beta, \alpha, y, \cdots)}{\partial\alpha}\bigg|_{\beta, y, \cdots}-W_1^*. \tag{5.4.4}$$

如前所说,当计算完毕后,须令 $\alpha=1$. 于是 S_1^* 相应的即壳值只依赖于边界条件 β 和 r_B. 做了一般的讨论之后,下面我们讨论具体的离壳方法.

5.5　砖 墙 模 型

1. 有效作用量

作为离壳方法的第一个例子,我们讨论所谓"砖墙模型"(brick-wall model),它

由′t Hooft 提出,随后有诸多文章讨论.其基本思想是在离黑洞视界很近的地方(固有距离为 ϵ),引入一附加的类光边界 Σ_ϵ,Σ_B 和 Σ_ϵ 之间的区域表示为 $M_{B,\epsilon}$(如图16),按′t Hooft 的意见,进一步假设场 φ 在两边界 Σ_B 和 Σ_ϵ 处都满足狄里克雷条件.砖墙模型的出发点是在区域 $M_{B,\epsilon}$中的无质量标量场的配分函数 $Z_1^{BW}(\beta)$:

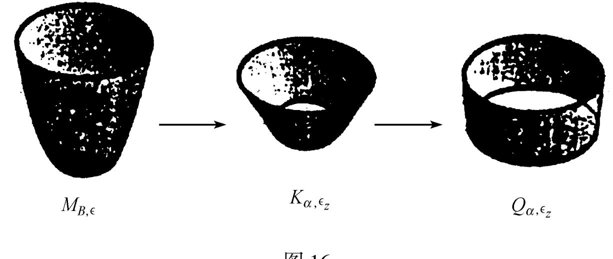


图 16

$$\ln Z_1^{BW}(\beta) = -\frac{1}{2}\ln\det(-\mu^2\Delta). \tag{5.5.1}$$

式中 β 为 Σ_B 处测得的温度的倒数."ln det"理解为重正化量,Δ 是区域 $M_{B,\epsilon}$内满足狄里克雷条件的标量场的拉普拉斯算符.由于内边界 Σ_ϵ 的存在,热气体不能穿透的黑洞视界附近区域就被完全消除掉了.因此,无论参数 β 和 m 的关系如何,这系统都不是奇异的,而且砖墙模型适用于离壳情况.为了区别用这一离壳方法算得的量,我们用缩写字母 BW 作为上标,相应的配分函数 Z_1^{BW} 和作用量 W_1^{BW} 不仅依赖于 β 和 r_B,也依赖于 ϵ 和视界处的 dilaton 值 r_+.现在我们的任务是找出 $W_1^{BW}(\beta, r_B, r_+, \epsilon)$.

显然,这一问题可以简化为某种"标准"2 维平直区域的有效作用量的计算.我们取圆柱面为这一区域(如图).

一个比较方便的方法是分两次完成共形变换.

首先,采用映射(5.3.15)式,其中 σ 由(5.3.14)式给出,在此变换下,度规形式为

$$d\tilde{s}^2 = \mu^2(x^2 d\tilde{\tau}^2 + dx^2), \quad 0 \leqslant \tilde{\tau} \leqslant 2\pi\alpha, \quad \epsilon_x \leqslant x \leqslant 1. \tag{5.5.2}$$

此空间的嵌入图见上图.它是圆锥 C_α 在面 $\Sigma_B(x=1)$ 和 $\Sigma_\epsilon(\epsilon_x)$之间的部分 K_{α,ϵ_x},$x=\epsilon_x$ 的值和固有距离 ϵ 的联系为

$$\epsilon_x = \epsilon\frac{2\pi\alpha}{\beta}\sqrt{y}\exp\left(\frac{y-1}{2y}\right). \tag{5.5.3}$$

式中参数 y 和 α 由(5.4.2)式确定.

其次,把 K_{α,ϵ_x}映射到度规为 $\mu^2(d\tilde{\tau}^2+dz^2)$的圆柱 Q_{α,ϵ_z}上:

$$d\tilde{s}^2 = \mu^2(x^2 d\tilde{\tau}^2 + dx^2) = x^2[\mu^2(d\tilde{\tau}^2 + dz^2)], z = -\ln x. \tag{5.5.4}$$

此柱面周长为$2\pi\alpha$,母线长为$\epsilon_z = -\ln\epsilon$(在$\mu$单位下).

因此,只要知道“标准”柱Q_{α,ϵ_z}的有效作用量$W_1[Q_{\alpha,\epsilon_z}]$,通过共形变换,就可以得到作用量$W_1^{BW}(\beta, r_B, r_+, \epsilon)$. 可以证明(见5.12节)

$$W_1[Q_{\alpha,\epsilon_z}] = -\ln \operatorname{tr} e^{-2\pi\alpha\mu\hat{H}}. \tag{5.5.5}$$

式中$\hat{H}$是满足狄里克雷边界条件的无质量标量场在区间$(0, \mu\epsilon_z)$内的哈密顿. 于是,对于$\epsilon_z \gg 1$有(见5.12节)

$$W_1[Q_{\alpha,\epsilon_z}] = -\frac{1}{12\alpha}\epsilon_z - \frac{1}{2}\ln\frac{\pi\alpha}{\epsilon_z} + o\left(\frac{1}{\epsilon_z}\right). \tag{5.5.6}$$

尺度参量μ在(5.56)式中不出现是因为柱面上的作用量有尺度不变性. 共形变换下有效作用量$W_1[K_{\alpha,\epsilon_z}]$为

$$W_1[K_{\alpha,\epsilon_x}] = W_1[Q_{\alpha,\epsilon_z}] - \frac{\alpha}{12}\epsilon_z, \tag{5.5.7}$$

而变换(5.3.15)式给出

$$W_1[M_{B,\epsilon}] = W_1[K_{\alpha,\epsilon_x}] + \alpha f(y), \tag{5.5.8}$$

$$f(y) = -\frac{1}{48}\left(-\frac{2}{y} + 2\ln y + 2y + 13y^2 - 13\right). \tag{5.5.9}$$

应用(5.5.6)~(5.5.8)节,可以得到最后结果. 用$(\beta, \alpha, y, \epsilon)$写出的有效作用量$W_1^{BW}(\beta, r_B, r_+, \epsilon)$为

$$W_1^{BW}(\beta, r_B, r_+, \epsilon) = \widetilde{W}_1^{BW}(\beta, \alpha(\beta, r_B, r_+), y(r_B, r_+), \epsilon), \tag{5.5.10}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_1^{BW}(\beta, \alpha, y, \epsilon) = {} & \frac{1}{12}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\ln\frac{2\pi\alpha\epsilon}{\beta} \\ & - \frac{1}{2}\ln\frac{\pi\alpha}{\ln(\beta/2\pi\alpha\epsilon)} + \frac{\alpha}{48}(15 - 2y - 13y^2) \\ & + \frac{1}{24\alpha}\left(1 - \frac{1}{y} + \ln y\right) + o(\ln^{-1}(\beta/\epsilon)).\end{aligned} \tag{5.5.11}$$

当$\alpha = 1$,就是即壳情况,此时作用是可以写成和的形式:

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_1^{BN}(\beta, \alpha = 1, y, \epsilon) = {} & \widetilde{W}_1(\beta, y) + \frac{1}{6}\ln\epsilon \\ & - \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{\ln(\beta/2\pi\epsilon)} + o(\ln^{-1}(B/\epsilon)).\end{aligned} \tag{5.5.12}$$

式中区域M_B上的热力学作用量$\widetilde{W}_1(\beta, y)$由式(5.3.17)给出,而附加项来源于墙的存在,当$\epsilon \to 0$时它对数发散.

2. 熵

砖墙模型的熵S_1^{BW}由(5.4.1)式用W_1^{BW}给出. 写成$(\beta, \alpha, y, \epsilon)$的形式为

$$S_1^{BW}(\beta,\alpha,y,\epsilon)=\frac{1}{12\alpha}\left(2\ln\frac{\beta}{2\pi\alpha\epsilon}-\ln y+\frac{1}{y}-1\right)$$
$$+\frac{1}{2}\ln\frac{\pi\alpha}{\ln(\beta/2\pi\alpha\epsilon)}+o(\ln^{-1}(\beta/\epsilon)).\qquad(5.5.13)$$

令 $\alpha=1$ 便得到 S_1^{BW} 的即壳值.

这里应注意,重正化参数 μ 未出现于(5.5.11)和(5.5.13)式,故砖墙作用量 W_1^{BW} 和熵 S_1^{BW} 都不含有 μ. 这是因为在常共形变换下,有效作用量需附加一正比于流形的欧拉示性数的项. 但是 $M_{B,\epsilon}$ 与柱面的拓扑相同,欧拉示性数为零. 因此,有效作用量在常共形变换下不变,并不含 μ. 另一方面,完全规则瞬子的欧拉示性数与 D^2 相同,都不为零. 结果共形反常积分不为零,因而 μ 作为维数变换的参数出现在热力学作用量和熵中.

下面我们证明,砖墙熵(5.5.13)和统计力学熵相合并可写成

$$S_1^{BW}(\beta,\alpha,y,\epsilon)=-\mathrm{tr}[\rho_\epsilon^{H}(\beta)\ln\rho_\epsilon^{H}(\beta)].\qquad(5.5.14)$$

式中 $\rho_\epsilon^{H}(\beta)$ 是黑洞附近区域 $M_{B,\epsilon}$ 中的无质量气体的热密度矩阵,β 是 Σ_B 处测得的温度的倒数. 在't Hooft 的砖墙模型中,这种热气体被认为是黑洞的内部自由度.

为了证明(5.5.14)式,我们先把 S_1^{BW} 的表示式改写一下. (5.5.7)和(5.5.8)式给出

$$W_1^{BW}(\beta,r_B,r_+,\epsilon)=\alpha f(y)-\frac{\alpha\epsilon_z}{12}+W_1[Q_{\alpha,\epsilon_z}].\qquad(5.5.15)$$

为了得到 S_1^{BW},我们固定 r_B,r_+ 和 ϵ. 于是 y 不依赖于 β,而 α 正比于 β,结果(5.5.15)式中前两项对 S_1^{BW} 无贡献,故有

$$S_1^{BW}=\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}-1\right)W_1[Q_{\alpha,\epsilon_z}]=\frac{1}{6\alpha}\epsilon_z+\frac{1}{2}\ln\frac{\pi\alpha}{\epsilon_z}+o(\epsilon_z^{-1}).\qquad(5.5.16)$$

易证(5.5.16)式和(5.5.13)式相合. 注意 $W_1[Q_{\alpha,\epsilon_z}]$ 由(5.5.5)式给出,量 $(1-\beta(\partial/\partial\beta))\ln\mathrm{tr}e^{-\beta\hat{H}_L}$ 可写成

$$-\mathrm{tr}[\hat{\rho_L}(\beta)\ln\hat{\rho_L}(\beta)].$$

式中,$\hat{H_L}$ 是长 L 区域内的哈密顿,而

$$\hat{\rho_L}(\beta)=\rho_0e^{-\beta\hat{H}_L}.$$

应用这些关系式,可以把(5.5.16)式写为

$$S_1^{BW}=-\mathrm{tr}[\hat{\rho}_{\mu\epsilon_z}(2\pi\mu\alpha)\ln\hat{\rho}_{\mu\epsilon_z}(2\pi\mu\alpha)].\qquad(5.5.17)$$

此式表明 S_1^{BW} 是区间 $\mu\epsilon$ 内温度为 $(2\pi\mu\alpha)^{-1}$ 的 1 维热气体的熵[由于前面说明的原因,μ 不出现在(5.5.16)式中].

此结果可以用来证明(5.5.14)式,因为密度矩阵 $\hat{\rho}_{\mu\epsilon_z}(2\pi\mu\alpha)$ 和黑洞密度矩阵 $\rho_\epsilon^{H}(\beta)$ 相合. 实际上,我们用了保持对称性(Killing 矢量)的共形变换,并没有影响边界条件. 在这些条件下,共形无质量场的哈密顿是不变的,故密度矩阵也是不变

的. 但是要注意,我们用来定义温度和距离的尺度会改变. 为了定义能量、温度等,我们必须保证 Killing 矢量的归一性. 现在我们选择(在外边界 Σ_B 处)条件$(\xi^2)_B=1$. 若共形因子 σ 在边界处不为零,则必须重新标度 $\xi^\mu \to \tilde{\xi}^\mu = \exp(-\sigma_B)\xi^\mu$,使得共形变换后,在边界处有 $\tilde{\xi}^2=1$. 我们有

$$e^{-\beta \hat{H}_L} = e^{-\tilde{\beta}\tilde{H}_{\tilde{L}}}, \tag{5.5.18}$$

式中,

$$\tilde{\beta} = \exp(-\sigma_B)\beta, \quad \tilde{H} = \exp(\sigma_B)\hat{H}.$$

$\tilde{L}$ 是共形相关度规 $\tilde{\gamma}_{\mu\nu}=e^{-2\sigma}\gamma_{\mu\nu}$ 中区间的固有长度.

特别是考虑到我们在第一步中用到的共形映射(5.3.11)和(5.3.14),(5.5.18)式给出

$$\rho_\epsilon^{\mathcal{H}}(\beta) = \rho_{\mu\epsilon_x}^{\mathcal{R}}(2\pi\mu\alpha). \tag{5.5.19}$$

式中 $\rho^{\mathcal{H}}$ 是初始黑洞密度矩阵,$\rho^{\mathcal{R}}$ 是 Rindler 空间中的热密度矩阵,其度规为

$$ds^2 = \mu^2[x^2 d\tau^2 + dx^2] = \left(\frac{X}{\mu}\right)^2 dT^2 + dX^2. \tag{5.5.20}$$

Rindler 空间的温度倒数 $2\pi\mu\alpha$ 是在边界 $X=\mu$ 处测量的,此处满足 $g_{TT}=1$. 参数 $\mu\epsilon_x$ 为内边界到视界的固有距离,用 Rindler 度规测量. 注意固有距离并非共形不变量. 最后,把 Rindler 空间映射到平直空间[相应的有效作用量的变换 $K_{\alpha,\epsilon_x}\to Q_{\alpha,\epsilon_z}$ 由(5.5.4)式给出],可以得到 Rindler 密度矩阵和区间内的密度矩阵之间的关系:

$$\rho_{\mu\epsilon_x}^{\mathcal{R}}(2\pi\mu\alpha) = \hat{\rho}_{\mu\epsilon_z}(2\pi\mu\alpha). \tag{5.5.21}$$

S_1^{BW} 的统计力学形式(5.5.14)式便可由(5.5.17),(5.5.19)和(5.5.21)式得到.

5.6 顶角奇异性方法

我们可以不去掉视界附近的 ϵ 区域,而直接研究完整的黑洞几何. 但是若 β_∞ 和 Hawking 值 β_H 不同,时空不再是规则的,因为视界 $r=r_+$(Killing 矢量的固定点)处有角亏损为 $2\pi(1-\alpha)$ 的顶角奇异性. 这样的空间在顶角处具有类 δ 的曲率. 因此,它不是真空爱因斯坦场方程的解. 我们称这空间为奇异瞬子,用 M_B^α 表示(如图 17).

直接用这一流形做单圈计算是可能的. 我们把相应的方法称为顶角奇异性方法. 所得结果和规则空间的区别在于紫外发散性的结构. 顶角奇异性导致有效作用量中出现附加的、源于视界面的发散项;重正化需要新的项. 但是重要的是这些项的数量级为

$$(\beta_\infty - \beta_H)^2 \sim (1-\alpha)^2,$$

故即壳时它们对黑洞熵和自由能均无贡献.

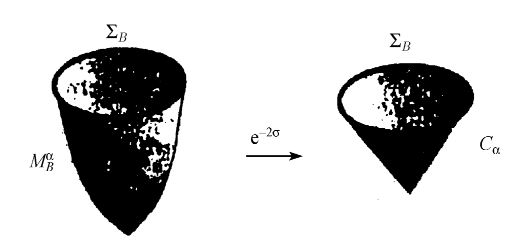


图 17

在 2 维情况下,由(5.11.2)和(5.11.3)式,可将奇异瞬子 M_B^α 上作用量的发散部分写成

$$W_l^{\text{div}}[M_B^\alpha]=-\frac{1}{8\pi\delta}\int_{M_B^\alpha}\sqrt{\gamma}\mathrm{d}x^2+\frac{\ln\delta}{12}\left[\chi[M_B^\alpha]+\frac{1}{2\alpha}(1-\alpha)^2\right]. \qquad (5.6.1)$$

$$\chi[M_B^\alpha]=\frac{1}{4\pi}\left[\int_{M_B^\alpha}R\mathrm{d}^2x+2\int_{\Sigma_B}k\mathrm{d}y+4\pi(1-\alpha)\right]. \qquad (5.6.2)$$

如(5.3.9)式一样,式中,δ 是紫外截断参数,R 是规则曲率. 量 $\chi[M_B^\alpha]$是 M_B^α 的欧拉示性数,且与 Gibbons-Hawking 瞬子相同:

$$\chi[M_B^\alpha]=\chi[M_B]=1.$$

因此,精确到$(1-\alpha)^2$,规则瞬子的发散项与奇异情况相合[比较(5.3.9)和(5.6.1)式],而其差在即壳时不影响熵. 如前,我们假设已重正化,只采用重正化的量.

现在我们用顶角奇异性方法计算离壳有效作用量 W_1^{CS} 和熵 S_1^{CS}.

与前面的讨论相似,β 为 Σ_B 处的温度倒数,$\alpha=\beta_\infty/\beta_H$ 为离壳参数. 我们再次采用共形变换(5.3.1)式. 但是现在它把奇异瞬子映射到标准锥 C_α,其母线为单位长度(以 μ 为单位):

$$\mathrm{d}s^2=\mu^2(x^2\mathrm{d}\tau^2+\mathrm{d}x^2),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant\tau\leqslant 2\pi\alpha. \qquad (5.6.3)$$

利用(5.3.11),(5.3.14)和(5.11.9)式,可以把有效作用量 W_1^{CS} 和 C_α 上的作用量联系起来. 如前,用变量(β,α,y)写出,此作用量为:

$$W_1^{CS}(\beta,r_B,r_+)=\widetilde{W}_1^{CS}(\beta,\alpha(\beta,r_B,r_+),y(r_B,r_+)). \qquad (5.6.4)$$

$$\widetilde{W}_1^{CS}(\beta,\alpha,y)=-\frac{\alpha}{48}\left[2y+13y^2-15+4\ln\frac{\beta}{2\pi\mu\alpha}\right]$$
$$-\frac{1}{24\alpha}\left[\frac{1}{y}-1-\ln y+2\ln\frac{\beta}{2\pi\mu\alpha}\right]+C(\alpha). \qquad (5.6.5)$$

式中 $C(\alpha)$是单位锥的有效作用量,当 $\alpha=1$ 时,与单位盘 D^2 的有效作用量相同:$C(\alpha=1)=C$. 函数 $C(\alpha)$不含 μ,并导致熵的一纯数项. 它的形式对我们不重要.

取即壳极限 $\alpha=1$ 时,顶角奇异性消失,故

$$\widetilde{W}_1^{CS}(\beta,\alpha=1,y)=\widetilde{W}_1(y,\beta). \qquad (5.6.6)$$

或 $\widetilde{W}_1(y,\beta)$ 是(5.3.17)给出的即壳有效作用量.

熵 S_1^{CS} 由 $\widetilde{W}_1^{CS}(\beta,\alpha,y)$ 通过(5.4.4)式确定,于是有

$$S_1^{CS}(\beta,\alpha,y)=\frac{1}{12\alpha}\left[\frac{1}{y}-1-\ln y+2\ln\frac{\beta}{2\pi\mu\alpha}\right]+C^{CS}(\alpha). \qquad (5.6.7)$$

式中,

$$C^{CS}(\alpha)=\left[\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}-1\right]C(\alpha) \qquad (5.6.8)$$

在 $\alpha=1$ 时是无关常数. 在顶角奇异性方法中,重正化作用量 W_1^{CS} 和熵 S_1^{CS} 都是有限的.

5.7　钝锥方法

考虑前页图中的奇异瞬子和一系列在顶角处几何略有变化的规则流形(如图18),这些几何,黎曼曲率处处规则,仅在视界附近和奇异瞬子不同. 我们称这种几何为“钝瞬子”,而把这种离壳延拓称为钝锥方法. 在这一方法中,可以避免无限曲率流形的量子化和重正化问题. 计算的最后才去掉顶角奇异性的规则化.

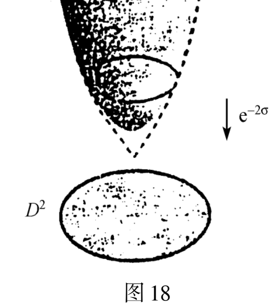


图 18

为了简化计算,我们选择离壳延拓的一种特殊形式. 它由两个参量表征:离壳参数 $\alpha=\beta_\infty/\beta_H$ 和一个新参数 η,它描述钝瞬子顶点圆化的程度. 钝瞬子度规取为

$$ds^2=\left[\frac{\beta}{2\pi}\right]^2(\rho^2d\tau^2+b^2d\rho^2),$$

$$0\leqslant\tau\leqslant2\pi,0\leqslant\rho\leqslant1; \qquad (5.7.1)$$

$$b=\frac{1}{(1-\rho^2+y\rho^2)^2}\frac{\rho^2+\alpha\eta^2}{\alpha\rho^2+\alpha\eta^2}.$$

区域的边界 Σ_B 位于 $\rho=1$,其长为 β. 如前,黑洞质量参数含于量纲为一的量 $y=r_+/r_B$ 中. 唯一确定钝瞬子的参数为 β,r_B,r_+ 和 η. 当 $\alpha=1$,此度规和G-H瞬子度规相同.

为了计算钝瞬子上重正化的单圈有效作用量,我们把这一钝瞬子映射到一单位盘 D^2 上. 首先考虑一任意的静态欧氏2维流形,其线元 ds^2 和单位盘上线元 $d\tilde{s}^2$ 共形:

$$ds^2=\left[\frac{\beta}{2\pi}\right]^2[a^2d\tau^2+b^2d\rho^2]=\exp(2\sigma)\mu^2[x^2d\tilde{\tau}^2+dx^2]. \qquad (5.7.2)$$

式中,

$$0\leqslant\tau\leqslant2\pi,\quad 0\leqslant\tilde{\tau}\leqslant2\pi,\quad 0\leqslant\rho\leqslant1,$$

$$0 \leqslant x \leqslant 1.$$

于是,度规系数 a, b 和共形因子

$$\sigma(\rho) = \ln\frac{a(\rho)}{a(1)} + \int_{\rho}^{1} d\rho \frac{b}{a} + \ln\left(\frac{\beta}{2\pi\mu}\right) \tag{5.7.3}$$

都只含 ρ. 归一化条件要求 $\sigma(1) = \ln(\beta/2\pi\mu)$ 和 $\tilde{\tau} = \tau$.

把共形反常积分(见5.11节)用于度规(5.7.2)式,得到单圈有效作用量

$$W_1^{BC} = -\frac{1}{6}\ln\left(\frac{\beta}{2\pi\mu}\right) - \frac{1}{12}\int_0^1 d\rho \frac{(a' - b)^2}{ab} - \left(\frac{a'}{4b}\right)_{\rho=1} + \frac{1}{4} + C. \tag{5.7.4}$$

这里 $a' = da/d\rho$,常数 C(与前面类似)是单位盘 D^2 的有效作用量. 在导出此式时已用到视界处度规的规则化条件 $(a'/b)|_{\rho=0} = 1$. 对于钝瞬子度规(5.7.1)式,有

$$a = \rho, \quad b = \frac{1}{(1 - \rho^2 + y\rho^2)^2}\frac{\rho^2 + \alpha\eta^2}{\alpha\rho^2 + \alpha\eta^2}, \tag{5.7.5}$$

$$\sigma = \ln\rho + \frac{1}{2}\int_{\rho^2}^{1} dz \frac{z + \alpha\eta^2}{z(\alpha z + \alpha\eta^2)(1 - z + yz)^2} + \ln\left(\frac{\beta}{2\pi\mu}\right).$$

钝锥有效作用量为

$$W_1^{BC}(\beta, r_B, r_+, \eta) = \widetilde{W}_1^{BC}(\beta, \alpha(\beta, r_B, r_+), y(r_B, r_+), \eta), \tag{5.7.6}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}_1^{BC}(\beta, \alpha, y, \eta) = {} & -\frac{1}{6}\ln\left[\frac{\beta}{2\pi\mu}\right] - \frac{(\alpha - 1)}{24\alpha}\frac{1}{(1 + \eta^2 - y\eta^2)^2}\ln\left|\frac{\eta^2}{1 + \eta^2}\right| \\
& + \frac{\alpha - 1}{24}(1 + \alpha\eta^2 - y\alpha\eta^2)^2\ln\left|\frac{\alpha\eta^2}{1 + \alpha\eta^2}\right| + \frac{1}{24}\ln|y| \\
& \times\left[1 - \frac{\alpha - 1}{\alpha}\frac{1}{(1 + \eta^2 - y\eta^2)^2}\right] \\
& + \frac{1}{24}(1 - y)\left[2\alpha - \frac{1 + \alpha\eta^2 - y\alpha\eta^2}{\alpha y(1 + \eta^2 - y\eta^2)}\right] \\
& - \frac{1}{48}\alpha(1 - y)^2[1 - 2(\alpha - 1)\eta^2] - \frac{1}{4}\times\frac{\alpha + \alpha\eta^2}{1 + \alpha\eta^2}y^2 + \frac{1}{4} + C.
\end{aligned} \tag{5.7.7}$$

参数 η 的作用类似于砖墙模式中的截断参数 ϵ. 当规则化参数 $\eta \to 0$ 时,作用量变为

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}_1^{BC}(\beta, \alpha, y, \eta) = {} & -\frac{1}{6}\ln\frac{\beta}{2\pi\mu} + \frac{1}{48}\left[-\frac{2}{\alpha y} + \frac{2}{\alpha}\ln y - 2\alpha y\right. \\
& \left. - 13\alpha y^2 + 2(\alpha - 1)\ln\alpha + \frac{2}{\alpha} + 3\alpha + 12\right] \\
& + C + \frac{1}{24\alpha}(\alpha - 1)^2\ln\eta^2 + o(\eta^2).
\end{aligned} \tag{5.7.8}$$

在即壳时($\alpha = 1$),度规(5.7.1)式变为 G-H 瞬子度规,相应的即壳有效作用量为

$$\widetilde{W}_1^{BC}(\beta,\alpha=1,y,\eta)=-\frac{1}{6}\ln\frac{\beta}{2\pi\mu}+\frac{1}{48}\left[-\frac{2}{y}+2\ln y-2y-13y^2+17\right]+C. \tag{5.7.9}$$

与(5.3.17)式给出的即壳作用量 $\widetilde{W}_1(\beta,y)$ 相同，相应的钝锥熵当 $\eta=0$ 时有限，且为

$$S_1^{BC}(\beta,1,y,0)=\frac{1}{12y}-\frac{1}{12}\ln y+\frac{1}{6}\ln\frac{\beta}{2\pi\mu}-\frac{1}{2}-C. \tag{5.7.10}$$

此结果和顶角奇异性方法得到的熵 S_1^{CS} 相同(差一个不重要的常数).

5.8　体积截断方法

本节我们再讨论一种黑洞有效作用量 W_1 的离壳定义. W_1 可以表示为某一拉格朗日密度 $\mathscr{L}_1(x)$ 对背景空间的体积分:

$$W_1=\int\sqrt{g}\,\mathrm{d}x\,\mathscr{L}(x). \tag{5.8.1}$$

相应的拉氏密度可写成热核算符在坐标表象中的对角元素的项:

$$\mathscr{L}_1(x)=-\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}s}{s}\langle x\mid \mathrm{e}^{s\Delta}\mid x\rangle, \tag{5.8.2}$$

于是,对作用量本身有标准公式

$$W_1=\frac{1}{2}\ln\det(-\mu^2\Delta)=-\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}s}{s}\mathrm{tr}\,\mathrm{e}^{s\mu^2\Delta}. \tag{5.8.3}$$

现在考虑一奇异瞬子,并对规则点 $r>r_+$ 计算 $\mathscr{L}_1(x)$. 令 Σ_ϵ 表示距视界一很小距离 ϵ 的面. 把积分限制在 Σ_ϵ 外的区域 $M_{B,\epsilon}$ 中,如图19. 于是,作用量 W_1 依赖于新参量 ϵ,我们称这一离壳方法为体积截断方法,相应的量用上标 vc 表示.

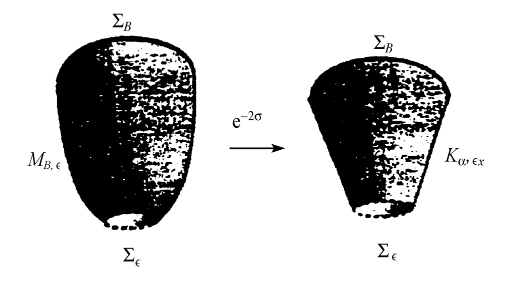


图19

体积截断方法自然地来源于黑洞熵的动力学-内部方案. 在这一方法中,黑洞的内部自由度等同于在视界附近传播的场的态. 由于视界的量子涨落,对于视界极

近处的传播模式,其量子涨落幅相对较大,故将这些模式区分为外部(在视界外传播)和内部(在视界内传播)是不可能的.因此,在此方案中计算黑洞统计力学熵时对模式的求和只能限制为视界涨落区域外的模式.这等效于上述有效作用量体积分中的截断.体积截断方法已被许多文章所采用.黑洞度规被映射到一光学(极端静态)度规上,视界则映射到无限远,此光学空间的固有体积变成无限大.为处理这种发散,很自然地要把体积分限制在一有限区域.这一方法可以就熵修正获得许多有趣的结果,即使对高于2维的空间内的有质量场和非零自旋的共形场也能做到这一点.

在某种意义上,体积截断法很像砖墙法.但它们肯定是不同的.因为体积截断法不需要在 Σ_ϵ 上满足任何边界条件.它还和比 Σ_ϵ 更接近视界的区域内的量子场行为无关.

离壳黑洞解上的拉格朗日 $\mathscr{L}_1$ 的计算可以通过到顶角空间的共形变换进行,由(5.11.9)式有

$$\mathscr{L}_1 = e^{-2\sigma}\mathscr{L}_1(C_\alpha) - \frac{1}{24\pi} \times [R\sigma - (\nabla\sigma)^2 + (2k\sigma + 3\sigma_{,\mu}n^\mu)\delta(r,r_B)]. \tag{5.8.4}$$

式中 $\mathscr{L}_1(C_\alpha)$ 是单位锥 C_α 上的拉格朗日,只对视界外的区域适用. $\delta(r,r_B)$ 是不变 δ 函数,可以在外边界处产生表面项.因子 σ 见(5.3.14)式.注意(5.11.9)式中由共形因子 σ 在顶角处的值决定的项对 W_1^{VC}[(5.8.4)式中]无贡献.

为找到 $\mathscr{L}_1(C_\alpha)$,可采用顶角空间(5.6.3)上拉普拉斯算符的热核 $K_\alpha(x,x')=\langle x|e^{s\triangle}|x'\rangle$ 的索末菲表象:

$$K_\alpha(x,x',\tilde{\tau}-\tilde{\tau}') = K(x,x',\tilde{\tau}-\tilde{\tau}') + \frac{i}{4\pi\alpha} \times \int_\Gamma \cot\left(\frac{w}{2\alpha}\right) K(x,x',\tilde{\tau}-\tilde{\tau}'+w)\,dw, \tag{5.8.5}$$

式中热核 $K(x,x',\tilde{\tau}-\tilde{\tau}')$ 是对单位盘 D^2 的.积分路径 Γ 位于复平面上,包括两条曲线,从 $\mp\pi-(\tilde{\tau}-\tilde{\tau}')\pm i\infty$ 到 $\mp\pi+(\tilde{\tau}-\tilde{\tau}')\pm i\infty$,与实轴的交点位于被积函数的极点$(-2\pi\alpha,0)$和$(2\pi\alpha)$之间.锥上的拉格朗日很容易计算,只要代入(5.8.5)和(5.8.3)式.结果很简单:

$$\mathscr{L}_1(C_\alpha) = \mathscr{L}_1(D^2) - \frac{1}{24\pi x^2}\left(\frac{1}{\alpha^2}-1\right). \tag{5.8.6}$$

式中 $\mathscr{L}_1(D^2)$ 是单位盘 D^2 上的拉格朗日密度.由于它在 W_1^{VC} 中导致一无关紧要的常数项,下面将略去它.第二项产生于(5.8.5)式中的积分,而且当 $\alpha=1$ 时为零.在这一计算中,先对 S 积分,然后再用下面的公式:

$$\frac{i}{8\pi\alpha}\int_\Gamma \frac{\cot(w/2\alpha)}{\sin^2 w/2}dw = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\alpha^2}-1\right). \tag{5.8.7}$$

令 $W_1^{VC}[C_\alpha]$ 为锥 C_α 上的有效作用量,可由(5.8.6)式积分(到点 $x=\epsilon_x$)得到. 和前面类似,ϵ_x 与到视界的距离 ϵ 的关系由(5.5.3)给出. 这一泛函为

$$W_1^{VC}[C_\alpha] = \frac{1}{12}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\ln\epsilon_x^{-1}. \tag{5.8.8}$$

于是,由(5.8.6)和(5.8.3)式得到体积截断法中的完全有效作用量.

$$W_1^{VC}(\beta, r_B, r_+, \epsilon) = W_1^{VC}[C_\alpha] - \frac{1}{24\pi}\left\{\int_{M_{B,\epsilon}}[R\sigma - (\nabla\sigma)^2] + \int_{\Sigma_B}(2K\sigma + 3\sigma_{,\mu}n^\mu)\right\}. \tag{5.8.9}$$

所以最后我们得到

$$W_1^{VC}(\beta, r_B, r_+, \epsilon) = \widetilde{W}_1^{VC}(\beta, \alpha(\beta, r_B, r_+), y(r_B, r_+), \epsilon),$$

$$\widetilde{W}_1^{VC}(\beta, \alpha, y, \epsilon) = \frac{1}{12}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\left(\ln\frac{\mu}{\epsilon} - \ln\frac{2\pi\mu\alpha}{\beta} - \frac{1}{2}\ln y - \frac{1}{2} + \frac{1}{2y}\right) + \frac{\alpha}{48\pi}\left(-\frac{2}{y} + 2\ln y - 2y - 13y^2 + 17 + 8\ln\frac{2\pi\mu\alpha}{\beta}\right) + o(\epsilon). \tag{5.8.10}$$

即壳时($\alpha=1$),发散项 $\ln\epsilon$ 为零,$\widetilde{W}_1^{VC}$ 和规则空间上的作用量(5.3.17)相同:

$$\widetilde{W}_1^{VC}(\beta, \alpha = 1, y, \epsilon) = \widetilde{W}_1(\beta, y). \tag{5.8.11}$$

由作用量(5.8.10)得到的熵为

$$S_1^{VC}(\beta, \alpha, y, \epsilon) = \frac{1}{12\alpha}\left(2\ln\frac{\mu}{\epsilon} + 2\ln\frac{\beta}{2\pi\alpha} - \ln y - 1 + \frac{1}{y}\right). \tag{5.8.12}$$

即壳时,S_1^{VC} 与顶角奇异性熵 S_1^{CS} 只差一含 ϵ 的奇异项:

$$S_1^{VC}(\beta, \alpha = 1, y, \epsilon) = S_1^{CS}(\beta, \alpha = 1, y) + \frac{1}{6}\ln\frac{\mu}{\epsilon}. \tag{5.8.13}$$

熵 S_1^{VC} 也可以写为

$$S_1^{VC}(\beta, \alpha, y, \epsilon) = \frac{1}{6\alpha}\ln\epsilon_x^{-1}. \tag{5.8.14}$$

故此量与从作用量 $W_1^{VC}(C_\alpha)$ 得到的熵相合. 这种吻合的原因是用来区分 $W_1^{VC}(\beta, \alpha, y, \epsilon)$ 和 $W_1^{VC}(C_\alpha)$ 的反常项正比于 β,且对 S_1^{VC} 没有贡献.

另外,S_1^{VC} 与尺度为 $\ln\epsilon_x^{-1}$ 的体积内的量子气体的热熵相同. 砖墙熵 S_1^{BW} 中的

$\ln\ln\epsilon^{-1}$项在体积截断熵中不出现,因为 Σ_ϵ 处量子场边界条件不必满足,而场可以自由地在边界上涨落,见 5.13 节.

5.9 离壳与即壳计算结果的比较

1. 离壳与即壳的有效作用量

本节我们讨论、比较表明黑洞热力学特征的离壳与即壳计算的结果.先讨论有效作用量的已得结果.为了表述方便,引入记号

$$\begin{aligned}U(\beta,\alpha,y) = &-\frac{1}{6}\ln\left(\frac{\beta}{2\pi\mu}\right)\\&+\frac{1}{48}\left(-\frac{2}{y}+2\ln y+17-2y-13y^2\right)\\&+\frac{\alpha-1}{48\alpha}\left(\frac{2}{y}-2\ln y-2+15\alpha-2\alpha y-13\alpha y^2\right)\\&-\frac{(\alpha-1)^2}{12\alpha}\ln\left(\frac{\beta}{2\pi\mu}\right)+\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\ln\alpha.\end{aligned} \tag{5.9.1}$$

各种离壳方法得到的有效作用量单圈贡献可写为

$$\widetilde{W}_1^{CS}(\beta,\alpha,y) = U(\beta,\alpha,y)+C(\alpha), \tag{5.9.2}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_1^{BW}(\beta,\alpha,y,\epsilon) = &U(\beta,\alpha,y)+\frac{1}{12}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\ln\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)\\&-\frac{1}{2}\ln\frac{\pi\alpha}{\ln(\beta/2\pi\alpha\epsilon)},\end{aligned} \tag{5.9.3}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_1^{BC}(\beta,\alpha,y,\eta) = &U(\beta,\alpha,y)+\frac{(\alpha-1)^2}{12\alpha}\ln\left(\frac{\eta\beta}{2\pi\alpha\mu}\right)\\&+\frac{\alpha-1}{24}\ln\alpha-\frac{\alpha-5}{4}+C,\end{aligned} \tag{5.9.4}$$

$$\widetilde{W}_1^{VC}(\beta,\alpha,y,\epsilon) = U(\beta,\alpha,y)-\frac{1}{12}\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\ln\frac{\epsilon}{\mu}. \tag{5.9.5}$$

式中,

$$y = r_+/r_B,$$

$$\alpha(\beta,r_B,r_+) = \beta/\left(4\pi r_+\sqrt{1-r_+/r_B}\right).$$

常数 C 和 $C(\alpha)$分别是单位盘 D^2 和单位锥 C_α 上的有效作用量

$$W_1 = \frac{1}{2}\ln\det(-\mu^2\Delta).$$

用同样的记号,即壳单圈有效作用量表示为

$$\widetilde{W}_1(\beta,y) = U(\beta,\alpha=1,y) + C. \tag{5.9.6}$$

比较(5.9.2),(5.9.4)和(5.9.6)式,得到

$$\widetilde{W}_1^{CS}(\beta,\alpha=1,y) = \widetilde{W}_1^{BC}(\beta,\alpha=1,y,\eta)$$
$$= \widetilde{W}_1^{VC}(\beta,\alpha=1,y,\epsilon) = \widetilde{W}_1(\beta,y). \tag{5.9.7}$$

[忽略(5.9.4)和(5.9.5)式中不重要的常数]这就是说,用顶角奇异性、钝锥、体积截断方法计算得到的单圈有效作用量的即壳值和即壳单圈有效作用量 $\widetilde{W}_1(\beta,y)$ 相同. $\widetilde{W}_1^{CS}$ 总是有限的,而 $\widetilde{W}_1^{BC}$ 和 $\widetilde{W}_1^{VC}$ 仅在即壳($\alpha=1$)时才是有限的(即不含 $\ln\eta$ 或 $\ln\epsilon$ 发散项). 唯一发散的即壳值是砖墙有效作用量 $\widetilde{W}_1^{BW}$.

(5.9.3)式可以这样解释. 回忆有效作用量 W_1^{CS} 的计算过程,先是共形映射到锥 C_α 上[见(5.6.3)式],故 W_1^{CS} 可以附加一作用量 $W_1[C_\alpha]=C[\alpha]$. 也可以映射到尺度为 ϵ 的锥 $C_{\alpha,\epsilon}$上. 这样两种计算结果是可以比较的,只要采用 $W_1[C_\alpha]$和 $W_1[C_{\alpha,\epsilon}]$的差. 而这个差值容易得,因为这两个锥互为平凡伸缩:

$$ds^2(C_\alpha) = \left(\frac{\mu}{\epsilon}\right)^2 ds^2(C_{\alpha,\epsilon}). \tag{5.9.8}$$

由(5.11.9)式得到

$$W_1[C_\alpha] = W_1[C_{\alpha,\epsilon}] + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{\alpha}+\alpha\right)\ln\frac{\epsilon}{\mu}. \tag{5.9.9}$$

于是可以把(5.9.3)写为

$$W_1^{BW}(\beta,\alpha,y,\epsilon) = W_1^{CS}(\beta,\alpha,y) - W_1[C_{\alpha,\epsilon}] + W_1^{\mathrm{Cas}}(\beta,\alpha,\epsilon). \tag{5.9.10}$$

式中

$$W_1^{Cas}(\beta,\alpha,\epsilon) = -\frac{1}{2}\ln\frac{\pi\alpha}{\ln(\beta/2\pi\alpha\epsilon)} \tag{5.9.11}$$

是 Casimir 效应的贡献. 关于这一项以及它与砖墙边界条件的关系见 5.13 节.

2. 为什么熵的即壳和离壳单圈贡献会不同

在(5.9.7)式中,所有(除砖墙)离壳有效作用量等于即壳有效作用量并不能保证相应的熵也相等. 而且正如下面我们将看到的,所有离壳计算给出的熵都与即壳熵不同. 在给出具体关系式之前,先看看这为什么会发生.

离壳计算的出发点是作为参数 β, r_B 和 r_+ 的函数的单圈作用量 W_1. 在砖墙和体积截断方法中,W_1 还含有 ϵ;在钝锥方法中,还含有 ϵ 和 η. 量 β 和 r_B 是确定这个问题的外参数. r_+ 由下面的即壳条件给出:

$$\alpha(\beta,r_B,r_+) = \frac{\beta}{4\pi r_+\sqrt{1-r_+/r_B}} = 1. \tag{5.9.12}$$

先考虑顶角奇异性方法、钝锥和体积截断方法. 它们的作用量当即壳(5.9.12)时,与(5.3.16)和(5.3.17)式给出的热力学作用量 $W_1(\beta,r_B)$相同:

$$W_1^*(\beta, r_B, r_+)|_{\alpha=1} = W_1(\beta, r_B). \qquad (5.9.13)$$

式中星号代表 CS, BC 和 VC. 热力学熵 S_1^{TD} 由(5.3.19)式给出：

$$S_1^{TD} = \beta \frac{\partial W_1(\beta, r_B)}{\partial \beta}\bigg|_{r_B} - W_1(\beta, r_B), \qquad (5.9.14)$$

而即壳熵由(5.4.1)式给出：

$$S_1^* = \beta \frac{\partial W_1^*(\beta, r_B, r_+)}{\partial \beta}\bigg|_{r_B, r_+} - W_1^*(\beta, r_B, r_+).$$

注意计算 S_1^* 时 r_+ 是固定的. 由此可得两个熵之差：

$$\Delta S^* = S_1^{TD} - S_1^* = \beta\left[\frac{\partial}{\partial\beta}W_1(\beta, r_B) - \frac{\partial}{\partial\beta}W_1^*(\beta, r_B, r_+)\right]\bigg|_{\alpha=1}. \qquad (5.9.15)$$

显然,ΔS^* 不为零. 这说明为什么在一般情况下由离壳方法得到的黑洞熵单圈贡献和由即壳作用量经热力学计算得到的贡献不同.

3. 离壳熵与即壳熵的关系

现在我们给出各种离壳熵的显式. 和前面类似,假定在做完熵的计算后令 $\alpha = 1$. 得到的熵总认为是表征系统的参数 β 和 r_B 的函数. 为了简化,我们以后略去这些说明. 也要注意,有效作用量包含任意常数,记为 C 和 $C(\alpha)$. 类似的常数当然也出现在熵中. 这些常数已出现在前面熵的表达式中. 它们可能对讨论与热力学第三定律有关的问题很重要,但对我们现在讨论的问题并不重要,因此我们将不再提及它们. 我们也略去当其他参数取极限值($\epsilon = 1, \eta = 0$)时等于零的项.

比较方便的是从顶角奇异性方法得到的熵开始讨论. 由(5.9.2)式给出的有效作用量 $W_1^{CS}(C(\alpha=1)=0)$,或者由(5.9.1)式给出的 U,得到

$$S_1^{CS} = \frac{1}{12}\left[\frac{1}{y} - 1 - \ln y + 2\ln\frac{\beta}{2\pi\mu}\right]. \qquad (5.9.16)$$

令 $$S_1^T(\epsilon) = \frac{1}{6}\ln\frac{\mu}{\epsilon}, S_1^{\text{Cas}}(\epsilon) = \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{\ln\frac{\beta}{2\pi\epsilon}}, \qquad (5.9.17)$$

则前面所得各结果可表示为

$$S_1^{BW} = S_1^{CS} + S_1^T + S_1^{\text{Cas}}, \qquad (5.9.18)$$

$$S_1^{VC} = S_1^{CS} + S_1^T, \qquad (5.9.19)$$

$$S_1^{BC} = S_1^{CS}. \qquad (5.9.20)$$

这样,钝锥方法和顶角奇异性方法给出相同的熵(有限的). 砖墙方法和体积截断方法给出的表达式含发散项 $\ln\epsilon$. S_1^{BW} 和 S_1^{VC} 之差 S_1^{Cas} 来源于两种方法边界条件的不同. 以上所有离壳熵都和(5.3.22)式给出的热力学熵单圈贡献 S_1^{TD} 不同. 后者可写为

$$S_1^{TD} = S_1^{CS} + \Delta S. \tag{5.9.21}$$

式中

$$\begin{aligned}\Delta S &\equiv \beta\left(\frac{\partial r_+}{\partial\beta}\frac{\partial W_1^{CS}}{\partial r_+}\bigg|_{\beta, r_B}\right)_{\alpha=1}\\ &= \frac{1}{48(2-3y)}(-14+26y-28y^2+13y^3)+\frac{1}{24}\ln y.\end{aligned} \tag{5.9.22}$$

(5.9.18)式可以写成另一种便于解释的形式. 由(5.5.16), (5.5.17)和(5.5.21)式可得

$$S_1^{BW} = -\operatorname{tr}[\rho_\epsilon^{\mathcal{H}}(\beta)\ln\rho_\epsilon^{\mathcal{H}}(\beta)]. \tag{5.9.23}$$

另一方面,

$$S_1^T + S_1^{\mathrm{Cas}} = S_\epsilon^R(2\pi\mu) = -\operatorname{tr}[\rho_\epsilon^{\mathcal{R}}(2\pi\mu)\ln\rho_E^{\mathcal{R}}(2\pi\mu)]. \tag{5.9.24}$$

此式就是 Rindler 空间中距视界(固有距离)ϵ 和 μ 的二镜面间无质量热辐射的熵. 距视界 μ 处测得的辐射温度为$(2\pi\mu)^{-1}$. 故有

$$\begin{aligned}S_1^{CS} = -\{&\operatorname{tr}[\rho_\epsilon^{\mathcal{H}}(\beta)\ln\rho_\epsilon^{\mathcal{H}}(\beta)]\\ &-\operatorname{tr}[\rho_\epsilon^{\mathcal{R}}(2\pi\mu)\ln\rho_\epsilon^{\mathcal{R}}(2\pi\mu)]\}.\end{aligned} \tag{5.9.25}$$

容易证明,在内镜边界(ϵ 处)存在时,只要等式右边的量是用体积截断法计算的,同样的表达式仍然成立. 对于砖墙法和体积截断法,(5.9.25)式右边的每一项当 $\epsilon\to 0$ 时都发散,但其差有限. 若形式地定义黑洞和 Rindler 度规背景中的密度矩阵

$$\rho^{\mathcal{H}}(\beta) = \lim_{\epsilon\to 0}\rho_\epsilon^{\mathcal{H}}(\beta), \rho^{\mathcal{R}}(2\pi\mu) = \lim_{\epsilon\to 0}\rho_\epsilon^{R}(2\pi\mu), \tag{5.9.26}$$

则对于体积截断法和砖墙法,有

$$\begin{aligned}S_1^{CS}(\beta,\alpha=1,y) = -\{&\operatorname{tr}[\rho^{\mathcal{H}}(\beta)\ln\rho^{\mathcal{H}}(\beta)]\\ &-\operatorname{tr}[\rho^{\mathcal{R}}(2\pi\mu)\ln\rho^{\mathcal{R}}(2\pi\mu)]\}.\end{aligned} \tag{5.9.27}$$

采用(5.9.21)式,我们最后得到

$$S_1^{TD} = -\{\operatorname{tr}[\rho^{\mathcal{H}}(\beta)\ln\rho^{\mathcal{H}}(\beta)] - \operatorname{tr}[\rho^{\mathcal{R}}(2\pi\mu)\ln\rho^{\mathcal{R}}(2\pi\mu)]\} + \Delta S. \tag{5.9.28}$$

这一关系式表明,热力学熵单圈修正可由统计力学熵用下面的方法得到:先减去 Rindler 熵以消除发散性,再加上一有限的修正项 ΔS. 在后一部分我们将证明,第二项 ΔS 就是由于背景时空的量子修正引起的经典 B-H 熵的变化.

这里应提到,为得到进入黑洞的熵流的正确表达式,Thorne 和 Zurek 提出从统计力学熵中减去黑洞热气的熵. 后者在视界附近和 S_{Rin}^{SM} 相同. (5.9.28)式可以用来证明这个假设. 但是,Thorne 和 Zurek 并未考虑我们这里讨论的熵的量子修正.

(5.9.28)式不仅解释了 S^{SM} 中的无限大体积是如何分割的,还给出了熵的量子修正依赖于物理特性的精确表达式.

4. 熵和反作用效应

含量子单圈修正的黑洞热力学熵为

$$S^{TD} = S^{\mathrm{BH}}(r_+) + S_1^{TD}. \tag{5.9.29}$$

式中

$$S^{\mathrm{BH}}(r_+) = \pi r_+^2$$

是 Bekenstein-Hawking 熵. 由于量子效应,含量子修正的"真实解$(\bar{\gamma},\bar{r})$与经典施瓦西解(γ,r)不同. 特别是,dilaton 场在 $\bar{\gamma}$ 的视界处取值$\bar{r}_+$与其经典值 r_+ 不同. 现在我们证明(5.9.29)式可以写成"

$$S^{TD} = \pi \bar{r}_+^2 + S_1^{CS}. \tag{5.9.30}$$

证明的第一步是得到决定 $\bar{r}_+$ 的方程. 对于给定的边界条件(β,r_B),欧氏有效作用量的极值点确定一规则量子解,这个解可由解场方程

$$\frac{\delta W}{\delta\bar{\gamma}} = \frac{\delta W}{\delta\bar{r}} = 0$$

得到,解中的任意常数可由视界规则条件确定,这样决定了 $\bar{r}_+$ 是(β,r_+)的函数. 对于常数的其他选择,此解有类顶角奇异性. 我们称这解为量子奇异瞬子,它遵从局域场方程,但能给出 W 的整体极值点. 量子奇异瞬子由(β,r_B)和任意参数 $\bar{r}_+$ 确定. 我们将此解记为$[\bar{\gamma}(\bar{r}_+),\bar{r}(\bar{r}_+)]$. 在量子奇异瞬子上,计算得到有效作用量为

$$W(\beta,r_B,\bar{r}_+) \equiv W[\beta,r_B,\bar{\gamma}(\bar{r}_+),\bar{r}(\bar{r}_+)]$$

$$= I[\beta,r_B,\bar{\gamma}(\bar{r}_+),\bar{r}(\bar{r}_+)] + W_1^{CS}[\beta,r_B,\bar{\gamma}(\bar{r}_+),\bar{r}(\bar{r}_-)]. \tag{5.9.31}$$

W 的整体极值条件:

$$\frac{\partial W(\beta,r_B,r_+)}{\partial r_+} = 0, \tag{5.9.32}$$

给出规则量子瞬子的视界半径 $\bar{r}_+ = \bar{r}_+(\beta,r_B)$. 在这些计算中,我们只保留到 $\hbar$ 的一阶项. 因此, 可以把(5.9.31)式中右边的第二项换成由经典奇异瞬子得到的 W_1^{CS}:

$$W_1^{CS}[\beta,r_B,\bar{\gamma}(\bar{r}_+),\bar{r}(\bar{r}_+)] \rightarrow W_1^{CS}[\beta,r_B,\gamma(\bar{r}_+),r(\bar{r}_+)].$$

也可以把(5.9.31)中经典作用量 I 中的$[\bar{\gamma}(\bar{r}_+),r(\bar{r}_+)]$替换成经典奇异瞬子解$[\gamma(\bar{r}_+),r(\bar{r}_+)]$,只要保持 dilaton 场在视界处的值 $\bar{r}_+$ 不变. 为了证明这一点,考虑经典作用量(5.3.1)的一般变分,固定 r_B 和 β,得到

$$I[\beta,r_B,\bar{\gamma},\bar{r}] = I[\beta,r_B,\gamma,r]$$

$$+ \int\left[\left.\frac{\delta I}{\delta\gamma_{ab}}\right|_{\gamma_{ab}}(\bar{\gamma}_{ab}-\gamma_{ab}) + \frac{\delta I}{\delta r}\delta r\right] + r_{,\mu}n^{\mu}|_{r=r_+}\delta r_+$$

$$-2\pi(1-\alpha)r_+\delta r_+ + o(\hbar^2). \qquad (5.9.33)$$

假设 dilaton 场在顶角处的值为 r_+，相应地由 (γ, r) 在 r_+ 处确定的角亏损记为 $2\pi(1-\alpha)$. (5.9.33) 式表明，若 γ 和 $\bar{\gamma}$ 的 r_+ 值相同，且 (γ, r) 为经典方程 $\delta I/\delta\gamma_{ab}=0$ 和 $\delta I/\delta r=0$ 的解，则由 $(\bar{\gamma}, r)$ 得到的经典作用量的值与经典值 $I[\beta, r_B, \gamma, r]$ 只差一量级为 $o(\hbar^2)$ 的项. 这就是为什么我们可以把 (5.9.31) 式中的 $I[\beta, r_B, \bar{\gamma}(\bar{r}_+), \bar{r}(\bar{r}_+)]$ 换成由经典奇异瞬子所得的值 $I(\beta, r_B, r_+)$. 后者容易计算，其表达式为

$$I(\beta, r_B, r_+) = \beta E(r_B, r_+) - \pi r_+^2, \qquad (5.9.34)$$

$$E(r_B, r_+) \equiv r_B[1-(1-r_+/r_B)^{1/2}].$$

式中 E 为准局域能量.

定义量子视界"位置" $\bar{r}_+$ 的 (5.9.32) 可写为

$$\frac{\partial W_1^{CS}(\beta, r_B, r_+)}{\partial r_+} = -2\pi\bar{r}_+(\bar{\alpha}-1). \qquad (5.9.35)$$

式中

$$\alpha = \alpha(\beta, r_B, r_+) = \beta[4\pi r_+\sqrt{1-r_+/r_B}]^{-1},$$

$\bar{\alpha}$ 为与 $r_+=\bar{r}_+$ 对应的经典离壳参数 α 的值. 对于经典规则瞬子，$\alpha=1$. 这表明精确到 $\hbar^2$，我们可以得到

$$2\pi\bar{r}_+(\bar{\alpha}-1) = 2\pi r_+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r_+}\right)_{\alpha=1}\Delta r_+. \qquad (5.9.36)$$

式中 $\Delta r_+=\bar{r}_+-r_+$，是量子修正引起的黑洞视界"位置"的改变. 由 α 的显式易得

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r_+}\right)_{\alpha=1} = -\left[\beta\frac{\partial r_+}{\partial\beta}\right]_{\alpha=1}^{-1}. \qquad (5.9.37)$$

因此有

$$2\pi r_+\Delta r_+ = \beta\left[\frac{\partial r_+}{\partial\beta}\frac{\partial W_1^{CS}}{\partial r_+}\right]_{\alpha=1}, \qquad (5.9.38)$$

且由 (5.9.22) 式得到

$$\Delta S = 2\pi r_+\Delta r_+. \qquad (5.9.39)$$

于是，精确到 $o(\hbar^2)$，量 ΔS 可以写成

$$\Delta S = S^{BH}(\bar{r}_+) - S^{BH}(r_+).$$

另一方面，考虑到 (5.9.21)，热力学熵 (5.9.29) 可以写为

$$S^{TD} = S^{BH}(r_+) + \Delta S + S_1^{CS}.$$

这些式子便证明了 (5.9.31) 式.

5.10 小　　结

现在讨论把即壳结果和各种离壳结果进行比较所得到的结果. 首先，直接计算证明了，由自由能对温度变分得到的黑洞热力学熵 S^{TD} 和由 $S^{SM}=-\mathrm{tr}(\rho^{H}\ln\rho^{H})$ $(\rho^{H}$

为黑洞内部自由度的密度矩阵)确定的统计力学熵 S^{SM} 是不同的. 热力学熵包括主体部分 $S^{\mathrm{BH}}=A/4$ 和有限单圈修正 S_1^{TD}. 而 S_1^{TD} 可以由即壳有效作用量得到. 统计力学熵 S^{SM} 定义为一单圈量,且其计算要用离壳方法. S^{SM} 可等同于体积截断熵 S_1^{VC}. 于是包含发散项 $\ln\epsilon$,其中 ϵ 是使体积分有限而引入的固有距离截断. S^{SM} 中主要对数项也出现于砖墙模型中,但一般地,由于 Casimir 效应,S_1^{BM} 中有另一发散项 $\ln|\ln\epsilon|$.

S^{TD} 和 S^{SM} 不同的物理原因与作为热力学系统的黑洞的特殊性质有关. 黑洞的内部自由度由在黑洞几何内传播的激发来确定,而这一几何又由质量参数唯一确定. 在热平衡态中,质量是外部温度的函数. 因此,要得到 S_1^{TD} 须改变温度. 这导致描述这些内部激发的哈密顿的改变. 另一方面,在计算 S^{SM} 时,黑洞质量和哈密顿是固定的.

我们已经证明,黑洞的热力学熵可以表示为下面的形式:

$$S^{TD}=S^{\mathrm{BH}}(\bar{r}_+)+[S^{SM}-S_{\mathrm{Rin}}^{SM}]. \tag{5.10.1}$$

式中 $S^{\mathrm{BH}}(\bar{r}_+)=\pi\bar{r}_+^2$ 是 B-H 黑洞的熵,$\bar{r}_+$ 是“量子”黑洞视界的“半径”. 第二项是黑洞和 Rindler 空间的统计力学熵之差. 二者的表达式分别为

$$S^{SM}=-\operatorname{tr}[\rho^{\mathcal{H}}(\beta)\ln\rho^{\mathcal{H}}(\beta)]$$

和

$$S_{\mathrm{Rin}}^{SM}=-\operatorname{tr}[\rho^{\mathcal{R}}(2\pi\mu)\ln\rho^{\mathcal{R}}(2\pi\mu)].$$

删减法则自动去掉 S^{SM} 中的发散项.

我们曾在 2 维情况下用直接计算证明了(9.10.1)式,但这似乎是普遍性质,它(或其推广)对 4 维情况肯定成立. 这是因为即壳重正化量 S^{TD} 总是有限的,故(5.10.1)式中的差项总会导致 S^{SM} 中体积发散的消除. 在 4 维情况下导出类似于(5.10.1)式的关系的一种可行方法是利用光学度规,使得所需的差项可由高温展开得到. 因此,差项中奇异项 ϵ 的不同阶的系数必须与 Schwinger-De Witt 系数相联系.

顶角奇异性方法的一个显著特点是(至少在 2 维情况下)可以立即给出有限的结果:

$$S_1^{CS}=S^{SM}-S_{\mathrm{Rin}}^{CS}. \tag{5.10.2}$$

S_1^{CS} 有限而 S_1^{VC} 含有体积发散的数学原因与用来计算相应的有效作用量的流形拓扑不同有关. 对于 S_1^{VC},标准流形有柱面(或环)的拓扑;而对于 S_1^{CS},拓扑为 D^2,与 G-H 瞬子的拓扑相同. 当从标准单位盘 D^2 上切下一半径为 ϵ 的小盘而变成环时,其数学操作可解释为减去缠绕熵 $S_{\mathrm{Rin}}^{SM}=-\operatorname{tr}(\rho^{\mathcal{R}}\ln\rho^{R})$.

再次强调,在我们所采用的方法中,一开始就已经完成了重整,故只有可观测的有限耦合常数出现于结果中. 我们论证了某些离壳方法需要附加一截断参数 ϵ. 它与紫外截断 δ 完全无关,见(5.3.9)式和(5.6.1)式. 而且参数 ϵ 只出现在中间

运算过程中,不含于最后的可观测结果中.我们证明了物理可观测量的量子修正总可由即壳量得到.于是,对于质量远大于普朗克质量的黑洞而言,可观测量的量子修正很小,与普朗克尺度的物理无关.这就区分了即壳量和离壳量,如 S^{SM}.

还有一个更一般的问题要说明.既然表征热平衡黑洞或表征黑洞从一平衡态到另一平衡态的跃迁的可观测量可以只由即壳量得到,那么为什么在黑洞热力学中还要用离壳方法呢?我们已经看到,原因之一是建立统计力学熵和热力学熵之间关系的需要,在这个意义上,离壳方法可以看作计算和解释即壳量的有用工具.但我们相信,除了这个简单的理由以外,一定还有更深层次的原因.离壳方法对描述含黑洞系统的非平衡过程也会是有用的.在这种情况下,热力学系统的量子涨落和热涨落可由随机噪声来描述,这相当于系统离壳情况.因此,可以想到,由视界附近能量激增而激发的黑洞向平衡态过渡的过程,会用到某些上述的离壳特性.

下面三节相当于前面推导过程的附录.为了使前几节的内容更集中,把它们抽出来放在后面.

5.11　二维有效作用量的共形变换

为了完整,本节推导下面有效作用量的共形变换:

$$W_1[\gamma] = \frac{1}{2}\ln\det[-\Delta] = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{s}\mathrm{tr}(e^{s\Delta}), \tag{5.11.1}$$

它定义在 2 维欧氏流形 M_α 上,其边界为 ∂M_α,M_α 在点 x_s 处有顶角奇异性,亏损角为 $2\pi(1-\alpha)$.我们考虑 d 维空间共形不变算符 $D=\Delta-(d-2)[4(d-1)]^{-1}R$ 的有效作用量 W_1.它的发散部分 W_1^{div} 可由渐近热核展开得到

$$\mathrm{tr}(e^{SD}) = \frac{1}{(4\pi s)^{d/2}}\sum_{n=0,1/2,\cdots}^{\infty} a_n^{(d)} s^n. \tag{5.11.2}$$

在 2 维情况下,对维数规则

$$W_1^{\mathrm{div}} = \frac{1}{d-2}\frac{a_1^{(d)}}{4\pi}. \tag{5.11.3}$$

式中对于任意 α 有

$$a_1^{(d)} = \left(\frac{1}{6}-\frac{d-2}{4(d-1)}\right)\int_{M_\alpha} R + \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)\int_\Sigma + \frac{1}{3}\int_{\partial M_\alpha} k. \tag{5.11.4}$$

这里,奇点 x_s 被维数为 $d-2$ 的奇异面 Σ 代替,标曲率 R 的积分沿着 M_α 的规则部分,k 是类空边界 ∂M_α 的第二基本形式,定义为 $k=\nabla^\mu n_\mu$.

重正化作用量由非重正化(裸)作用量 W_1^{bare} 和它的发散部分 W_1^{div} 之差确定:

$$W_1 = W_1^{\mathrm{bare}} - W_1^{\mathrm{div}}. \tag{5.11.5}$$

在 M_α 上度规共形变换($\tilde{r}_{\mu\nu}=e^{-2\sigma}\gamma_{\mu\nu}$)下,重正化作用量变为

$$W_1(\tilde{\gamma}) - W_1(\gamma) = \frac{1}{4\pi}\lim_{d\to 2}\frac{1}{2-d}\left[a_1^{(d)}(\tilde{\gamma}) - a_1^{(d)}(\gamma)\right]. \quad (5.11.6)$$

我们只考虑不“挤压”顶角奇异性的那些变换.于是利用关系式:

$$\tilde{R} = e^{2\sigma}\{R + (d-1)[2\Delta\sigma + (2-d)\sigma_{,\alpha}\sigma^{,\alpha}]\}, \quad (5.11.7)$$

$$\tilde{k} = e^{\sigma}[k - (d-1)\sigma_{,\mu}n^{\mu}]. \quad (5.11.8)$$

由(5.11.6)式得到

$$W(\tilde{\gamma}) - W(\gamma) = \frac{1}{24\pi}\left[\int_{M_\alpha}dx[R\sigma - (\nabla\sigma)^2]\right.$$
$$\left. + \int_{\partial M_\alpha}dx(2k\sigma + 3\sigma_{,\mu}n^{\mu})\right] + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)\sigma(x_s), \quad (5.11.9)$$

这就是期望的有效作用量的共形变换;如果流形在几个点 x_s 处有顶角奇异性,角亏损为 $2\pi(1-\alpha_s)$,则(5.11.9)式中最后一项应换成对所有 x_s 求和.若流形无顶角奇异性,此项为零($\alpha=1$),(5.11.9)式可以写成另一等价形式:

$$W(\tilde{\gamma}) - W(\gamma) = \frac{1}{48\pi}\int_{M_\alpha}d^2x\sigma(\tilde{\gamma}^{1/2}\tilde{R} + \gamma^{1/2}R)$$
$$+ \frac{1}{24\pi}\int_{\partial M_\alpha}dx\sigma(\tilde{h}^{1/2}\tilde{k} + h^{1/2}k)$$
$$- \frac{1}{8\pi}\int_{\partial M_\alpha}dx(\tilde{h}^{1/2}\tilde{k} - h^{1/2}k) + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)\sigma(x_s). \quad (5.11.10)$$

式中

$$h^{1/2}k - \tilde{h}^{1/2}\tilde{k} = h^{1/2}n^{\alpha}\partial_{\alpha}\sigma,$$

共形因子 σ 应理解为方程

$$-2\gamma^{1/2}\Box\sigma = \gamma^{1/2}R - \tilde{\gamma}^{1/2}\tilde{R}$$

的解.

5.12 二维标量场的有效作用量和自由能

考虑 2 维流形上的共形无质量标量场 ϕ.设度规不含欧氏时间,可写为

$$ds^2 = \exp[2\sigma(x)]\{d\tau^2 + dx^2\}, 0 \leqslant \tau \leqslant \beta, x_0 \leqslant x \leqslant x_1. \quad (5.12.1)$$

共形标量场满足

$$\Delta\phi = \exp[-2\sigma(x)]\left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\}\phi = 0. \quad (5.12.2)$$

为了简单,我们考虑具有狄里克雷边界条件 $\phi(x_0) = \phi(x_1) = 0$ 的问题.

利用有效作用量的共形变换(见 5.11 节),可以把流形(5.12.1)式上的有效作用量计算简化为柱面 Q 上的计算.Q 在欧氏时间上有周期 β,长为 $L = x_1 - x_0$.柱面的单圈有效作用量 $W_1^Q(\beta, L)$ 可写成

$$
\begin{aligned}
W_1^Q(\beta,L) &= \frac{1}{2}\ln\det(-\mu^2\Delta) \\
&= -\frac{1}{2}\zeta'(0)+\frac{1}{2}\zeta(0)\ln\mu^2 \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial z}\sum_{\lambda}(\mu^2\lambda)^{-z}\right]_{z=0}.
\end{aligned}
$$

式中 μ 为一任意参数,量纲为长度,广义函数 $\zeta(z)=\Sigma_\lambda[\mu^2\lambda]^{-z}$表示对算符 Δ 的所有本征值 λ 求和. 虽然有效作用量中 μ 有伸缩不确定性,但所有物理量都是有确定定义的. 对于狄里克雷边界条件,把柱面拉普拉斯算符的本征值

$$\lambda_{mn}=(2\pi/\beta)^2n^2+(\pi/L)^2m^2$$

代入,得到

$$
\begin{aligned}
W_1^Q(\beta,L) &= -\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\mu^2\left(\frac{4\pi^2}{\beta^2}n^2+\frac{\pi^2}{L^2}m^2\right)\right]^{-z}\right\}_{z=0} \\
&= -\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\prod_{m=1}^{\infty}\prod_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{2\pi\mu}{\beta}n\right)^{-2z}\left(1+\frac{\beta^2}{4L^2}\frac{m^2}{n^2}\right)^{-z}\right\}_{z=0}. \qquad (5.12.3)
\end{aligned}
$$

应用式

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)=\frac{sinh\pi\alpha}{\pi\alpha}, \qquad (5.12.4)$$

并把其余的无限和与积用黎曼 ζ 函数的项表示,最后得到

$$W_1^Q(\beta,L)=\beta\mathscr{F}-\frac{\pi\beta}{24L}, \qquad (5.12.5)$$

式中

$$\beta\mathscr{F}=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left[1-\exp\left[-\beta\frac{\pi}{L}n\right]\right]. \qquad (5.12.6)$$

现在证明 $\mathscr{F}$ 就是体积 L 中标量粒子气体的热力学自由能. 在统计力学中,系统的自由能定义为

$$\exp[-\beta\mathscr{F}]=\mathrm{tr}\exp[-\beta{:}\hat{H}{:}]. \qquad (5.12.7)$$

若选取哈密顿$\hat{H}=\sqrt{-\partial_x^2}$的本征函数为基函数,自由能可写为对所有动力学自由度求和:

$$\beta\mathscr{F}=\sum_n\ln(1-e^{-\beta\omega_n}). \qquad (5.12.8)$$

式中 β 为温度倒数,ω_n 为量子系统的能级. 这样,只要知道系统的能谱,便可以计算自由能. (5.12.2)式容易解出,并得到系统的能级:

$$\omega_n=\frac{\pi}{L}n,\quad L=x_1-x_0.$$

注意 $n=0$ 的模式应从(5.12.8)式的求和中去掉,因为其幅由狄里克雷边界条件

确定,因而不是可重正化的,不是一个动力学自由度(对于 Newmann 边界条件,零模式将会对自由能有贡献).

所以,对于狄里克雷边界条件,自由能为

$$\mathscr{F} = \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \exp\left(-\beta \frac{\pi}{L} n\right)\right),$$

与(5.12.6)式相同.

现在我们考虑高温极限,即柱长 L 远大于 β. 在这一极限条件下,能级之间的距离远小于温度:$\pi/L \ll 1/\beta$,对于 n 的求和可以用欧拉－麦克劳林公式计算:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_0^{\infty} \mathrm{d}x f(x) - \int_0^1 \mathrm{d}x f(x) + \frac{1}{2} f(1) + \sum_{n=1}^{\infty} c_k f^{(k)}(1).$$

式中系数 c_k 可用伯努利数

$$c_k = (-1)^k \frac{B_{k+1}}{(k+1)!}$$

表示,并假设函数 $f(x)$ 连同它的所有导数在无限远处减小. 把函数式

$$f(x) = \ln[1 - \exp(-sx)]$$

代入,考虑到关系式

$$\ln\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\ln(z) - z + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)(2m-1)z^{2m-1}},$$

$$|\arg z| < \pi,$$

可以证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - \exp[-sn]) = -\frac{\pi^2}{6s} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{s}{2\pi}\right) + \frac{1}{24}s + o(s). \quad (5.12.9)$$

对于自由能,可得

$$\beta\mathscr{F} = -\frac{\pi L}{6\beta} - \frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{2L} + \frac{\pi\beta}{24L} + o\left(\frac{\beta}{L}\right). \quad (5.12.10)$$

有效作用量为

$$W_1^Q = -\frac{\pi L}{6\beta} - \frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{2L} + o\left(\frac{\beta}{L}\right). \quad (5.12.11)$$

可以证明,表达式 $o(\beta/L)$ 不是解析的,且当 $\beta \leqslant L$ 时很快趋于零.

注意,就构成而言,共形场的 $\beta\mathscr{F}$ 是共形不变的,因为能谱是共形不变的. 这一性质把它和欧氏有效作用量 W_1 区别开. 重正化的有效作用量 $W_1^Q(\beta,L)$ 和 $\beta\mathscr{F}$ 只差 $-\beta$ 的线性项.

5.13　砖墙边界附近的 Casimir 效应和场涨落

本节我们详细讨论视界附近边界处的场涨落及其和砖墙方法中出现的 Casimir 效应之间的关系. 这里不考虑黑洞背景, 而考虑 Rindler 空间中的量子场, 在 $x=1$ 处测得温度的倒数为 $2\pi\alpha$, 且令 $\mu=1$. 这一简化是可行的, 因为我们只对视界附近[空间类似一个锥(5.6.3)]发生的效应感兴趣.

假设砖墙位于点 $x=\epsilon$ 处, 于是砖墙有效作用量就是 C_α 的 $K_{\alpha,\epsilon}$ 部分上的作用量, 如图 20.

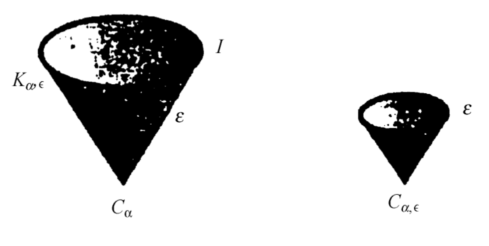


图 20

这样, 由(5.5.6), (5.5.7)和(5.9.9)式, 对圆锥而言, 与(5.9.10)式对应的式子为

$$
\begin{aligned}
W_1^{BW}(\alpha,\epsilon) &= W_1[K_{\alpha,\epsilon}] \\
&= W_1[C_\alpha] - W_1[C_{\alpha,\epsilon}] + W_1^{\mathrm{Cas}}(2\pi\alpha,\alpha,\epsilon), \\
W_1^{\mathrm{Cas}}(2\pi\alpha,\alpha,\epsilon) &= -\frac{1}{2}\ln\frac{\pi\alpha}{\ln\epsilon^{-1}}.
\end{aligned}
\tag{5.13.1}
$$

现在我们的任务是分析 Casimir 项 $W_1^{\mathrm{Cas}}(2\pi\alpha,\alpha,\epsilon)$ 是如何与 $x=\epsilon$ 附近的量子涨落相联系的. 故首先分析 C_α 上配分函数的路径积分表示:

$$
\begin{aligned}
Z_1[C_\alpha] &= \mathrm{e}^{-W_1[C_\alpha]} = \int[D\phi]\mathrm{e}^{-I[\phi]} \\
&= \int[D\phi]\exp\left(-\frac{1}{2}\int\phi_{,\mu}\phi^{,\mu}\right).
\end{aligned}
\tag{5.13.2}
$$

我们可以把所有的变量分成三组:

$$
Z_1[C_\alpha] = \int[D\phi_1][D\psi][D\phi_2]\mathrm{e}^{-I[\phi]}. \tag{5.13.3}
$$

式中 ϕ_1 和 ϕ_2 分别为区域 $x<\epsilon$ 和 $x>\epsilon$ 内的场, 而 $\psi=\phi(x=\epsilon)$. 在每一组, 可以作变换

$$\phi_k = \phi'_k + \chi_k, \tag{5.13.4}$$

$$\Delta\chi_k = 0, \quad \chi_k(x=\epsilon) = \psi, \quad k = 1,2, \quad \chi_2(x=1) = 0. \tag{5.13.5}$$

新变量 ϕ'_k 满足狄里克雷边界条件. 由此并考虑到场 χ_k 是谐和的,可以把经典作用量表示为

$$I[\phi_1 + \phi_2] = I[\phi'_1] + I[\phi'_2] + W[\psi]. \tag{5.13.6}$$

式中

$$W[\psi] = I[\chi_1] + I[\chi_2],$$

当

$$\chi_1(x=\epsilon) = \chi_2(x=\epsilon) = \psi,$$

现在,配分函数表示成乘积形式:

$$Z_1[C_\alpha] = \int[D\phi'_1]\mathrm{e}^{-I[\phi'_1]}\int[D\psi]\mathrm{e}^{\int W[\psi]}\int[D\phi'_2]\mathrm{e}^{-I[\phi'_2]}$$

$$= Z[C_{\alpha,\epsilon}]Z[K_{\alpha,\epsilon}]\int[D\psi]\mathrm{e}^{-\int W[\psi]}. \tag{5.13.7}$$

(5.13.7)式中第一个因子是半径为 ϵ(很小)的锥上的配分函数,第二个因子是空间 $K_{\alpha,\epsilon}$上的配分函数,由砖墙模型作用量 $W_1^{BW}(\alpha,\epsilon)$决定:

$$Z[K_{\alpha,\epsilon}] = \mathrm{e}^{-W_1[K_{\alpha,\epsilon}]} = \mathrm{e}^{-W_1^{BW}(\alpha,\epsilon)}. \tag{5.13.8}$$

对 ψ 的积分描述点 $x=\epsilon$ 处场的量子涨落. 我们证明,正是这一积分产生了有效作用量中的 Casimir 项. 实际上,(5.13.5)式具有如下解:

$$\chi_1(x,\tau) = \sqrt{\frac{1}{\pi\alpha}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\psi_n^{(1)}\cos\frac{n\tau}{\alpha} + \psi_n^{(2)}\sin\frac{n\tau}{\alpha}\right)\left(\frac{x}{\epsilon}\right)^{n/\alpha}, \tag{5.13.9}$$

$$\chi_2(x,\tau) = \sqrt{\frac{1}{\pi\alpha}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\psi_n^{(1)}\cos\frac{n\tau}{\alpha} + \psi_n^{(2)}\sin\frac{n\tau}{\alpha}\right)$$

$$\times\left(\frac{\epsilon}{x}\right)^{n/\alpha}\frac{1-x^{2n/\alpha}}{1-\epsilon^{2n/\alpha}} + \frac{\psi_0}{\sqrt{2\pi\alpha}}\ln x/\epsilon. \tag{5.13.10}$$

式中 $\psi_n^{(k)}$,ψ_0 是边界上场 ψ 的傅里叶系数:

$$\psi(\tau) = \sqrt{\frac{1}{\pi\alpha}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\psi_n^{(1)}\cos\frac{n\tau}{\alpha} + \psi_n^{(2)}\sin\frac{n\tau}{\alpha}\right) + \frac{\psi_0}{\sqrt{2\pi\alpha}}, \tag{5.13.11}$$

它们由圆 $0\leqslant R\leqslant 2\pi\alpha$ 上的正交基确定. 精确到 $o(\epsilon)$项,上式给出作用量,形式为

$$W[\psi] = I[\chi_1] + I[\chi_2]$$

$$= \frac{1}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}[(\psi_n^{(1)})^2 + (\psi_n^{(2)})^2] + \left(2\ln\frac{1}{\epsilon}\right)^{-1}\psi_0^2 + o(\epsilon). \tag{5.13.12}$$

对 ψ 的积分具有高斯形式,可以精确求值. 积分测度(差一归一化数字系数)可写为

$$[D\psi] = \epsilon^{1/2} \mathrm{d}\psi_0 \prod_{n=1}^{\infty} \epsilon^{1/2} d\psi_n^{(1)} \prod_{n=1}^{\infty} \epsilon^{1/2} d\psi_n^{(1)}. \qquad (5.13.13)$$

式中乘数 $\epsilon^{1/2}$ 的出现是由于含有因子 $g^{1/4}$(在 $x=\epsilon$ 处)的协变测度. 这样,对场 ψ 的积分结果是

$$\int [D\psi] \mathrm{e}^{-\int W[\psi]} = N\left(\epsilon \ln \frac{1}{\epsilon}\right)^{1/2} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \ln(\alpha\epsilon)\right). \qquad (5.13.14)$$

式中 N 为数字常数. 用黎曼 zeta 函数

$$\sum_{n=1}^{\infty} = \lim_{z\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} = \zeta_R(0) = -\frac{1}{2}$$

把(5.13.14)式中的无穷和规则化以后,给出 Casimir 项

$$\int [D\psi] \mathrm{e}^{-\int W[\psi]} = \mathscr{N}\left(\frac{\ln\epsilon^{-1}}{\alpha}\right)^{1/2} = N\mathrm{e}^{W_1^{\mathrm{Cas}}(\alpha,\epsilon)}. \qquad (5.13.15)$$

由(5.3.7)和(5.3.15)式得到

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-W_1[C_\alpha]} &= Z_1[C_{\alpha,\epsilon}] Z[K_{\alpha,\epsilon}] \mathrm{e}^{W_1^{\mathrm{Cas}}(\alpha,\epsilon)} \\ &= \exp\{-(W[C_{\alpha,\epsilon}] + W[K_{\alpha,\epsilon}] - W_1^{\mathrm{Cas}}[\alpha,\epsilon])\}. \qquad (5.13.16) \end{aligned}$$

此式显然给出了砖墙模型作用量 W_1^{BW} 和锥上作用量 $W_1[C_\alpha]$之间的关系[(5.9.1)式],我们在前面曾经用共形变换得到过.

本章的后一部分讨论荷电黑洞的量子修正.

首先从 4 维爱因斯坦 - 麦克斯韦理论出发,通过球对称退化,得到荷电黑洞的 2 维模型,并讨论其量子修正. 考虑任意温度的系统,用离壳方法重新表述了经典热力学. 考虑视界处存在顶角奇异性,引力作用量也应有一定义在视界处的修正项. 作用量泛函的变分程序得到自洽表述. 我们发现对于规则流形($T=T_H$)自由能取极值. 还重新审查了对作用量的单圈贡献(Liouville-Polyakov 形式),从而建立 L-P 项对量子场状态的依赖关系,得到有顶角亏损的 2 维时空对 L-P 项的修正. 还要讨论 Hawking 辐射(详见下一章)对时空几何的反作用,并用微扰方法计算量子修正的黑洞度规. 在离壳框架下,得到单圈热力学能量和熵. 揭示它们都包含两部分:一部分来自黑洞周围的热气体,一部分来自黑洞本身. 而且热气体的贡献可以通过适当选择参考几何(一般是非平直的)来消除. 对量子修正的黑洞,得到熵与视界面积关系对经典定理的偏离,还将讨论其可能产生的物理效应.

在黑洞物理中,量子效应有双重作用. 半经典地看,可认为黑洞被 Hawking 辐射所包围,此辐射在远处变成热态的[热浴(heat bath)]. 由于辐射具有能 - 动张量,其反作用导致黑洞几何的改变. 另一方面,量子修正将改变有效作用量,这又将导致计算黑洞能量和熵的公式的改变. 几何的量子修正会影响黑洞参量,如视界半径;因而会带来数量级为 $\ln M$ 的修正,这是不能忽略的. 因此,当考虑黑洞量子热力学时,必须包括反作用效应.

2 维物理研究得不少,上述问题也可以精确求解. 2 维非定域的 L-P 作用量把 Hawking 辐射及其对几何的反作用都可以包括进来. 因此,在经典引力作用量中加入 L-P 项将给出黑洞的完全半经典描述. 有一点应该强调,即 L-P 作用量有某些不确定性,除非具体说明量子场的状态. 在黑洞和热辐射平衡的情况下,则要说明远处的热澡. 结果有效作用量依赖于量子场的热态. 原则上,这个态可以由一温度(非霍金温度)所表征. 一个由来已久的明显事实是,这样的态可以有效地用奇异瞬子上的量子场来描述. 这可能解决了为什么欧氏奇异性方法(见前节)给出了黑洞热力学的合理表述.

我们下面将从含边界项的 4 维爱因斯坦-麦克斯韦理论开始. 接着考虑球对称度规,令此模型退化为一个有效的 2 维模型(dilaton 类). 其经典解描述著名的 R-N 荷电黑洞.

5.14 四维爱因斯坦-麦克斯韦理论的球对称退化

考虑与麦克斯韦场耦合的 4 维爱因斯坦引力. 其作用量为(取欧氏号差)

$$W_{cl} = -\frac{1}{16\pi G}\int_{M^4} R^{(4)}\sqrt{g}\,d^4x + \frac{1}{16\pi G}\int_{M^4} F_{\mu\nu}^2\sqrt{g}\,d^4x - \frac{1}{8\pi G}\int_{\partial M^4} K^{(4)}\sqrt{h}\,d^3x. \quad (5.14.1)$$

式中 $R^{(4)}$ 是 4 维标曲率. 我们加入了边界项. $K^{(4)}$ 是边界 ∂M^4 的外曲率的迹. 若 n^μ 是垂直于 ∂M^4 的外单位矢,我们有

$$K^{(4)} = \nabla_\mu n^\mu. \quad (5.14.2)$$

当边界 ∂M 趋于无穷远时,作用量(5.14.1)发散. 单圈有效作用量也同样. 因此需要某种删除法则. 一般地,可以把这个发散量和定义在特定背景时空中的同一个量进行比较;若 $g^0_{\mu\nu}$ 为背景度规,我们定义删减后的表达式为

$$W_{sub} = W[g_{\mu\nu}] - W[g^0_{\mu\nu}]. \quad (5.14.3)$$

式中 W 包括经典项(5.14.1)和单圈引力作用量. 在量子的情况下,必须考虑减掉渐近非平直参考度规. 因此我们讨论任意的参考系(背景).

第一个目标是在球对称时空的情况下约化作用量(5.14.1). 球对称度规为

$$ds^2 = \gamma_{\alpha\beta}(z)dz^\alpha dz^\beta + r^2(z)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (5.14.4)$$

式中 $\alpha,\beta,\cdots=0,1$;$\gamma_{\alpha\beta}(z)$ 是有效 2 维空间 M^2 上的度规;$z^\alpha=(\tau,x)$ 和 $r^2(z)$ 是 M^2 上的标量场. 对于度规(5.14.4),曲率标量为

$$R^{(4)} = R^{(2)} + \frac{2}{r^2}(\nabla r)^2 - \frac{2}{r^2}\Box r^2 + \frac{2}{r^2}. \quad (5.14.5)$$

式中所有的几何量都是由2维度规定义的.

对于球对称情况,M^4 的边界∂M^4 是一直积$\partial M^4 = \partial M^2 \times S^2$,其中$\partial M^2$ 是2维空间 M^2 的边界,S^2 是2维球. 法矢 n^μ 只在与 M^2 相切的方向上才有非零分量,$n^\mu = (n^\alpha, 0, 0)$. 因此,对边界的外曲率之迹(5.14.2),我们有

$$K^{(4)} = k + 2n^\alpha \frac{\partial_\alpha r}{r},$$

$$k \equiv \nabla_\alpha n^\alpha \equiv \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_\alpha(\sqrt{\gamma} n^\alpha) = \partial_\alpha n^\alpha + \frac{1}{2\gamma}\partial_\alpha \gamma n^\alpha. \tag{5.14.6}$$

式中 $\gamma = \det\gamma_{\alpha\beta}$. 如果度规又是静态的,则可写成施瓦西形式:

$$\mathrm{d}s^2 = g(x)\mathrm{d}\tau^2 + g^{-1}(x)\mathrm{d}x^2 + r^2(x)(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2). \tag{5.14.7}$$

于是 $n^\alpha = (0, g^{1/2})$,且有

$$K^{(4)} = k + \frac{2}{r}r' g^{1/2}, \quad k = (g^{1/2})'.$$

和我们的球对称假设一致,麦克斯韦场与 M^2 相切,即规范曲率的唯一非零分量为 $F_{\tau r} \neq 0$.

由于方程(5.14.1)中对 θ, φ 积分导致

$$\int \sqrt{g}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 4\pi r^2 \sqrt{\gamma},$$

我们最终得到

$$W_{c1} = -\frac{1}{4G}\int_{M^2}[r^2 R + 2(\nabla r)^2 + 2]\sqrt{\gamma}\mathrm{d}^2 z$$

$$+ \frac{1}{4G}\int_{M^2} r^2 F_{\alpha\beta}^2 \sqrt{\gamma}\mathrm{d}^2 z - \frac{1}{2G}\int_{\partial M^2} r^2 k\mathrm{d}^2 z. \tag{5.14.8}$$

2维情况下,$F_{\alpha\beta}$只有一个分量

$$F_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta}F. \tag{5.14.9}$$

式中 $\epsilon_{\alpha\beta}$为勒维－西维塔张量. 故从麦克斯韦方程得到

$$\nabla_\alpha(r^2 F^{\alpha\beta}) = 0, \quad F = \frac{Q}{r^2}, \quad Q = \text{const.}. \tag{5.14.10}$$

式中 Q 为电荷.

把(5.14.9)和(5.14.10)式代入作用量(5.14.8),我们发现整个理论退化为2维 dilaton 引力:

$$W_{c1} = -\frac{1}{4G}\int_{M^2}[r^2 R + 2(\nabla r)^2 + 2U(r)]\sqrt{\gamma}\mathrm{d}^2 z$$

$$- \frac{1}{2G}\int_{\partial M^2} r^2 k. \tag{5.14.11}$$

式中场 $r^2(z)$起 dilaton 场的作用,dilaton 势为

$$U(r) = 1 - \frac{Q^2}{r^2}. \tag{5.14.12}$$

到欧氏度规的 Wick 转动伴随着相应的电荷复化 $Q \to iQ$,只要假设最后又回到实的 Q 即可. 记住这些,我们就可以使用表达式(5.14.11)和(5.14.12),其中 Q 已经是实数. 把作用量(5.14.11)对 dilaton r^2 变分,得到 dilaton 运动方程

$$rR - 2\Box r + U'_r = 0, \tag{5.14.13}$$

对度规 $\gamma_{\alpha\beta}$ 取变分则给出

$$G_{\alpha\beta} \equiv -2r\nabla_\alpha\nabla_\beta r + \gamma_{\alpha\beta}[\Box r^2 - (\nabla r)^2 - U] = 0. \tag{5.14.14}$$

(5.14.14)式表明矢量 $\xi_\alpha = \epsilon_\alpha^\beta \partial_\beta r$ 是一 Killing 矢量. 在 $(\nabla r)^2 \neq 0$ 的区域,Killing 时间 $t(\xi^\alpha \partial_\alpha = \partial_t)$ 和 r 可作为 M^2 的坐标. 方程 $G_\tau^\tau - G_r^r = 0$ 意味着其度规为

$$ds^2 = g(r)d\tau^2 + \frac{1}{g(r)}dr^2. \tag{5.14.15}$$

方程(5.14.14)的迹为

$$\Box r^2 = 2U(r). \tag{5.14.16}$$

这一关系式给出

$$\begin{aligned} g(r) = g_{cl}(r) &= \frac{1}{r}\int^r U(r')dr' \\ &= 1 - \frac{2MG}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = \frac{(r - r_+)(r - r_-)}{r^2}. \end{aligned} \tag{5.14.17}$$

式中 M 是积分常数,恰为 ADM(Arnowitt - deser - misner)质量,$r_\pm = MG \pm \sqrt{M^2G^2 - Q^2}$ 是外内视界半径.

5.15 Tree-Level 黑洞热力学

欧氏作用量(5.14.11)是表述经典黑洞热力学的出发点. 描述场系统热力学性质的标准程序是通过 Wick 转动变到欧氏空间,闭合 τ 使具有周期 $2\pi\beta = T^{-1}$,T 是系统温度. 假设系统处在长 L 的盒子里. 原则上场位形不需满足任何场方程. 只有在要求适当边界条件下的自由能泛函取极值时,场才满足场方程.

类似地,黑洞热力学可以用离壳的方式表述. 考虑一般形式的欧氏静态度规

$$ds^2 = g(x)d\tau^2 + \frac{e^{-2\lambda(x)}}{g(x)}dx^2. \tag{5.15.1}$$

式中 $0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi\beta$;$x_+ \leqslant x \leqslant L$. 下面我们假设外边界位于 $x = L$,而 $x = x_+$ 是视界位置.

系统的温度在边界处是固定的,可写成与坐标无关的形式:$T^{-1} = \int d\tau \sqrt{g_{00}}|_{x=L}$. 系统也由 dilaton 场在边界处的取值 $r_B = r|_{x=L}$ 来表征. 由于系统包含

非极端黑洞,故在某些点 $x=x_+$(视界)函数 $g(x)$ 有单纯零点:$g(x_+)=0$. 在这种情况下,(5.15.1)描述的空间的欧拉示性数固定为 $x=1$,因此,系统由以下量表征:①固定外边界处的 T 和 γ_B;②固定黑洞拓扑. 这一统计系综包括所有满足这些条件的函数(g,γ,r). 这种形式的任意度规,$\beta_H\equiv(2e^{-\lambda}/g')_{x=x_+}$是度规的泛函而不被上述条件确定. 一般情况下,这样的度规描述在视界 $x=x_+$ 处具有顶角奇异性的欧氏空间,其角亏损为 $\delta=(1-\alpha)2\pi$,式中 $\alpha=\bar{\beta}/\beta_H$. 这意味着曲率标量中有来自顶角的类 δ 项:

$$R^{(2)}=2\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\delta(x-x_+)+\bar{R}^{(2)},\quad \alpha=\frac{\bar{\beta}}{\beta_H}. \tag{5.15.2}$$

式中 $\bar{R}^{(2)}$ 是曲率标量的规则部分. 当 $\alpha=1$ 时,顶角奇异性消失. 注意,仅 $\alpha=\bar{\beta}/\beta_H$ 有不变的意义,而 β_H 和 $\bar{\beta}$ 是和坐标有关的.

我们这里所用的方法与已有的工作不同,由条件(1)和(2)确定的统计系统既包括规则度规又包含有顶角奇异性的度规. 对于一般的度规(具有任意的 α),由方程(5.15.2),可将经典作用量(5.14.11)改写为

$$W_{cl}=-\frac{1}{4G}\int_M\left[r^2\bar{R}+2(\nabla r)^2+2U(r)\right]\sqrt{\gamma}\mathrm{d}^2z$$

$$-\frac{1}{2G}\int_{\partial M}r^2k^{(2)}-\frac{\pi r_+^2}{G}(1-\alpha). \tag{5.15.3}$$

代入静态度规(5.15.1),得到作用量(5.15.3)的表达式

$$W_{cl}=-\frac{(2\pi\bar{\beta})}{4G}\int_{x+}^{L}\left[(r^2)'e^{\lambda}g'+2ge^{\lambda}(r'_x)^2\right.$$

$$\left.+2Ue^{-\lambda}\right]\mathrm{d}x-\frac{\pi r_+^2}{G}. \tag{5.15.4}$$

于是,可以定义自由能 F,熵 S 和能量 E:

$$F=(2\pi\beta)^{-1}W_{cl},\quad S=(\beta\partial_\beta-1)W_{cl},\quad E=\frac{1}{2\pi}\partial_\beta W_{cl}. \tag{5.15.5}$$

式中 $2\pi\beta=T^{-1}$,$\beta=\bar{\beta}\sqrt{g_B}$. 将这些式子应用到(5.15.4),我们得到能量的表达式

$$E=-\frac{1}{4Gg_B^{1/2}}\int_{x+}^{L}\left[(r^2)'e^{\lambda}g'+2ge^{\lambda}(r'_x)^2+2Ue^{-\lambda}\right]\mathrm{d}x, \tag{5.15.6}$$

熵的表达式

$$S_{BH}=\frac{\pi r_+^2}{G}. \tag{5.15.7}$$

正是标准的 Bekenstein-Hawking 形式. 在计算过程中没有假定 $\alpha=1$,因此这些计算是离壳的. 现在,我们固定温度 $T=(2\pi\beta)^{-1}$,并考虑自由能 $F=E-TS$ 的极值,或等效地,考虑作用量 W_{cl} 的极值. 显然,这样的平衡态位形自动满足热力学第二

定律：

$$\delta E = T\delta S. \tag{5.15.8}$$

这里须注意，仅 $x=L$ 处的 T 和 r_B 以及视界处的条件 $g(x_+)=0$ 是固定的. 函数(x), $g'(x)$, $r(x)$以及视界处 $r_+=r(x_+)$、$g'(x_+)$（或 β_H）的值都是可变的. 作用量 W_{cl}的全变分为

$$\delta W_{cl} = \delta_r W_{cl} + \delta_R W_{cl} + \delta_\lambda W_{cl}.$$

其中，

$$\delta_r W_{cl} = -\frac{2\pi r(x_+)}{G}(1-\alpha)\delta r(x_+) - \frac{(2\pi\bar{\beta})}{4G}$$

$$\times \int_{x_+}^{L} \delta r[-2r(e^{\lambda}g')' - 4(ge^{\lambda}r')' + 2U'_r e^{-\lambda}]dx. \tag{5.15.9}$$

$$\delta_\delta W_{cl} = -\frac{(2\pi\bar{\beta})}{4G}\int_{x_+}^{L}\delta g[-(e^{\lambda}(r^2)')' + 2e^{\lambda}r'^2_x]dx. \tag{5.15.10}$$

$$\delta_\lambda W_{cl} = -\frac{(2\pi\bar{\beta})}{4G}\int_{x_+}^{L}\delta\lambda[e^{\lambda}(r^2)'g' + 2e^{\lambda}g(r'_x)^2 - 2Ue^{-\lambda}]dx. \tag{5.15.11}$$

对函数(r,g,λ)的变分（在区域 $x_+\leqslant x\leqslant L$），得到运动方程

$$\begin{aligned}
&2r(e^{\lambda}g')' - 4(ge^{\lambda}r')' + 2U'_r e^{-\lambda} = 0,\\
&-(e^{\lambda}(r^2)')' + 2e^{\lambda}r'^2_x = 0,\\
&e^{\lambda}(r^2)'g' + 2e^{\lambda}g(r'_x)^2 - 2Ue^{-\lambda} = 0.
\end{aligned} \tag{5.15.12}$$

当然，它们和(5.14.13)～(5.14.14)式一致. 在边界(x_+,L)处，方程(5.15.9)～(5.15.11)中的变分 $\delta g'(x_+)$和 $\delta g'(L)$已抵消；这是因为方程(5.15.3)中存在外边界和奇异点（顶角）的“表面”项.

在某种意义上，顶角 Σ 可以看做∂M 外空间 M 的某种边界. 正是引力作用量(5.15.3)中有定义在 Σ 处的附加项，才使得有顶角的空间上的变分有很好的定义. 与顶角相关的项补偿了度规导数在 Σ 处的变分，正如标准 G-H 项在外边界∂M 上的行为一样. 作用量的变分也包含与 δr_+ 成正比的一项. 条件 $\delta_r W_{cl}=0$ 给出 $\alpha=1$. 这正是所需要的结果. 它意味着在规则流形（无顶角奇异性的 G-H 瞬子）上达到平衡态.

方程(5.15.12)表明可取 $r=x$. 度规函数 $g(r)$取(5.14.17)的形式：

$$g(r) = \frac{1}{r}\int_{r_+}^{r} U(\rho)d\rho. \tag{5.15.13}$$

特别是，我们有

$$g(L) = \frac{1}{L}\int_{r_+}^{L} U(r)dr, \quad g'_r(L) = L^{-1}U(L) - L^{-1}g(L). \tag{5.15.14}$$

另一方面，在视界处，

$$\frac{2}{\beta_H} \equiv g'_r(r_+) \equiv \frac{U(r_+)}{r_+}. \tag{5.15.15}$$

能量泛函 E(5.15.6)式可写为

$$E = \frac{1}{2Gg_B^{1/2}}\int_{x_+}^{L} G_0^0 e^{-\lambda} dx + E_{\text{surf}},$$

$$E_{\text{surf}} = -\frac{1}{2G}(e^{\lambda}(r^2)'g^{1/2})_{x=L}. \tag{5.15.16}$$

由于 $G_0^0=0$,E 只有表面项.等价地,我们得到能量(5.15.16)式的坐标无关的表达式:

$$E = -\frac{1}{2\pi\beta}\frac{1}{G}\int_{\partial M} rn^{\alpha}\partial_{\alpha}r. \tag{5.15.17}$$

当∂M 趋于无限远时,量(5.15.17)发散,由前面讲到的删除法则得到

$$\begin{aligned} E &= E(g) - E(g_0) \\ &= \frac{1}{G}\left(\frac{1}{2\pi\beta_0}\int_{\partial M} rn_0^{\alpha}\partial_{\alpha}r - \frac{1}{2\pi\beta}\int_{\partial M} rn^{\alpha}\partial_{\alpha}r\right) \\ &= \frac{1}{G}[r(g_0^{1/2} - g^{1/2})]_{r=L}. \end{aligned} \tag{5.15.18}$$

这里对于背景度规,取 $r_0=r$.应注意,对背景的自然要求是当$L\to\infty$ 时背景温度 $T=(2\pi\beta_0)^{-1}$与无限远处的黑洞温度相合.即 $g_0=\lim_{L\to\infty}g(L)$.对于渐近平直度规,

$$g(L) = 1 - \frac{2MG}{L} + o\left(\frac{1}{L}\right),$$

我们有 $g_0=1$.所以

$$E = \frac{1}{G}[1 - \sqrt{g(L)}]. \tag{5.15.19}$$

当 $L\to\infty$ 时,

$$E = M. \tag{5.15.20}$$

为了表述荷电度规的变分过程,固定于边界处的量还应包括表征麦克斯韦部分的电量 Q 或势 A_0.对 A_μ 的变分将给出麦克斯韦方程组.但这里我们不这样做.我们先精确解出麦克斯韦部分,从而所有信息都包含在 dilaton 势 $U(r)$中,就只要对引力部分变分了.这两种方法显然导致相同的结果.

以上方法对任意势 $U(r)$都适用,只要其形式固定.对于改变其形式的变分,从(5.15.19)式得到

$$\delta E = \delta M - \frac{1}{2G}\int_{r_+}^{L}\delta U(r)\,dr. \tag{5.15.21}$$

由(5.14.12)式定义的势 $U(r)$,我们得到荷电黑洞的第二定律:

$$\delta M = T\delta S + \frac{Q}{Gr_+}\delta Q. \tag{5.15.22}$$

但是特殊形式的势 $U(r)$ 对于上述方法是不重要的. 可以证明,量子修正会改变势的形式,并导致黑洞度规(5.15.13)的改变.

极端黑洞值得注意. 这时有

$$U(r_+) = 0, \quad g'(r_+) = 0. \tag{5.15.23}$$

极端黑洞瞬子的几何与非极端情况大不一样,在度规

$$ds^2 = g(r)d\tau^2 + g^{-1}(r)dr^2 \tag{5.15.24}$$

中,τ 可以具有任意周期 $2\pi\beta$ 而不会形成任何奇异性. 现在视界与瞬子流形上的其他任何点的固有距离都是无限大. 视界附近,极端瞬子像一个常曲率空间,其度规为

$$ds^2 = \frac{r_+^2}{z^2}(d\tau^2 + dz^2). \tag{5.15.25}$$

当 $r \to r_+$ 时,$z \to -\infty$. 极端黑洞瞬子可以看成与平直圆柱形空间共形的空间.

这些极端几何的特点对于极端黑洞热力学的表述是很重要的. 由于视界处无顶角奇异性,作用量中无附加项:

$$W = 2\pi\beta E. \tag{5.15.26}$$

式中能量 E 具有形式(5.15.19). 由(5.15.26)式可以得到系统的自由能 $F = E$. 因此,极端黑洞的熵为零:

$$S_{\text{ext}} = 0. \tag{5.15.27}$$

而且由于自由能不依赖于温度 β^{-1},β 固定时自由能取极值的要求不会给出非极端情况下 r_+ 和 β 的关系. 这意味着极端黑洞可以在任何温度下处于平衡态. 这种形式结果的物理意义还不清楚. 量子效应肯定会改变这个结论.

5.16　L-P 作用量及量子场热态的选择

为了在分析中包括单圈量子效应,我们考虑 2 维量子共形无质量标量场. 对配分函数的贡献为

$$Z = e^{-\Gamma}, \quad \Gamma = \frac{1}{2}\ln\det\square. \tag{5.16.1}$$

式中 $\square \equiv \nabla_\mu \nabla^\mu$,是 2 维拉普拉斯算符. 有效作用量 Γ 的计算常用到对共形反常的积分. 计算结果得到

$$\Gamma_{PL}(g) = \frac{1}{96\pi}\int R\square^{-1}R. \tag{5.16.2}$$

应用上式时至少会遇到两个问题. 第一,这个作用量在常数(整体的)共形变换 $g_{\mu\nu}$

$\to\Lambda g_{\mu\nu}$下不能很好地变换. 第二, 当把它应用到平直空间($R=0$)时, 由(5.16.2)式变分得到的能–动张量的平均值$\langle T^{\mu\nu}\rangle$恒为零. 这对真空态成立, 而对其他可能态就不成立. 所以, 把有效作用量写成这一形式就会失去量子场的态的具体信息. 我们要给(5.16.2)式加入边界项, 并证明关于量子场的态的信息与边界项直接相关. 因此, 为了考虑单圈量子效应, 我们将仔细处理 L-P 作用量, 考虑到所有边界项.

应强调指出, 导出(5.16.2)式所需要的对共形反常的积分并不给出有效作用量$\Gamma[g]$的绝对值, 只给出两个共形相关($g_{\mu\nu}=e^{2\sigma}g_{\mu\nu}$)流形的有效作用量之差:

$$\Gamma[g]=\Gamma[\hat g]-\frac{1}{24\pi}\left[\int_M(\hat\nabla\sigma)^2+\int_M\hat R\sigma+2\int_{\partial M}\mathrm{d}\hat s\hat k\sigma\right]-\frac{1}{8\pi}\int_{\partial M}\mathrm{d}\hat s\hat n^\mu\partial_\mu\sigma. \tag{5.16.3}$$

式中$\hat n^\mu$和$\hat k=\hat\nabla_\mu\hat n^\mu$分别为$n^\mu$和$k$的对应量.

$\Gamma[g]$可以写成仅由度规$g_{\mu\nu}$确定的形式, 只要引入一满足方程

$$\Box\Psi=R \tag{5.16.4}$$

的附加场Ψ. 对共形相关度规$g_{\mu\nu}=e^{2\sigma}g_{\mu\nu}$, 各个量的关系为

$$\begin{aligned}R&=e^{-2\sigma}(\hat R-2\hat\Box\sigma),\quad \psi=\hat\psi-2\sigma,\\ k&=e^{-\sigma}(\hat k+\hat n^\mu\partial_\mu\sigma),\quad n^\mu=e^{-\sigma}\hat n^\mu.\end{aligned} \tag{5.16.5}$$

由这些关系可以证明, (5.16.1)式的有效作用量具有形式

$$\Gamma[g]=\frac{1}{48\pi}\int_M\left[\frac{1}{2}(\nabla\psi)^2+\psi R\right]+\frac{1}{24\pi}\int_{\partial M}k\psi\mathrm{d}s+\frac{1}{16\pi}\int_{\partial M}n^\mu\psi_{,\mu}\mathrm{d}s+\Gamma_0, \tag{5.16.6}$$

式中所有量都由$g_{\mu\nu}$定义, 而"积分常数"Γ_0是一个共形不变泛函.

现在我们考虑共形无质量场φ, 它在有视界的时空中以温度T处于一热态. 相关的欧氏静态度规为

$$\mathrm{d}s^2=g(x)\mathrm{d}\tau^2+\frac{1}{g(x)}\mathrm{d}x^2 \tag{5.16.7}$$

或

$$\mathrm{d}s^2=g(\rho)\mathrm{d}\tau^2+\mathrm{d}\rho^2. \tag{5.16.8}$$

式中, $0\leqslant\tau\leqslant2\pi\bar\beta, 0\leqslant\rho\leqslant L_\rho$, 假设$g(x)$在$x=x_+$处有一阶零点, 这是 Killing 视界. 在视界附近有

$$g(\rho)=\frac{\rho^2}{\beta_H^2},\quad \beta_H=\frac{2}{g'x(r_+)}.$$

对于$\bar\beta=\beta_H$, (5.16.8)式描述规则黑洞瞬子. 如果$\bar\beta\neq\beta_H$, 此度规在$\rho=0$处有顶角奇异性, 角亏损为$\delta=2\pi(1-\alpha)$, $\alpha=\bar\beta/\beta_H$. 度规(5.16.8)可以写成共形的形式:

$$ds^2 = e^{2\sigma} ds_0^2, \quad ds_0^2 = (dz^2 + \alpha^2 z^2 d\tilde{\tau}^2),$$

$$e^{2\sigma} = \beta_H^2 \frac{g}{z^2}, \quad z = z_0 \exp\left[\frac{1}{\beta_H}\int_{L_\rho}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{g}}\right]. \tag{5.16.9}$$

式中，

$$\alpha = \bar{\beta}/\beta_H, \quad \tau = \bar{\beta}\tilde{\tau}, \quad 0 \leqslant \tilde{\tau} \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant z \leqslant z_0.$$

在视界附近，$z \approx \rho$，故共形因子在视界处是规则的.

当 $\bar{\beta} = \beta_H$，由(5.16.9)式可知，黑洞瞬子度规与半径为 z_0 的平直盘 D 上的度规共形. 与共形度规 $g_{\mu\nu}$ 和 $\hat{g}_{\mu\nu}$ 对应的能-动张量之间有关系式

$$T_{\mu\nu}[g] = T_{\mu\nu}[\hat{g}] + \frac{1}{48\pi}\{-4\hat{\nabla}_\mu\hat{\nabla}_\nu\sigma + 4\partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma$$

$$+ g_{\mu\nu}[4\hat{\Box}\sigma - 2(\hat{\nabla}\sigma)^2]\}. \tag{5.16.10}$$

因此，按(5.16.9)式，我们得到

$$T_{\tau\tau} = T_{\tau\tau}^{(0)} + \frac{1}{48\pi}\left[\frac{2}{\beta_H^2} + 2g''_\rho - \frac{3}{2}\frac{(g'_\rho)^2}{g}\right]. \tag{5.16.11}$$

式中 $T_{\tau\tau}^{(0)}$ 是平直盘 D 上量子场的能量密度. 在无限远处，$\rho = \infty$，$g = 1$，故

$$T_{\tau\tau} = T_{\tau\tau}^{(0)} + \frac{1}{24\pi\beta_H^2}. \tag{5.16.12}$$

假设 D 上量子场的态处处满足 $T_{\tau\tau}^{(0)} = 0$，我称之为“盘上的真空”. 物理上，此态即 Rindler 空间中的闵可夫斯基真空态，或 Hartle-Hawking 真空态.

这一选择，由于(5.16.12)式与温度为 T_H 的热浴能量密度相同，故黑洞瞬子上量子场处于 H-H 真空态. 因此，从“盘上真空态”出发，经过规则共形变换(5.16.9)，可以得到黑洞瞬子上温度为 T_H 的量子场. 如果从盘 D 上有限温度 $T_0 = (2\pi\beta_0)^{-1}$ 的态出发，则可以得到黑洞瞬子上温度为 $T = (2\pi\beta)^{-1} = (2\pi)^{-1}[\beta_0^{-2} + \beta_H^{-2}]^{1/2}$ 的态. 此态与 H-H 态不相同.

在做过这些一般性讨论之后，现在考虑满足 $0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi\bar{\beta}$ ($\bar{\beta} \neq \beta_H$) 的奇异黑洞瞬子. 由(5.16.9)式，它与平直锥 C_α ($\alpha = \bar{\beta}/\beta_H$) 共形，且 z_0 是圆锥母线的固有长度. 共形因子 σ 处处规则；我们还发现这两个空间上的能－动张量 $T_{\mu\nu}$ 仍由(5.16.10)和(5.16.11)式相联系. 只是现在 $T_{\tau\tau}^{(0)}$ 是平直圆锥 C_α 上的能量密度.

$$T_\tau^{\tau(0)} = \frac{1}{24\pi}\frac{1}{z^2}\left[\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}\right], \alpha = \frac{\bar{\beta}}{\beta_H} \tag{5.16.13}$$

在无限远处有

$$T_{\tau\tau} \to \frac{1}{24\pi\bar{\beta}^2},$$

正是温度为 $T_\infty = (2\pi\bar{\beta})^{-1}$ 的热形式. 因此，黑洞引力场上 $T \neq T_H$ 的量子场的热态

可以等效地描述成奇异瞬子上的量子场.

可以利用黑洞瞬子 M_α 上的度规直接计算 $T_{\mu\nu}$. 对于度规(5.16.8),方程(5.16.4)有解

$$\psi = -\ln g + b\int^x \frac{\mathrm{d}x}{g} + C = -\ln g + b\int^\rho \frac{\mathrm{d}\rho}{\sqrt{g}} + C. \tag{5.16.14}$$

为了确定常数 b,考虑由 φ 表示的重正化能–动张量

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{48\pi}\left\{2\nabla_\mu\nabla_\nu\psi - \partial_\mu\psi\partial_\nu\psi + g_{\mu\nu}\left[-2R + \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2\right]\right\}. \tag{5.16.15}$$

此式的共形变换由(5.16.10)式给出. 把(5.16.14)式代入(5.16.15)式,得到

$$T_{\tau\tau} = \frac{1}{48\pi}\left[2g''_\rho - \frac{3}{2}\frac{(g'_\rho)^2}{g} + \frac{b^2}{2}\right]. \tag{5.16.16}$$

由于在无限远处 $T=(2\pi\bar{\beta})^{-1}$,故 $b=-2/\bar{\beta}$.

由此得到,在极限 $\rho\to 0$ 下,(5.16.14)式中的 ψ 满足

$$\psi \to \psi_c = -2\left(1 - \frac{\beta_H}{\bar{\beta}}\right)\ln\rho, \tag{5.16.17}$$

式中 $\Box_c$ 是平直圆锥 C_α 上的拉普拉斯算符. 因此,无限远处温度为 $T=(2\pi\bar{\beta})^{-1}$ 的态的能–动张量和视界有顶角奇异性($\bar{\beta}\neq\beta_H$)的黑洞瞬子(5.16.9)上量子场的能–动张量相同.

为了确定(5.16.14)式中的常数 C(它依赖于系统的特征),考虑由 σ 决定的共形变换(5.16.9)式:

$$2\sigma(x) = \ln g(x) + \frac{2}{\beta_H}\int_x^L \frac{\mathrm{d}x}{g(x)} + 2\ln\frac{\beta_H}{z_0}, \tag{5.16.18}$$

于是,此二空间中的函数 $\psi(x)$ 有如下关系:

$$\psi_{M\alpha}(x) = \psi_{C_\alpha}(z) - 2\sigma(x). \tag{5.16.19}$$

式中 $z(x)$ 由(5.16.9)式给出. 另一方面,对于 $\psi_{M\alpha}$ 和 ψ_{C_α},我们有表达式(5.16.14):

$$\psi_{M\alpha}(x) = -\ln g(x) - \frac{2}{\bar{\beta}}\int_x^L \frac{\mathrm{d}x}{g(x)} + C, \tag{5.16.20}$$

$$\psi_{C_\alpha}(z) = -2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\ln\frac{z}{z_0} + C(\alpha, z_0). \tag{5.16.21}$$

式中 $C(\alpha,z_0)$ 仅为 α 和 z_0 的函数.

把(5.16.18)和(5.16.20)式代入(5.16.19)式,得到常数

$$C = -2\ln(\beta_H/z_0) + C(\alpha, z_0).$$

实际上,由于重新标度 $z_0\to \mathrm{e}^\gamma z_0$ 之后,有

$$C(\alpha, z_0) \to C(\alpha, z_0) - 2\ln\gamma,$$

C 不依赖于 z_0，于是最后得到

$$\psi_{M^\alpha}(x) = -\ln g(x) - \frac{2}{\bar{\beta}}\int_x^L \frac{\mathrm{d}x}{g(x)} - 2\ln\frac{\beta_H}{z_0} + C(\alpha, z_0). \tag{5.16.22}$$

为了写出这种情况下的 Liouville-Polyakov 作用量，须注意到在顶角奇异性存在时有效作用量(5.16.1)式的共形变换要修改. 如果空间 M^α 和 $\hat{M}^\alpha$［具有顶点 Σ 和角亏损 $\delta = 2\pi(1-\alpha)$］由规则共形变换 $\hat{g}_{\mu\nu} = \mathrm{e}^{2\sigma} g_{\mu\nu}$ 相联，则相应的有效作用量有如下关系：

$$\Gamma(g) = \Gamma(\hat{g}) - \frac{1}{24\pi}\left[\int_{\hat{M}^\alpha}(\hat{\nabla}\sigma)^2 + \int_{\hat{M}^\alpha}\hat{R}\sigma + 2\int_{\partial\hat{M}^\alpha}\mathrm{d}s\hat{k}\hat{\sigma}\right]$$

$$-\frac{1}{8\pi}\int_{\partial\hat{M}^\alpha}\mathrm{d}s\hat{n}^{\hat{\mu}}\partial_\mu\sigma - \frac{1}{12}\frac{(1-\alpha^2)}{\alpha}\sigma_h. \tag{5.16.23}$$

式中 σ_h 是圆锥顶点 Σ 处的值.

考虑 ψ 的变换规律(5.16.5)，M^α 上的有效作用量［按(5.16.23)变换］可以写为

$$\Gamma(M^\alpha) = \frac{1}{48\pi}\int_{M^\alpha}\left[\frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 - \psi\bar{R}\right] + \frac{1}{24}\frac{(1-\alpha^2)}{\alpha}\psi_h$$

$$+\frac{1}{24\pi}\int_{\partial M^\alpha}k\psi\mathrm{d}s + \frac{1}{16\pi}\int_{\partial M^\alpha}n^\mu\psi_{,\mu}\mathrm{d}s + \Gamma_0. \tag{5.16.24}$$

式中 $\bar{R}$ 是曲率标量的规则部分，$\psi(x)$ 是方程

$$\Box\psi = R \equiv 2[(1-\alpha)/\alpha]\delta_\Sigma + \bar{R}$$

的解. 对于静态度规(5.16.7)，ψ 取(5.16.22)式的形式.

值得注意的是，表达式(5.16.24)可写成两种等价的形式. 第一种用定义在全顶角空间 M^α 上的量表示：

$$\Gamma[M^\alpha] = \frac{1}{48\pi}\int_{M^\alpha}\left[\frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 + \psi R\right] + \frac{(1-\alpha)^2}{24\alpha}\psi_h$$

$$+\frac{1}{24\pi}\int_{\partial M^\alpha}k\psi\mathrm{d}s + \frac{1}{16\pi}\int_{\partial M^\alpha}n^\mu\psi_{,\mu}\mathrm{d}s + \Gamma_0, \tag{5.16.25}$$

$$R \equiv 2(\alpha^{-1}-1)\delta_\Sigma + \bar{R}, \quad \Box\psi = R.$$

另一种方式是用定义在规则部分 M^α/Σ 上的量写出：

$$\Gamma[M^\alpha] = \frac{1}{48\pi}\int_{M^\alpha/\Sigma}\left[\frac{1}{2}(\nabla\bar{\psi})^2 + \overline{\psi R}\right] + \frac{1}{12}(1-\alpha)\bar{\psi}_h$$

$$+\frac{1}{24\pi}\int_{\partial M^\alpha}\overline{k\psi}\mathrm{d}s + \frac{1}{16\pi}\int_{\partial M^\alpha}n^\mu\bar{\psi}_{,\mu}\mathrm{d}s + o((1-\alpha)^2). \tag{5.16.26}$$

式中，$\bar{\psi} = \psi_{\alpha=1}$，$\Box\bar{\psi} = \bar{R}$.

5.17　量子修正的黑洞几何

在半经典近似(度规不量子化)下,要得到单圈量子效应,可以在经典引力作用量中加上积分物质场得到的量子部分:

$$W = W_{cl} + \Gamma. \tag{5.17.1}$$

对于球对称考虑,我们取 W_{cl} 为(5.14.11)式的形式(还要减去参考度规的贡献,见 5.15 节),而单圈贡献 Γ 取为 L-P 作用量(5.16.24). 当然,在自洽的处理中,量子有效作用量 Γ 也应该由 4 维物质场经过球对称退化得到,就像得到引力部分 W_{cl} 那样. 但是有效作用量非常复杂而使得分析很困难. 因此,这里只考虑最简单的情况:有效 2 维物质场是共形的,且 Γ 为非定域的 L-P 泛函.

为了考虑黑洞的单圈量子效应,先研究作用量的量子修正(5.17.1)式所引起的黑洞经典几何的修正. 此式对度规取变分,得到

$$G_{\alpha\beta} = -T_{\alpha\beta}, \tag{5.17.2}$$

$$T_{\alpha\beta} = \frac{G}{24\pi}\left\{2\nabla_\alpha\nabla_\beta\psi - \partial_\alpha\psi\partial_\beta\psi - \gamma_{\alpha\beta}\left[2R - \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2\right]\right\}. \tag{5.17.3}$$

式中 $G_{\alpha\beta}$ 由(5.14.14)式给出. 对 dilaton 场 $r^2(x)$ 的变分给出与经典情况相同的方程:

$$\gamma R - 2\Box r + U'_r = 0. \tag{5.17.4}$$

方程(5.17.2)和(5.17.4)的一个重要结果是时空奇点现在位于有限半径(dilaton 值)$r^2 = r_{cr}^2 \equiv G/12\pi$ 上. 这是引力的 2 维模型的典型行为. 对于这个 dilaton 值,(5.17.1)式的动力学项发散. 另一方面,取(5.17.2)式的迹,得到

$$\Box r^2 - 2U(r) = \frac{G}{12\pi}R. \tag{5.17.5}$$

再考虑到(5.17.4)式,得

$$R = \frac{2U - rU' - 2(\nabla r)^2}{r^2 - r_{cr}^2}. \tag{5.17.6}$$

此式表明在 $r = r_{cr}$ 处有奇异性. 这里我们不研究此点附近方程(5.17.2)和(5.17.4)的解的行为,而是假定外视界 $r_+ \gg r_{cr}$. 于是,在区域 $r \geqslant r_+$ 内,我们可以用微扰法(对 r_{cr}/r_+)解方程(5.17.2)和(5.17.4),把方程(5.17.2)的右端看成微扰. 这样可以给出黑洞的一级修正(正比于 $\hbar$).

和前面类似,我们考虑静态解. 定义函数 f 和 M:

$$f = (\nabla r)^2, \quad M = \frac{1}{2}r\left[1 - (\nabla r)^2\right] + \frac{Q^2}{2r}, \tag{5.17.7}$$

并选择 r 为一个坐标，Killing 时间 t 为另一坐标. 于是有

$$\mathrm{d}s^2 = f(r)\mathrm{e}^{2\Phi(r)}\mathrm{d}t^2 + \frac{1}{f(r)}\mathrm{d}r^2, \tag{5.17.8}$$

$$f(r) = 1 - \frac{2M(r)}{r} + \frac{Q^2}{r^2}. \tag{5.17.9}$$

方程(5.17.2)可改写为

$$2r\nabla_\alpha\nabla_\beta r = \gamma_{\alpha\beta}\left(\frac{2M}{r} - \frac{2Q^2}{r^2}\right) - \gamma_{\alpha\beta}T + T_{\alpha\beta},$$

$$T = \gamma_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}. \tag{5.17.10}$$

微分(5.17.7)式，并利用(5.17.10)式，得到

$$2\partial_\alpha M = \partial_\beta r(\delta^\beta_\alpha T - T^\beta_\alpha). \tag{5.17.11}$$

取 $\alpha=0$，此式恒成立；取 $\alpha=1$，此式给出

$$\partial_r M = \frac{1}{2}T^t_t. \tag{5.17.12}$$

取(5.17.10)式的迹，得到关于函数 $\Phi(r)$ 的方程：

$$\partial_r\Phi = \frac{1}{2rf}(T^t_t - T^r_r). \tag{5.17.13}$$

把(5.17.12)和(5.17.13)式的右端看作微扰，并在经典背景中计算它们. 我们有 $\Phi(r)=0$，$M=\mathrm{const}$；对于度规(5.17.8)，能-动张量[(5.17.3)式]为

$$T^t_t = k\left[2f'' - \frac{1}{2f}\left(f'^2 - \frac{4}{\beta_H^2}\right)\right],$$

$$T^r_r = k\left[\frac{1}{2f}\left(f'^2 - \frac{4}{\beta_H^2}\right)\right]. \tag{5.17.14}$$

式中 $k=G/24\pi$，$\beta_H = 2/f'(r_+)$. 我们必须把经典度规(5.14.17)代入(5.17.14)式，其中

$$f = g_{cl}(r) = r^{-2}(r-r_+)(r-r_-),$$

$$r_\pm = MG \pm \sqrt{(MG)^2 - Q^2}.$$

须注意，(5.17.14)式给出的 $T_{\alpha\beta}$ 在内视界 $r=r_-$ 处发散. 这个众所周知的发散使得微扰方案在 $r=r_-$ 附近失效. 为了得到微扰方案适用的条件，先考虑外视界 $r=r_+$ 处的 T^α_β，现令 $r_-\sim r_+$. 这时我们发现(5.17.14)式定义在 T^t_t 和 T^r_r 在此极限下有限，而(5.17.13)式中的 $f^{-1}(T^t_t - T^r_r)$ 则以 $k[(r_+-r_-)r_+]^{-1}$ 的形式发散. 要使微扰方案成立. 必须消去这一令人不愉快的一项. 即要满足 $k[(r_+-r_-)r_+]^{-1}\ll 1$，或者 $kr_+^{-2}\ll 1-r_-/r_+$. 这样，只要令 r_+ 足够大，我们总能任意接近极端情况 $r_-\sim r_+$. 这个重要条件使我们可以把此方法运用到 $Q\sim M$ 的荷电黑洞，保证外边界“半径”r_B 任意大的热力学系统的稳定性.

(5.17.12)和(5.17.13)式很容易积分,令

$$m(r) = 2k^{-1}[M - M(r)]. \tag{5.17.15}$$

积分(5.17.12)式,得到

$$m(r) = -\frac{1}{k}\int^r T_t^t(r)\,\mathrm{d}r = C(r) + A\ln\frac{(r - r_-)}{l} + B\ln\frac{r}{l},$$

$$C(r) = -\frac{2}{\beta_H^2}r - \frac{(r_+ - r_-)^2}{2r_+ r_- r} - \frac{2(r_+ + r_-)}{r^2} + \frac{10r_+ r_-}{3r^3},$$

$$A = -\frac{(r_+ - r_-)^2(r_+ + r_-)(r_+^2 + r_-^2)}{2r_+^4 r_-^2}$$

$$B = \frac{(r_+ - r_-)^2(r_+ + r_-)}{2r_+^2 r_-^2}. \tag{5.17.16}$$

和前面类似,$r_\pm$ 表示经典内外视界的"半径". 常数 A 和 B 之间的恒等式 $A + B = -4MG\beta_H^{-2}$ 是很有用的. 在(5.17.16)式中,我们引入了一个距离 l,为了使对数的自变量量纲为一. 下一节计算的能量和熵的最后结果和此参量无关. 可以自然地假设 l 具有普朗克长度的量级 $l \sim r_{cr}$. 但这一点对于下面的讨论并不重要.

类似地,积分(5.17.13),得到

$$\Phi(r) = \frac{1}{2}\int_r^L \frac{1}{rf}(T_r^r - T_t^t)\,\mathrm{d}r, \tag{5.17.17}$$

对于 $f = g_{cl}(r)$,再加上条件 $\Phi(L) = 0$,得到

$$\Phi(r) = \frac{1}{2}k[F(L) - F(r)],$$

$$F(r) = -\frac{(r_+^4 - r_-^4)}{r_+^4 r_-(r - r_-)} + \frac{4}{r^2} + \frac{4(r_+ + r_-)}{r_+ r_- r} + D\ln[(r - r_-)/l] + E\ln(r/l),$$

$$D = \frac{1}{r_+^4 r_-^2}(3r_+^4 + 2r_+^3 r_- + 2r_+^2 r_-^2 + 2r_+ r_-^3 - r_-^4),$$

$$E = \frac{1}{r_+^2 r_-^2}(-3r_+^2 - 2r_+ r_- - 3r_-^2). \tag{5.17.18}$$

现在考虑特殊情况:不带电黑洞($Q = 0$). 其经典度规函数为

$$g_{cl}(r) = 1 - r_+/r, \quad r_+ = 2MG, \quad \beta_H = 2r_+.$$

对于量子修正度规,我们得到

$$f(r) = 1 - \frac{2MG}{r} + \frac{km(r)}{r}, \tag{5.17.19}$$

$$m(r) = -\frac{7r_+}{4r^2} + \frac{1}{2r} - \frac{2r}{\beta_H^2} - \frac{1}{2r_+}\ln\frac{r}{l} \tag{5.17.20}$$

和

$$\Phi(r) = \frac{1}{2}k[F(L) - F(r)],$$

$$F(r) = \frac{3}{2r^2} + \frac{2}{r_+ r} - \frac{1}{r_+^2}\ln\frac{r}{l}. \tag{5.17.21}$$

当盒子的线度 L 很大时,有

$$\exp(2\Phi(r)) = \left(\frac{r}{L}\right)^{k/r_+^2}\exp\left[-k\left(\frac{3}{2r^2} + \frac{2}{r_+ r}\right)\right]. \tag{5.17.22}$$

黑洞的一个重要特征是其视界半径. 在我们模型中,它由视界处的 dilaton 值 $\bar{r}_+$ 表示. 对于量子修正解(5.17.15),它与经典值 r_+ 不同. 为明确起见,令 $f(\bar{r}_+) = 0$,得到解

$$\bar{r}_+ = M(\bar{r}_+)G + \sqrt{(M\bar{r}_+ G)^2 - Q^2}.$$

将上式按 k 展开,最后得到

$$\bar{r}_+ = r_+ - k\beta_H m(r_+)/(2r_+).$$

式中的 r_+ 和 β_H 是由 M 和 Q 算得的经典值. 由此得到

$$\bar{r}_+^2 = r_+^2 - k\beta_H m(r_+). \tag{5.17.23}$$

这一式子可以解释为由于量子修正引起的"视界面积"的变化.

5.18 热力学量的量子修正

由作用量 W[(5.17.1)式]所描述的单圈热力学本质上和 5.15 节的初级(tree-level)近似相同. 我们固定边界 $x = L$ 处的 r_B 和温度 $T = (2\pi\beta)^{-1}$,以及时空几何的黑洞拓扑,并用下式定义离壳熵和能量:

$$S = (\beta\partial_\beta - 1)W, \quad E = \frac{1}{2\pi}\partial_\beta W. \tag{5.18.1}$$

然后,采用(5.15.1)式给出的欧氏度规,其中任意函数 $g(x)$,$\lambda(x)$ 满足上述条件[$g(x)$ 在 $x = L$ 处有单零点];我们发现,系统的平衡态由泛函 $W[g(x), r(x), \lambda(x)]$ 的极值描述:

$$\delta W \equiv \delta_r W + \delta_g W + \delta_\lambda W = 0. \tag{5.18.2}$$

在选择量子场作用量的时候,单圈部分 Γ 不含 dilaton 场 $r(x)$. 因此有 $\delta_r W = \delta_r W_{cl}$ [见(5.15.9)式],其中 $r(x_+) = \bar{r}_+$ 是视界处 dilaton 场的量子值. 这意味着极值位形满足

$$\frac{2}{g'(x_+)} \equiv \beta_H = \bar{\beta}, \tag{5.18.3}$$

和经典情况一样,在没有顶角奇异性的规则流形上可以取极值. 泛函 W 的极值描述量子修正的黑洞位形,其微扰形式见5.17节[(5.17.8)~(5.17.9)和(5.17.15)式].

对度规取变分时,和经典情况一样,含 $\delta g'(x_+)$ 和 $\delta g'(L)$ 的项不存在[见(5.15.10)式]. 因此,对于单圈有效作用量 W,变分过程也定义得很好,因为在外边界($x=L$)和顶点($x=x_+$)处对度规导数变分的贡献都被相应的边界项抵消了.

计算离壳量(5.18.1)的一个方便的方法是把度规写成类施瓦西形式:

$$ds^2 = g(x)\mathrm{d}\tau^2 + g^{-1}(x)\mathrm{d}x^2. \qquad (5.18.4)$$

式中 $0\leqslant\tau\leqslant 2\pi\bar{\beta}$. 利用(5.15.1)中的规范自由度,令 $\lambda(x)=0$,就可以做到这一点. 坐标变换

$$x\rightarrow\int^x \mathrm{e}^{-\lambda(x)}\mathrm{d}x$$

须伴随着相应的积分限(x_+,L)的变换. 在即壳情况下,它们会依赖于 r_B 和 β_H. 但是对于计算坐标不变的离壳量(如有效作用量),使用(5.18.4)式而不用(5.15.1)式只是为了选择坐标系的方便. 相应的 L-P 作用量为

$$\Gamma(g) = \frac{1}{24}\int_{x_+}^{L}\left[\frac{2}{\bar{\beta}g} - \frac{\bar{\beta}}{2}\frac{g'^2}{g}\right]\mathrm{d}x + \frac{1}{12}\left[\alpha + \frac{(1-\alpha^2)}{2\alpha}\right]\psi(x_+) - \frac{\bar{\beta}}{8}g'(L) + \Gamma_0. \qquad (5.18.5)$$

式中, $\alpha=\bar{\beta}/\beta_H$, $\beta_H=2[g'(x_+)]^{-1}$, $\psi(x)$ 由(5.16.22)定义. 这里应注意,(5.18.5)式在下极限处发散. 引入规则化 $x^-\rightarrow x^+ + \epsilon$,我们得到(5.18.5)式的发散部分:

$$\Gamma_{\mathrm{div}} = \ln\epsilon\,\frac{(1-\alpha)^2}{24\alpha^2}. \qquad (5.18.6)$$

这是由于顶点处($\bar{\beta}\neq\beta_H$)重正化的 $T_{\mu\nu}$[(5.16.15)和(5.16.16)式]为无限大所引起的物理发散. 注意 Γ_{div} 正比于 $(1-\alpha)^2$. 因此,这一发散不影响 Hawking 温度($\bar{\beta}=\beta_H$)下的物理量. 原则上,要把这一发散规则化,可以在(5.18.5)中减去度规函数为 $g_R(x)=(2/\beta_H)(x-x_+)$ 的 Rindler 空间 L-P 作用量. 但我们现在不做这种处理.

由(5.18.3)式可以计算平衡态($\bar{\beta}=\beta_H$)的能量:

$$E = E_{cl} + E_q,$$

其中经典部分 E_{cl} 见(5.15.5)式,量子部分为

$$E_q = \frac{1}{2\pi g^{1/2}(L)}\partial_{\bar{\beta}}\Gamma\mid_{\bar{\beta}=\beta_H} = \frac{g^{-1/2}(L)}{96\pi}\times\int_{x_+}^{L}\frac{1}{g}\left[\frac{4}{\beta_H^2} - g'^2(x)\right]\mathrm{d}x - \frac{1}{16\pi g^{1/2}(L)}g'(L). \qquad (5.18.7)$$

对于上节得到的量子修正的度规,$g'(L)$ 在极限 $L\rightarrow\infty$ 下等于零. 因此,下面我

们将此项略去.

类似地得到平衡态的熵的表达式：

$$S = \frac{\pi r_+^2}{G} + S_q, \tag{5.18.8}$$

式中，

$$\begin{aligned} S_q &= (\beta\partial_\beta - 1)\Gamma\mid_{\beta=\beta_H} = -\frac{1}{12}\psi(x_+) \\ &= \frac{1}{12}\int_{x_+}^{L}\frac{\mathrm{d}x}{g(x)}\left[\frac{2}{\beta_H} - g'(x)\right] + \frac{1}{6}\ln\frac{\beta_H g^{1/2}(L)}{z_0} + c(z_0). \end{aligned} \tag{5.18.9}$$

在上两式中，$\bar{r}_+$ 和 β_H 分别为视界的量子位置和量子 Hawking 温度的倒数，而 $g(x)$ 是量子黑洞的度规. 注意 E_q 和 S_q 在下极限都不发散. 对于与平直度规共形的度规 $g_{\mu\nu} = \mathrm{e}^{2\sigma}\delta_{\mu\nu}$，有 $\psi(x) = -2\sigma(x)$.

对于能量泛函，我们有

$$E = \frac{1}{2Gg^{1/2}(L)}\int_{x_+}^{L}(G_0^0 + T_0^0)\mathrm{d}x + \frac{1}{12\pi\beta_H g^{1/2}(L)} + E_{\mathrm{surf}}. \tag{5.18.10}$$

式中表面项 E_{surf} 与(5.15.16)式相同.

由外边界处的温度 $T = [2\pi\beta_H\sqrt{g(L)}]^{-1}$ 是固定的，当运动方程(5.17.2)成立时，E 简化为

$$E = E_{\mathrm{surf}} + \frac{T}{6}, \tag{5.18.11}$$

或者写成坐标不变形式：

$$E = \frac{T}{G}\int_{\partial M} rn^\alpha\partial_\alpha r + \frac{T}{6} = -\frac{1}{G}(rg^{1/2})_{r=L} + \frac{T}{6}. \tag{5.18.12}$$

注意(5.18.12)式的两项都定义在外边界 $r = L$ 上.

现在，减去背景 g_0 的能量，得到

$$E[g] - E[g_0] = \frac{1}{G}[r(g_0^{1/2} - g^{1/2})]_{r=L} + \frac{1}{6}(T - T_0). \tag{5.18.13}$$

式中 $T_0 = [2\pi\beta_H^0\sqrt{g_0(L)}]^{-1}$ 是背景度规的温度.(5.18.11)和(5.18.12)式中的温度 T 是在外边界测量的. 但是含 T 的项却源于视界，这可以由(5.18.11)式通过分部积分得到(5.18.12)式的过程中看出来. 因此，(5.18.11)和(5.18.12)式中的 $T/6$ 是黑洞拓扑的结果. 在非黑洞的情况下(热空间)这一项不存在. 取 $T_0 = T$，(5.18.13)式中第二项为零，于是得到能量的经典表达式，但现在 g_0 和 g 都是相应的量子修正度规.

上面关于能量和熵的表达式是对于静态度规(5.18.4)给出的. 上一节中得到量子修正的度规要变成这种形式，只要做坐标变换 $r \to x(r)$，$\partial_r x = \mathrm{e}^{\Phi(r)}$，并令 $g(x)$

$=fe^{2\Phi}$. 由于 $\Phi(L)=0$,在边界 $x=L$ 处有 $x\approx r$,和 $g(L)=f(L)$.

下面讨论经过量子修正的黑洞,其质量和熵.

1. 量子修正黑洞的质量

前面得到的量子修正解(5.17.15)和(5.17.16)式在盒子尺度 L 很大时为

$$g(L)\approx 1-\frac{2MG}{L}-\frac{2k}{\beta_H^2}-\frac{4MG_k}{L\beta_H^2}\ln\frac{L}{l}+o\left(\frac{1}{L}\right). \tag{5.18.14}$$

我们看到,当 $L\to\infty$ 时,$g(L)\to g_0=1-2k/\beta_H^2$ 而不是 1. 引入普朗克温度 $T_{pl}=(2\pi r_{cr})^{-1}$,有 $g_0=1-(T_H/T_{pl})^2$. 可以发现,g 的渐近行为和背景的改变本质上是温度效应. 实际上,若像经典情况一样,取背景 $g_0=1$,能量将有一发散项

$$E_{th}=(\pi/6)T_H^2L,$$

这正是黑洞周围热气体的能量.

我们可以这样解释,所研究的系统是两部分的复杂相互作用:黑洞和热气体. 远离视界处,气体的效应显得更重要,而在视界附近,黑洞占主导地位. 因此,系统的特征量(如能量和熵)包含这两个子系统的贡献. 依赖于系统尺度 L 的部分是热气体的贡献,可以消去. 另一方面,黑洞本身的贡献不依赖于 L.

明显地,适当选择(5.18.13)式中的参考度规,可以消去热气体的贡献,从而得到黑洞本身的贡献. 实际上,如果取

$$g_0=1-2k\beta_H^{-2},$$

则

$$E=M+\frac{kM}{\beta_H^2}\eta. \tag{5.18.15}$$

式中

$$\eta=1+2\ln\frac{L}{l}.$$

可以看出,(5.18.15)式中 E_{th} 不存在,但仍存在对数发散项. 我们认为这一发散是由于无质量场的红外行为所致. 可以预见,当考虑有质量物质时,此发散会消失. 因此,为了使红外行为规则化为有限,我们固定盒子尺度 L,但它远大于黑洞的特征尺度 r_+. (5.18.15)式可写为

$$E=M\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{T_H}{T_{pl}}\right)^2\eta\right]. \tag{5.18.16}$$

比较(5.18.15)和(5.18.16)式,我们得出结论:一级量子修正(对 G 而言),和黑洞质量的温度修正是相同的.

2. 量子修正黑洞的熵

把经典度规函数

$$g_{cl} = r^{-2}(r - r_+)(r - r_-)$$

代入 S_q 的表达式,得到

$$S_q = \frac{\pi}{3}T_H(L - r_+) - \frac{1}{12}\left(\frac{r_-}{r_+}\right)^2\ln\left(\frac{L - r_-}{r_+ - r_-}\right)$$
$$+ \frac{1}{12}\ln\left(\frac{L - r_+}{r_+ - r_-}\right) + \frac{1}{6}\ln\frac{r_+}{z_0}. \qquad (5.18.17)$$

式中 z_0 是(5.16.9)式中出现的圆锥母线的固有长度. 和能量一样,S_q 在极限 $L\to\infty$ 下发散. 第一项线性发散,是装在盒子中的 2 维热气体的熵,盒子尺度为 $L - r_+$,温度为 T_H. 由于我们只对黑洞本身的熵感兴趣,故将此项略去.

在(5.18.8)式中,第一项包含视界的量子修正半径 $\bar{r}_+$. 在外视界 $r = r_+$ 附近,量子修正度规(5.17.15)和(5.17.16)为

$$f(r) = (r - \bar{r}_+)(r - \bar{r}_-)r^{-2}.$$

式中

$$\bar{r}_\pm = r_\pm \pm kr_\pm^q,$$

而 $r_\pm$ 是经典值. 因此,在 S_q(正比于 $\hbar$)中,可用量子修正值 $\bar{r}_\pm$ 代替经典值. 于是,取极限 $L\to\infty$,我们得到用量子修正视界值 $\bar{r}_\pm$ 表示的黑洞完全量子熵:

$$S = \frac{\pi\bar{r}_+^2}{G} + \frac{1}{12}\left[1 - \left(\frac{\bar{r}_-}{\bar{r}_+}\right)^2\right]\ln\frac{L}{(\bar{r}_+ - \bar{r}_-)} + \frac{1}{6}\ln\frac{\bar{r}_+}{z_0}. \qquad (5.18.18)$$

这是量子水平上对经典熵和视界面积关系的修正.

有几种情况很有趣. 第一种情况,$\bar{r}_+\to\bar{r}_-$. 此时质量的修正[(5.18.15)和(5.18.16)式]等于零,另一方面,S_q[(5.18.17)式]却存在极限

$$S_q^{\text{ext}} = \frac{1}{6}\ln\frac{\bar{r}_+}{z_0} = \frac{1}{12}\ln\left(\frac{A_+}{\pi z_0^2}\right), \qquad (5.18.19)$$

此式给出熵的对数修正. 第二种情况,取 $\bar{r}_- = 0$(不荷电黑洞),得到

$$S = \frac{A_+}{4G} + \frac{1}{24}\ln\frac{A_+}{\pi z_0^2}. \qquad (5.18.20)$$

式中 $A_+ = 4\pi\bar{r}_+^2$ 是视界面积,我们省略一项 $\sim\ln\frac{L}{z_0}$.

现在还不清楚在什么样的现象中熵的对数修正项才会变得重要. 我们猜测在黑洞蒸发的最后阶段它们会起作用. 这个问题仍需进一步研究.

下面几节我们用顶角奇异性方法讨论荷电 Kerr 黑洞的主级(tree-level)熵及其单圈量子修正.

前面几节讨论的都限于静态、非旋转的黑洞. 对稳态黑洞采用顶角奇异性方法必须解决 Kerr-Newman 黑洞的欧氏化(或复化)的问题和对其顶角几何的一般周期性分析. 虽然前面我们已给出欧氏化和周期性的解决方案,但是 K-N 情况下任意周期的顶角几何仍不清楚. 另外一个著名的问题是稳态黑洞熵的紫外(UV)发

散性,以及重正化是否像静态情况一样有效.下面几节将详细讨论这些问题.

5.19　欧氏克尔-纽曼几何

在 Boyer-Lindquist 坐标系中,采用闵氏号差,克尔-纽曼(Ker-Newman)度规具有形式:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{rr}\mathrm{d}r^2 + g_{\theta\theta}\mathrm{d}\theta^2 + g_{tt}\mathrm{d}t^2 + 2g_{t\phi}\mathrm{d}t\mathrm{d}\phi + g_{\phi\phi}\mathrm{d}\phi^2,$$
$$g_{rr} = \frac{\rho^2}{\Delta},\quad g_{\theta\theta} = \rho^2,\quad g_{tt} = -\frac{(\Delta - \alpha^2\sin^2\theta)}{\rho^2},$$
$$g_{t\phi} = -\frac{a\sin^2\theta(r^2 + a^2 - \Delta)}{\rho^2},$$
$$g_{\phi\phi} = \left[\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right]\sin^2\theta,$$
$$\Delta(r) = r^2 + a^2 + q^2 - 2mr,\quad \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta. \tag{5.19.1}$$

函数 Δr 可以写成 $\Delta r = (r - r_+)(r - r_-)$,其中

$$r_\pm = m \pm \sqrt{m^2 - a^2 - q^2}.$$

此空间有一对正交的 Killing 矢量:

$$K = \partial_t + \frac{a}{r^2 + a^2}\partial_\phi,\quad \tilde{K} = a\sin^2\theta\partial_t + \partial_\phi,$$
$$K^2 = -\frac{\Delta\rho^2}{(r^2 + a^2)^2},\quad \tilde{K}^2 = \rho^2\sin^2\theta,\quad K\cdot\tilde{K} = 0. \tag{5.19.2}$$

矢量 K 在区域 $r > r_+$ 内类时,$r = r_+$ 类光;$\tilde{K}$ 在轴($\theta = 0,\theta = \pi$)以外类空,在轴上 $\tilde{K} = 0$. 和 $K,\tilde{K}$ 对偶的 1 -形式为

$$\omega = \frac{(r^2 + a^2)}{\rho^2}(\mathrm{d}t - a\sin^2\theta\mathrm{d}\phi),$$
$$\tilde{\omega} = \frac{(r^2 + a^2)}{\rho^2}\left[\mathrm{d}\phi - \frac{a}{(r^2 + a^2)}\mathrm{d}t\right],$$
$$\omega[K] = \tilde{\omega}[\tilde{K}] = 1,\quad \omega[\tilde{K}] = \tilde{\omega}[K] = 0. \tag{5.19.3}$$

这里存在与施瓦西度规的对应. K 和 $\tilde{K}$ 对应于∂_t 和∂_ϕ,ω 和 $\tilde{\omega}$ 对应于 $\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}\phi$. 此对应几乎是精确的,但有一点例外:ω 和 $\tilde{\omega}$ 与 $\mathrm{d}\theta$ 和 $\mathrm{d}r$ 一起构成 1 -形式的非完全基. 这表明不存在整体定义的坐标 X 和 $\tilde{X}$,使得 $\omega = \mathrm{d}X$, $\tilde{\omega} = \mathrm{d}\tilde{X}$.

视界面定义为类时矢量 K 为零($K^2|_\Sigma = 0$)的面. 外视界是$r = r_+$ 的面. 另外,经常用到矢量∂_t 为零的面. 此面称为能层面,由方程

$$r^2 + a^2\cos^2\theta + q^2 - 2mr = 0$$

确定. 它位于外视界之外,并在轴 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 处与之相连.

现在考虑克尔-纽曼度规的欧氏化. 标准方法是令 $t = \mathrm{i}\tau$,并令 $a = \mathrm{i}\hat{a}$,$q = \mathrm{i}\hat{q}$.

欧氏矢量 $K, \tilde{K}$ 和相应的 1-形式 $\omega, \tilde{\omega}$ 为

$$K = \partial_\tau - \frac{\hat{a}}{r^2 - a^2}\partial_\phi, \quad \tilde{K} = \hat{a}\sin^2\theta\partial_r + \partial_\phi,$$

$$\omega = \frac{(r^2 - a^2)}{\rho^2}(\mathrm{d}\tau - \hat{a}\sin^2\theta\mathrm{d}\phi),$$

$$\tilde{\omega} = \frac{(r^2 - a^2)}{\rho^2}\left[\mathrm{d}\phi + \frac{\hat{a}}{(r^2 - a^2)}\mathrm{d}\tau\right]. \tag{5.19.4}$$

式中

$$\rho^2 = r^2 - a^2\cos^2\theta.$$

欧氏度规可写成

$$\mathrm{d}s_E^2 = \frac{\rho^2}{\hat{\Delta}}\mathrm{d}r^2 + \frac{\hat{\Delta}\rho^2}{(r^2 - a^2)^2}\omega^2 + \rho^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\tilde{\omega}^2). \tag{5.19.5}$$

式中 ω 和 $\tilde{\omega}$ 见(5.19.4),$\hat{\Delta} = r^2 - a^2 - q^2 - 2mr$. $\hat{\Delta}$的根为$\hat{r}_\pm = m \pm \sqrt{m^2 + a^2 \pm q^2}$. 由 $r = \hat{r}_+$ 定义的视界面 Σ 是 Killing 知量的稳态面. 引入新的径向变量 x,使得在视界附近有

$$\hat{\Delta} = r(r - \hat{r}_+) = \frac{\gamma^2 x^2}{4},$$

$$(r - \hat{r}_+) = \frac{\gamma x^2}{4}, \quad \gamma = 2\sqrt{m^2 + a^2 + q^2}. \tag{5.19.6}$$

于是精确至 $o(x^2)$,度规(5.19.5)变为

$$\mathrm{d}s_E^2 = \mathrm{d}s_\Sigma^2 + \rho_+^2\left[\mathrm{d}x^2 + \frac{\gamma^2 x^2}{4(r_+^2 - a^2)^2}\omega^2\right]. \tag{5.19.7}$$

式中

$$\rho_+^2 = r_+^2 - a^2\cos^2\theta,$$

而

$$\mathrm{d}s_\Sigma^2 = \rho_+^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\tilde{\omega}^2) = \rho_+^2\mathrm{d}\theta^2 + \frac{(r_+^2 - a^2)^2}{\rho_+^2}\sin^2\theta\mathrm{d}\psi^2 \tag{5.19.8}$$

是视界面 Σ 的度规. 这里我们用到了这样的事实:Σ 上可以引入一定义得很好的角坐标

$$\psi = \phi + [\hat{a}/(r_+^2 - a^2)]\tau.$$

度规(5.19.8)在点 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 处的规则性要求把 Σ 上的 ψ 和$(\psi + 2\pi)$看成一个点. 用欧氏 K-N 度规做完所有的计算后,我们再把结果解析延拓到实数 a 和 q.

(5.19.7)式可以写成

$$\mathrm{d}s_E^2 = \mathrm{d}s_\Sigma^2 + \rho_+^2\mathrm{d}s_{C_2}^2. \tag{5.19.9}$$

式中 ds_{C_2}是与视界 Σ 在点(θ,ψ)相连的 2 维盘 C_2 的度规：

$$ds_{C_2}^2 = dx^2 + \frac{\gamma^2 x^2}{4\rho_+^4}(d\tau - \hat{a}\sin^2\theta d\phi)^2. \quad (5.19.10)$$

考虑(θ,ψ)固定的度规(5.19.10). 在 C_2 上引入角坐标 $\chi = \tau - \hat{a}\sin^2\theta\phi$,则度规可写为

$$ds_{C_2}^2 = dx^2 + \frac{\gamma^2 x^2}{4\rho_+^4}d\chi^2. \quad (5.19.11)$$

如果要求在 $x = 0$ 处无奇异性,则需把点 χ 和($\chi + 4\pi\gamma^{-1}\rho_+^2$)看成同一个点;为了使其不依赖于视界上的坐标 θ,又必须把点(τ,ϕ)和($\tau + 2\pi\beta_H, \phi - 2\pi\Omega\beta_H$)等同,式中 $\Omega = \hat{a}/(r_+^2 - a^2)$是复角速度,$\beta_H = (r_+^2 - a^2)/\sqrt{m^2 + a^2 + q^2}$. 容易看出,等同的点有相同的坐标 ψ.

通过上述等同,我们可以得到视界 Σ 附近的欧氏 K-N 几何的图像. 和视界上每一点(θ,ψ)相连的是坐标为(x,χ)的 2 维盘 C_2. 虽然 χ 不是 4 维空间的整体坐标,在每一点(θ,ψ)都有一个新的 χ,但 C_2 上点的周期性等同却是普适的,而且独立于视界面上的任何点. 整体来说,K 不是坐标矢量. 但局域来看,我们有 $K = \partial_\chi$. 周期性在矢量 K 方向上,所得到的欧氏空间 E 是规则流形.

5.20　视界的外几何

对于欧氏度规(5.19.5),可以定义一对正交矢量$\{n_a = n_a^\mu \partial_\mu, a = 1,2\}$:

$$n_1^r = \sqrt{\frac{\hat{\Delta}}{\rho^2}}, \quad (5.20.1)$$

$$n_2^r = \frac{(r^2 - \hat{a}^2)}{\sqrt{\hat{\Delta}\rho^2}}, \quad n_2^\phi = \frac{-\hat{a}}{\sqrt{\hat{\Delta}\rho^2}}. \quad (5.20.2)$$

其协变分量为

$$n_r^1 = \sqrt{\frac{\rho^2}{\hat{\Delta}}}, \quad (5.20.3)$$

$$n_r^2 = \sqrt{\frac{\hat{\Delta}}{\rho^2}}, \quad n_\phi^2 = -\sqrt{\frac{\hat{\Delta}}{\rho^2}}\hat{a}\sin^2\theta. \quad (5.20.4)$$

矢量 n^1 和 n^2 垂直于视界面 Σ[由 $r = r_+$, $\Delta(r = r_+) = 0$ 定义],它是一个 2 维面,其诱导度规为

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu^1 n_\nu^1 - n_\mu^2 n_\nu^2.$$

此度规的非零分量为

$$\gamma_{\theta\theta} = \rho^2, \quad \gamma_{\tau\tau} = \frac{a^2 \sin^2\theta}{\rho^2}.$$

$$\gamma_{\tau\phi} = \frac{a(r^2 - a^2)\sin^2\theta}{\rho^2}.$$

$$\gamma_{\phi\phi} = \frac{(r^2 - a^2)^2 \sin^2\theta}{\rho^2}. \tag{5.20.5}$$

对于正交矢量 $n^a(a=1,2)$,可以定义面 Σ 的外曲率

$$\kappa^a_{\mu\nu} = -\gamma^\alpha_\mu \gamma^\beta_\nu \nabla_\alpha n^a_\beta,$$

$$\kappa^1_{\theta\theta} = -r\sqrt{\frac{\Delta}{\rho^2}},$$

$$\kappa^2_{\tau\tau} = \frac{r a^2 \sin^2\theta}{\rho^4}\sqrt{\frac{\Delta}{\rho^2}},$$

$$\kappa^1_{\tau\phi} = -\frac{ar(r^2 - a^2)\sin^2\theta}{\rho^4}\sqrt{\frac{\Delta}{\rho^2}},$$

$$\kappa^1_{\phi\phi} = -\frac{r(r - a^2)\sin^2\theta}{\rho^4}\sqrt{\frac{\Delta}{\rho^2}}, \tag{5.20.6}$$

和

$$\kappa^2_{\tau\tau} = -\frac{a^2 \sin\theta\cos\theta}{\rho^2}\sqrt{\frac{\Delta}{\rho^2}},$$

$$\kappa^2_{\tau} = -\frac{a(r^2 - a^2)\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}\sqrt{\frac{\Delta}{\rho^2}}. \tag{5.20.7}$$

也可以得到外曲率的迹 $\kappa^a = \kappa^a_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$,

$$\kappa^1 = -\frac{2r}{\rho^2}\sqrt{\frac{\Delta}{\rho^2}}, \kappa^2 = 0, \tag{5.20.8}$$

在面 Σ 上为零.

二次缩并

$$\kappa^1_{\mu\nu}\kappa_l^{\mu\nu} = \frac{2r^2 \Delta}{\rho^6},$$

$$\kappa^2_{\mu\nu}\kappa_2^{\mu\nu} = \frac{2a^2\cos^2\theta\,\Delta}{\rho^6}, \tag{5.20.9}$$

在静态($a=0$)和稳态($a\neq 0$)情况下在 Σ 上都为零. 故在视界上有 $t_r(\kappa\cdot\kappa)=\kappa^{a}_{\mu\nu}\kappa^{\mu\nu}_{a}=0$.

5.21　顶角奇异性和曲率张量

现在我们假设,以任意周期 $2\pi\beta$ 闭合 Killing 矢量 K 的径迹. 在视界附近,这表明在方程(5.19.9)和(5.19.10)中把 C_2 上的点(τ,ϕ)和$(\tau+2\pi\beta,\phi-2\pi\Omega\beta)$等同,而 $\beta\neq\beta_H$. 这样等同的点仍有相同的坐标 ψ 值. 于是,角坐标 χ 的周期为

$$2\pi\beta(1+a\hat{\Omega}\sin^2\theta).$$

引入周期为 2π 的新角坐标

$$\chi=\beta\rho_+^2(r_+^2-a^2)^{-1}\bar{\chi},$$

C_2 的度规变成

$$ds^2_{C_{2,\alpha}}=dx^2+\alpha^2x^2d\bar{\chi}^2,\tag{5.21.1}$$

这正是角亏损为 $\delta=2\pi(1-\alpha)$ ($\alpha=\beta/\beta_H$) 的 2 维圆锥的度规. 因而,4 维度规(5.19.5)描述有奇异面 Σ 的欧氏顶角空间 E_α.

顶角奇点处曲率张量的行为,在平直 2 维圆锥和一般静态度规的情况下已精确得到. 我们所考虑的 K-N 度规是稳态的而不是静态的. 因此,前面相应的公式必须重新推导.

我们采用在静态情况下已获成功的方法. 先把顶角奇异性规则化,即用一系列由参数 b 表示的规则度规代替顶角度规(5.21.1):

$$ds^2_{C_{2,\alpha,b}}=f(x,b)dx^2+\alpha^2x^2d\bar{\chi}^2.\tag{5.21.2}$$

式中 $f(x,b)$ 是某个光滑的规则化函数,当 $b\to 0$ 时它趋于 1. 例如,

$$f(x,b)=\frac{x^2+\alpha^2b^2}{x^2+b^2}$$

就是一个合适的规则化函数. 在极限 $b\to 0$ 下,由这一系列度规(5.21.2)可以得到曲率的类 δ 贡献.

为了将此方法应用于 Kerr 度规,考虑视界面 Σ 附近的情况. 对于 $\beta\neq\beta_H$,度规可写为

$$ds^2_{E_\alpha}=ds^2_\Sigma+\rho_+^2\,ds^2_{C_\alpha}.\tag{5.21.3}$$

把顶角度规用 $ds^2_{C_{\alpha,b}}$ 代替,可以得到一系列规则度规:

$$ds^2_{E_{\alpha,b}}=ds^2_\Sigma+\rho_+^2\,ds^2_{C_{\alpha,b}}.\tag{5.21.4}$$

为了计算曲率,我们定义对度规(5.21.4)而言正交归一化的 1 - 形式的(非完全)基

$$e^1=b\hat{\rho}_+f^{1/2}(y)dy,$$

$$e^2 = by\frac{(m^2+a^2+q^2)^{1/2}}{\hat{\rho}_+}(\mathrm{d}\tau - \hat{a}\sin^2\theta\mathrm{d}\phi),$$

$$e^3 = \hat{\rho}_+\,\mathrm{d}\theta,$$

$$e^4 = \frac{(r_+^2-a^2)}{\hat{\rho}_+}\sin\theta\left(\mathrm{d}\phi + \frac{\hat{a}}{(r_+^2-a^2)}\mathrm{d}\tau\right). \tag{5.21.5}$$

式中坐标变换为

$$x = by,\quad f(y) = (y^2+\alpha^2)/(y^2+1).$$

洛伦兹联络 1 – 形式 $\omega^a_b = \omega^a_{bc}e^c$ 可以由方程

$$\mathrm{d}e^a + \omega^a_b \wedge e^b = 0. \tag{5.21.6}$$

我们感兴趣的是当 $b\to 0$ 时,洛伦兹联络中的奇异分量. 分析(5.21.5)式,我们发现只有 $\mathrm{d}e^2$ 含有奇异项:

$$\mathrm{d}e^2 = \frac{\mathrm{d}y}{y}\wedge e^2 + \cdots = [byf^{1/2}(y)]^{-1}e^1\wedge e^2 + \cdots \tag{5.21.7}$$

式中省略号表示 $b\to 0$ 时的有限项. 由(5.21.7)式可知,洛伦兹联络的唯一奇异分量为

$$\omega^2_1 = [by\,\hat{\rho}_+ f^{1/2}(y)]^{-1}e^2 + \cdots \tag{5.21.8}$$

曲率的 2 – 形式 $R^a_b = R^a_{bcd}e^c\wedge e^d$ 定义为

$$R^a_b = \mathrm{d}\omega^a_b + \omega^a_c\wedge\omega^c_b.$$

它有唯一一个奇异分量

$$R^2_1 = \mathrm{d}\omega^2_1 + \cdots = \frac{1}{2yb^2\rho_+^2}\frac{f'_y}{f^2}e^2\wedge e^1 + \cdots$$

故曲率张量的唯一奇异分量为

$$R_{2121} = \frac{1}{2yb^2\rho_+^2}\frac{f'_y}{f^2} + \cdots \tag{5.21.9}$$

引入一对矢量[见(5.20.1)和(5.20.2)式] $n_a = n^\mu_a\partial_\mu$, $a=1,2$,它们垂直于视界 Σ,且与 1 – 形式 e^α 对偶,则有

$$R_{2121} = \frac{1}{2}R_{\mu\nu\alpha\beta}n^\mu_a n^\nu_b n^\alpha_a n^\beta_b.$$

为了证明当 $b\to 0$ 时 R_{2121} 的形为类似 δ 函数,考虑积分

$$I_{D_\varepsilon} = \int_{D_\varepsilon} R_{2121}v(x,\theta,\psi)e^1\wedge e^2\wedge e^3\wedge e^4. \tag{5.21.10}$$

式中小盘 D_ε 围绕着视面 Σ, $0\leqslant x\leqslant\epsilon$. 在(5.21.10)式中, $v(x,\theta,\psi)$ 是一个试验函数,在矢量 K 的轨迹上为常数. 可以把它展开:

$$v(x,\theta,\psi) = v_0(\theta,\psi) + v_1(\theta,\psi)x^2 + \cdots$$

$$= v_0(\theta,\psi) + b^2 v_1(\theta,\psi) y^2 + \cdots$$

记住(θ,ψ)是视界上的坐标. 把(5.21.5)和(5.21.9)式代入(5.21.10)式,得到

$$I_{D_\varepsilon} = \int_0^{\epsilon/b} \mathrm{d}y \frac{f'_y}{2f^{3/2}} \sqrt{m^2 + a^2 + q^2} \oint (\mathrm{d}\tau$$

$$- \hat{a}\sin^2\theta \mathrm{d}\phi) \int_\Sigma \frac{1}{\rho_+^2} (v_0 + v_1 b^2 y^2 + \cdots) e^3 \wedge e^4. \tag{5.21.11}$$

(5.21.11)式中,我们先在正交于$\Sigma(\theta,\psi$固定)的子空间中对$e^1 \wedge e^2$积分,然后再在视界上做积分$\int_\Sigma e^3 \wedge e^4$,得到

$$\oint (\mathrm{d}\tau - \hat{a}\sin^2\theta \mathrm{d}\phi) = \frac{2\pi\beta\rho_+^2}{r_+^2 - a_+^2}. \tag{5.21.12}$$

式中积分域为(θ,ψ)固定时 Killing 矢量K的闭合积分路径.

当$b \to 0$时,(5.21.11)式中y的积分上限$\epsilon/b \to \infty$,故

$$\int_0^\infty \mathrm{d}y \frac{f'_y}{2f^{3/2}} = -f^{-1/2}(y)\Big|_0^\infty = \frac{1-\alpha}{\alpha}. \tag{5.21.13}$$

由(5.21.11)~(5.21.13)式,当$b \to 0$时,考虑到$\beta_H = (r_+^2 - a^2)/\sqrt{m^2 + a^2 + q^2}$,最后得到

$$I_{D_\epsilon} = 2\pi(1-\alpha) \int_\Sigma v_0(\theta,\psi) e^3 \wedge e^4. \tag{5.21.14}$$

由于此式对于任意小的ϵ均成立,我们得出结论,在极限$b \to 0$下,R_{2121}的行为类似于δ函数. 注意到矢量n_a与Σ正交,我们得到

$$\begin{aligned} R^{\mu\nu}_{\alpha\beta} &= \bar{R}^{\mu\nu}_{\alpha\beta} + 2\pi(1-\alpha)[(n^\mu n_\alpha)(n^\nu n_\beta) - (n^\mu n_\beta)(n^\nu n_\alpha)]\delta_\Sigma, \\ R^\mu_\nu &= \bar{R}^\mu_\nu + 2\pi(1-\alpha)(n^\mu n_\nu)\delta_\Sigma, \\ R &= \bar{R} + 4\pi(1-\alpha)\delta_\Sigma. \end{aligned} \tag{5.21.15}$$

式中δ_Σ是δ函数

$$\int_{\mathscr{M}} f\delta_\Sigma e' \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4 = \int_\Sigma f e^3 \wedge e^4,$$

$$(n_\mu n_\nu) = \sum_{a=1}^{2} n^a_\mu n^a_\nu.$$

特别是,由(5.21.15)式可以得到

$$\int_{E_\alpha} R e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4 = \alpha \int_E \bar{R} e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4 + 4\pi(1-\alpha)A_\Sigma. \tag{5.21.16}$$

式中$A_\Sigma = \int_\Sigma e^3 \wedge e^4$是$\Sigma$的面积. 对于 K-N 度规,$\bar{R} = 0$. 显然,(5.21.15)~(5.21.16)式和静态情况下得到的结果相同.

为了应用,还需要知道曲率的二次缩并在空间 E_α 上的积分. 根据(5.21.15)式,R 不仅含有 $\bar{R}$ 项,还含有$(1-\alpha)\delta_\Sigma$ 的贡献. 因此,可以得到一个形式上的结果

$$\int_{E_\alpha}\mathscr{R}^2 = \alpha\int_{E_{\alpha=1}}\bar{\mathscr{R}}^2 + 2(1-\alpha)\int_\Sigma \bar{\mathscr{R}}_n + o((1-\alpha)^2). \qquad (5.21.17)$$

式中 $\bar{\mathscr{R}}_n$ 表示张量 $\bar{\mathscr{R}}$ 到正交于奇异面 Σ 的子空间上的投影. 上式定义得并不好,因为 $\mathscr{R}^2$ 中含有$[(1-\alpha)\delta_\Sigma]^2$ 项. 幸亏它是$(1-\alpha)$的高阶项,我们把它放到了最后一项中.

有人曾就静态情况得到了(5.21.17)式. 为了在 K-N 度规下证明这一点,我们必须写出视界 Σ 附近的度规(5.19.5),并包含所有 x^2 阶的项. 考虑到前面引入的规则化函数,度规可写为

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2_{E_{a,b}} = {} & byf(y)\mathrm{d}y^2 + \frac{\gamma^2 b^2 y^2}{4\rho_+^2}(\mathrm{d}\tau - \hat{a}\sin^2\theta\mathrm{d}\phi)^2 \\
& + \left(\rho_+^2 + \frac{\gamma}{2}b^2 y^2 \hat{r}_+\right)\mathrm{d}\theta^2 + \left[\frac{(r_+^2 - a^2)^2}{\rho_+^2} + \frac{(r_+^2 - a^2)}{\rho_+^2}\right. \\
& \left. \times\left(1 - \frac{(r_+^2 - a^2)}{2\rho_+^2}\right)\gamma \hat{r}_+ b^2 y^2\right]\sin^2\theta\left(\mathrm{d}\phi + \frac{\hat{a}}{r_+^2 - a^2}\mathrm{d}\tau\right)^2 \\
& - \frac{\gamma \hat{a} b^2 y^2}{2\rho_+^2}\sin^2\theta\left(\mathrm{d}\phi + \frac{\hat{a}}{r_+^2 - a^2}\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}\tau. \qquad (5.21.18)
\end{aligned}$$

曲率二次缩并(用 $\mathscr{R}^2$ 表示),可以形式地写为

$$\mathscr{R}^2 = b^2 A + \frac{f'_y}{b^2}B + \frac{(f'_y)^2}{b^4}C + o(b^4). \qquad (5.21.19)$$

式中函数 A, B, C 不依赖 b,且不含有规则化函数 $f(y)$ 的导数.

由于 Σ 附近,积分的测度与 b^2 成正比,再注意到 $f(y)$ 的导数行为是 $f'(y)\sim(1-\alpha)$,便可知道(5.21.19)式中第二、三项积分后在极限 $b\to 0$ 下分别得到(5.21.17)式中的第二、三项.

经过直接和冗长的计算,在极限 $b\to 0$ 下,得到

$$\int_{E_\alpha} R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \alpha\int_E \bar{R}^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu\nu} + 4\pi(1-\alpha)\times\int_\Sigma \bar{R}_{aa} + o((1-\alpha)^2), \qquad (5.21.20)$$

$$\int_{E_\alpha} R^{\mu\nu\lambda\rho}R_{\mu\nu\lambda\rho} = \alpha\int_E \bar{R}_{\mu\nu\lambda\rho}R_{\mu\nu\lambda\rho} + 8\pi(1-\alpha)\times\int_\Sigma \bar{R}_{abab} + o((1-\alpha)^2). \qquad (5.21.21)$$

式中

$$\bar{R}_{aa} = \Sigma_{a=1,2}\bar{R}_{\mu\nu}n_a^\mu n_a^\nu,$$

$$\bar{R}_{abab} = \Sigma_{a,b=1,2}\bar{R}_{\mu\nu\lambda\rho}n_a^\mu n_a^\lambda n_b^\nu n_b^\rho.$$

在计算过程中,我们用到了 Σ 附近的积分测度

$$\mu_{E_{a,b}} = \rho_+^2 \mu_\Sigma \mu_{C_{a,b}},$$

其中的 $\mu_\Sigma = (r_+^2 - a^2)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\psi\,(0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi)$ 是 Σ 面上的测度,而 $\mu_{C_{a,b}} = \alpha b^2 f^{1/2}(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\bar{\chi}(0 \leqslant \bar{\chi} \leqslant 2\pi)$ 是规则化圆锥面 $C_{\alpha,b}$ 上的测度. 对于 R^2 的积分,我们得到

$$\int_{E_\alpha} R^2 = o((1-\alpha)^2).$$

由于 K-N 度规满足 $\bar{R}=0$,上式与期望的结果

$$\int_{E_\alpha} R^2 = \alpha \int_E \bar{R}^2 + 8\pi(1-\alpha)\int_\Sigma \bar{R} + o((1-\alpha)^2) \tag{5.21.22}$$

一致.

对于含顶角奇异性的稳态度规,我们得到了与静态情况一致的结果(5.21.20)~(5.21.22)式.

对于 K-N 度规,在视界面 Σ 上有

$$\frac{1}{2}\bar{R}_{abab} = \bar{R}_{2121} = \frac{r_+^2(4q^2 + 8m\hat{r}_+) - (q^2 + 6m\hat{r}_+)\rho^2}{\rho_+^6},$$

$$\frac{1}{2}\bar{R}_{aa} = \bar{R}_{11} = \bar{R}_{22} = \frac{q^2}{\rho_+^4}. \tag{5.21.23}$$

在 Σ 上积分,得到

$$\int_\Sigma \bar{R}_{abab} = 8\pi\frac{(r_+^2 + q^2)}{r_+^2} + 4\pi\frac{q^2}{r_+^2}\frac{(r_+^2 - a^2)}{\hat{a}\hat{r}_+}\ln\left(\frac{\hat{r}_+ + a}{\hat{r}_+ - a}\right)$$

$$\int_\Sigma \bar{R}_{aa} = 4\pi\frac{q^2}{r_+^2}\left[1 + \frac{(r_+^2 - a^2)}{2\hat{a}\hat{r}_+}\ln\left(\frac{\hat{r}_+ + a}{\hat{r}_+ - a}\right)\right]. \tag{5.21.24}$$

将这些式子解析延拓,回到参量 a 和 q 的实数值,需要做代换

$$q^2 = -q^2, \quad a^2 = -a^2, \quad \hat{r}_+ = r_+,$$

$$\frac{l}{\hat{a}}\ln\left(\frac{\hat{r}_+ + a}{\hat{r}_+ - a}\right) = \frac{2}{a}\arctan\left(\frac{a}{r_+}\right). \tag{5.21.25}$$

5.22 热核展开和熵

人们对温度为 $T=(2\pi\beta)^{-1}$ 的统计性场系统应用欧氏路径积分方案时,虚时间 τ 的周期为 $2\pi\beta$. 这对于度规不含 τ 的静态场适用,只要把 Killing 矢量 ∂_t 的积分曲线以周期 $2\pi\beta$ 闭合就行了.

在旋转黑洞的情况下,须闭合矢量 K[见(5.19.4)式]的积分曲线. 结果对于任意的 β 得到顶角空间 E_α. 这一几何已经描述过了. 于是配分函数为

$$Z(\beta) = \int [D_\varphi] \exp[-I_E(\varphi, g_{\mu\nu})], \tag{5.22.1}$$

式中物质的欧氏作用量 I_E 是对空间 E_α 而言的,物质场 φ 加上了边界条件(周期性).其熵为

$$S = -(\beta\partial_\beta - 1)\ln Z(\beta)|_{\beta=\beta_H}. \tag{5.22.2}$$

虽然 K-N 度规是以电磁场为源的爱因斯坦场方程的解,但是引力作用量却总要被量子修正引起的高阶曲率项所修正.这样的 R^2 项必须一开始就考虑进来,其裸常数($c_{1,B}, c_{2,B}, c_{3,B}$)(主级)用来吸收单圈无穷大.于是,主级引力作用量泛函为

$$W_{gr} = \int \sqrt{g} d^4 x \left(-\frac{1}{16\pi G_B} R + c_{1,B} R^2 + c_{2,B} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + c_{3,B} R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} \right). \tag{5.22.3}$$

相应的主级熵可以在引入规则化顶角奇异性和应用式(5.22.1)和(5.22.2)之后做为作用量(5.22.3)的复制品而得到.应用式(5.21.21)~(5.21.23),我们得到

$$S(G_B, c_{i,B}) = \frac{1}{4G_B} A_\Sigma - \int_\Sigma (8\pi c_{1,B} \bar{R} + 4\pi c_{2,B} \bar{R}_{aa} + 8\pi c_{3,B} \bar{R}_{abab}), \tag{5.22.4}$$

这正是静态情况的表达式.(5.22.4)式对离壳情况是成功的,因为我们并未要求度规满足任何场方程.即壳时,必须把 K-N 度规满足的场方程 $\bar{R}=0$ 代入上式.

在单圈水平上,物质作用量为

$$I_E = \frac{1}{2} \int_{E_\alpha} (\nabla\varphi)^2,$$

配分函数为

$$\ln Z(\beta) = -\frac{1}{2} \ln \det(\Box_{E\alpha}),$$

式中$\Box \equiv \nabla_\mu \nabla^\mu$ 是顶角空间 E_α 的拉普拉斯算符.在 Dewitt-Schwinger 固有时间表象中,

$$\ln\det(-\Box) = -\int_{\varepsilon^2}^{\infty} \frac{ds}{s} \mathrm{tr}(e^{s\Box}). \tag{5.22.5}$$

在4维情况下有渐近展开式

$$\mathrm{tr}(e^{s\Box}) = \frac{1}{(4\pi s)^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n. \tag{5.22.6}$$

对 $\ln Z$ 的发散部分有

$$(\ln Z)_{\mathrm{div}} = \frac{1}{32\pi^2} \left(\frac{1}{2} a_0 \epsilon^{-4} + a_1 \varepsilon^{-2} + 2a_2 \ln \frac{L}{\epsilon} \right). \tag{5.22.7}$$

式中 L 为红外截断.众所周知,对于有顶角奇异性的流形,(5.22.6)式中的热核系数是标准部分和顶角部分之和:

$$a_n = a_n^{st} + a_{n,\alpha}, \tag{5.22.8}$$

标准系数 a_n^{st} 与光滑流形的情况相同:

$$a_0^{st}=\int_{E_\alpha}1,\quad a_1^{st}=\frac{1}{6}\int_{E_\alpha}\bar{R},$$

$$a_2^{st}=\int_{E_\alpha}\left(\frac{1}{180}\bar{R}_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{R}^{\mu\nu\alpha\beta}-\frac{1}{180}\bar{R}_{\mu\nu}\bar{R}^{\mu\nu}-\frac{1}{30}\Box\bar{R}+\frac{1}{72}\bar{R}^2\right),\tag{5.22.9}$$

而来自奇异面Σ的部分为

$$a_{0,\alpha}=0;\quad a_{1,\alpha}=\frac{\pi}{3}\frac{(1-\alpha^2)}{\alpha}\int_\Sigma\sqrt{\gamma}\mathrm{d}^2\theta;\tag{5.22.10}$$

$$a_{2,\alpha}=\frac{\pi}{3}\frac{(1-\alpha^2)}{\alpha}\int_\Sigma\left(\frac{1}{6}\bar{R}+\lambda_1[\kappa^a\kappa^a-2\mathrm{tr}(\kappa\cdot\kappa)]\right)$$

$$\times\sqrt{\gamma}\mathrm{d}^2\theta-\frac{\pi}{180}\frac{(1-\alpha^4)}{\alpha^3}\int_\Sigma(\bar{R}_{aa}-2\bar{R}_{abab}$$

$$+\frac{1}{2}\kappa^a\kappa^a+\lambda_2[\kappa^a\kappa^a-2\mathrm{Tr}(\kappa\cdot\kappa)])\sqrt{\gamma}\mathrm{d}^2\theta.$$

式中 λ_1 和 λ_2 为常数，$\kappa^a_{\mu\nu}(a=1,2)$ 是相对于 n^a 的面Σ的外曲率，$\kappa^a=g^{\mu\nu}\kappa^a_{\mu\nu}$，$\mathrm{tr}(\kappa\cdot\kappa)=\sum_{a=1,2}\kappa^a_{\mu\nu}\kappa^{\mu\nu}_a$.

把(5.22.2)式应用于(5.22.7)式，并考虑到 $a_n^{st}\sim\alpha$，可以得到熵的发散量子修正：

$$S_{\mathrm{div}}=\frac{1}{48\pi\epsilon^2}A_\Sigma+\left[\frac{1}{144\pi}\int_\Sigma\bar{R}-\frac{1}{16\pi}\frac{1}{45}\int_\Sigma(\bar{R}_{aa}-2\bar{R}_{abab})\right.$$

$$\left.+\frac{1}{16\pi}\frac{1}{90}\int_\Sigma\kappa^a\kappa^a+\frac{1}{24\pi}\left(\lambda_1-\frac{\lambda_2}{30}\right)\int_\Sigma[\kappa^a\kappa^a-2\mathrm{tr}(\kappa\cdot\kappa)]\right]\ln\frac{L}{\epsilon}.\tag{5.22.11}$$

我们看到，熵的发散部分既依赖于曲率到正交于视界面Σ的子空间的投影 $\bar{R}_{aa}$ 和 $\bar{R}_{abab}$，也依赖于Σ的外曲率的二次缩并. 静态情况下，此外曲率为零，(5.22.11)式变成主级熵(5.22.4)的形式. 这一点使人们对任意静态黑洞证明，熵的所有UV发散均被主级引力作用量中引力常数的标准重正化所吸收. 要同样地分析K-N黑洞，则需研究旋转荷电黑洞视界面的外几何. 此时有(见5.20节)

$$\sum_{a=1,2}\kappa^a\kappa^a=\mathrm{tr}(\kappa\cdot\kappa)=0.$$

这使得K-N度规情况下系数(5.22.10)和(5.22.11)式与静态的相同.

因此，(5.22.11)式的 S_{div} 与主级熵的形式相同，重正化对稳态黑洞也成立. 在某种意义上这是自然的，因为静态黑洞和稳态黑洞的经典热力学表述是一样的，因而可以预见这对于量子情况也成立.

在K-N背景下考虑(5.22.11)式. 把(5.21.25)式和 $\bar{R}=0$ 代入，并做解析延拓(5.21.26)式，最后得到K-N黑洞的量子熵

$$S_{\text{div}} = \frac{1}{48\pi\epsilon^2}A_\Sigma + \frac{1}{45}\left\{1 - \frac{3q^2}{4r_+^2}\left[1 + \frac{(r_+^2 + a^2)}{ar_+}\arctan\left(\frac{a}{r_+}\right)\right]\right\}\ln\frac{L}{\epsilon}. \tag{5.22.12}$$

式中 $A_\Sigma = 4\pi(r_+^2 + a^2)$ 是视界 Σ 的面积. 在极限 $a \to 0$ 下,此式变成 R-N 黑洞的熵. 奇怪的是,在无荷($q=0$)的情况下量修正(5.22.12)不依赖于转动参量 a,而与施瓦西洞的量子熵相同. 为什么会这样,现在还不清楚.

用顶角奇异性的欧氏方案处理黑洞热力学对静态情况是很合适的. 由此可以得到静态黑洞的经典熵和量子熵. 我们已指出,经典的静态和稳态黑洞热力学的表述是相同的. 一个基本假定是顶角奇异性方法也适用于旋转黑洞.

本节中我们按此思路进行了计算和讨论. 我们研究了 K-N 度规的欧氏几何;建立了视界附近的顶角奇异性,并得到了曲率的 δ 函数行为——与静态黑洞的情况非常相似.

表述静态黑洞量子热力学的主要一点是证明量子物质引起的黑洞熵的 UV 发散可以由主级引力作用量中耦合常数的标准重正化消去. 这使得熵成为定义得很好的量子场论量. 我们证明了,对于 K-N 黑洞,由几何不变量表示的 S_{div} 像静态情况一样具有与主级熵相同的形式. 这说明重正化对静态和稳态黑洞都适用,只要对量子热力学的处理正确.

5.23 Dirac 旋量场的熵

本节根据离壳方法中的砖墙模型(见 5.5 节),讨论 Dirac 旋量场的熵,得到关于施瓦西背景下 Dirac 场的自由能和熵的表达式;所得结果和 de Alwis 等采用泛函积分方法得到的结果一致.

旋标架形式的 Dirac 方程具有形式

$$\begin{aligned}
&(D + \varepsilon - \rho)F_1 + (\bar\delta + \pi - \alpha)F_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}\mu_0 G_1, \\
&(\Delta' + \mu - \gamma)F_2 + (\delta + \beta - \tau)F_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}\mu_0 G_2, \\
&(D + \varepsilon^* - \rho^*)G_2 - (\delta + \pi^* - \alpha^*)G_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}\mu_0 F_2, \\
&(\Delta' + \mu^* + \gamma^*)G_1 - (\bar\delta + \beta^* - \tau^*)G_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}\mu_0 F_1.
\end{aligned} \tag{5.23.1}$$

旋系数与零标架之间的关系为

$$\alpha = \frac{1}{2}(l_{\mu;\nu}n^\mu\bar m^\nu - m_{\mu;\nu}\bar m^\mu\bar m^\nu), \quad \rho = l_{\mu;\nu}m^\mu\bar m^\nu,$$

$$\beta = \frac{1}{2}(l_{\mu;\nu}n^{\mu}m^{\nu} - m_{\mu;\nu}\overline{m}^{\mu}m^{\nu}), \quad \pi = -n_{\mu;\nu}\overline{m}^{\mu}l^{\nu},$$

$$\gamma = \frac{1}{2}(l_{\mu;\nu}n^{\mu}n^{\nu} - m_{\mu;\nu}\overline{m}^{\mu}n^{\nu}), \quad \mu = -n_{\mu;\nu}\overline{m}^{\mu}m^{\nu}, \tag{5.23.2}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(l_{\mu;\nu}n^{\mu}l^{\nu} - m_{\mu;\nu}\overline{m}^{\mu}l^{\nu}), \quad \tau = l_{\mu;\nu}m^{\mu}n^{\nu};$$

$$D = l^{\mu}\partial_{\mu}, \quad \Delta' = n^{\mu}\partial_{\mu}, \quad \delta = m^{\mu}\partial_{\mu}, \quad \bar{\delta} = \overline{m}^{\mu}\partial_{\mu}. \tag{5.23.3}$$

施瓦西度规对应的零标架选为

$$l^{\mu} = \frac{1}{\Delta}(r^2, \Delta, 0, 0), \quad n^{\mu} = \frac{1}{2r^2}(r^2, -\Delta, 0, 0),$$

$$m^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}r}\left(0, 0, 1, \frac{\mathrm{i}}{\sin\theta}\right),$$

$$\overline{m}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}r}\left(0, 0, 1, -\frac{\mathrm{i}}{\sin\theta}\right), \tag{5.23.4}$$

其中 $\Delta = r^2 - 2Mr$. 引入 4 分量旋量

$$F_1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}r^{-1}f_1(r,\theta),$$

$$F_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}f_2(r,\theta), \tag{5.23.5}$$

$$G_1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}g_1(r,\theta),$$

$$G_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}r^{-1}g_2(r,\theta).$$

此时(5.23.1)式可写为

$$\mathscr{D}_0 f_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathscr{L}^+_{1/2}f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\mu r g_1,$$

$$\Delta\mathscr{D}^+_{1/2}f_2 - \sqrt{2}\mathscr{L}_{1/2}f_1 = -\sqrt{2}\mathrm{i}\mu r g_2, \tag{5.23.6}$$

$$\mathscr{D}_0 g_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathscr{L}_{1/2}g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\mu r f_2,$$

$$\Delta\mathscr{D}^+_{1/2}g_1 + \sqrt{2}\mathscr{L}^+_{1/2}g_2 = -\sqrt{2}\mathrm{i}\mu r f_1,$$

其中,

$$\mathscr{D}_n = \partial_r - \mathrm{i}E\frac{r^2}{\Delta} + 2n\frac{r-M}{\Delta},$$

$$\mathscr{D}^+_n = \partial_r + \mathrm{i}E\frac{r^2}{\Delta} + 2n\frac{r-M}{\Delta}, \tag{5.23.7}$$

$$\mathscr{L}^+_n = \partial_\theta + \frac{m}{\sin\theta} + n\cot\theta,$$

$$\mathscr{L}_n = \partial_\theta - \frac{m}{\sin\theta} + n\cot\theta.$$

令

$$\begin{aligned} f_1(r,\theta) &= R_{-1/2}(r)\Theta_{-1/2}(\theta), \\ f_2(r,\theta) &= R_{+1/2}(r)\Theta_{+1/2}(\theta), \\ g_1(r,\theta) &= R_{+1/2}(r)\Theta_{-1/2}(\theta), \\ g_2(r,\theta) &= R_{-1/2}(r)\Theta_{+1/2}(\theta), \end{aligned} \tag{5.23.8}$$

分离变量.为了简单,令 $\mu_0=0$,即只考虑旋量场无质量的情况,我们得到

$$\begin{aligned} \Delta\mathscr{D}_{1/2}^{+}\mathscr{D}_0 R_{-1/2} &= \lambda^2 R_{-1/2}, \\ \mathscr{D}_0\Delta\mathscr{D}_{1/2}^{+} R_{+1/2} &= \lambda^2 R_{+1/2}, \\ \mathscr{L}_{1/2}\mathscr{L}_{1/2}^{+}\Theta_{+1/2} + \lambda^2\Theta_{+1/2} &= 0, \\ \mathscr{L}_{+1/2}^{+}\mathscr{L}_{1/2}\Theta_{-1/2} + \lambda^2\Theta_{-1/2} &= 0, \end{aligned} \tag{5.23.9}$$

即

$$\Delta\frac{\mathrm{d}^2R_{-1/2}}{\mathrm{d}r^2}+(r-M)\frac{\mathrm{d}R_{-1/2}}{\mathrm{d}r^2}+\left[\frac{E^2r^4}{\Delta}-2\mathrm{i}Er+\frac{\mathrm{i}Er^2(r-M)}{\Delta}-\lambda^2\right]R_{-1/2}=0, \tag{5.23.10}$$

$$\Delta\frac{\mathrm{d}^2R_{+1/2}}{\mathrm{d}r^2}+3(r-M)\frac{\mathrm{d}R_{+1/2}}{\mathrm{d}r^2}+\left[\frac{E^2r^4}{\Delta}+2\mathrm{i}Er-\frac{\mathrm{i}Er^2(r-M)}{\Delta}+1-\lambda^2\right]R_{+1/2}=0, \tag{5.23.11}$$

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}-\frac{m^2}{\sin^2\theta}+\lambda^2\right]\Theta_{\pm1/2}+\left[\frac{1}{4}\cot^2\theta\mp\frac{m\cos\theta}{\sin^2\theta}-\frac{1}{2\sin^2\theta}\right]\Theta_{\pm1/2}=0. \tag{5.23.12}$$

径向方程可以用 WKB 近似方法求解,角向方程可以化为勒让德方程,Dirac 方程的角向解可写为形式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\Theta_{\pm}(\theta')=Y_{lm}(\theta',\varphi). \tag{5.23.13}$$

因此,Dirac 场的 4 分量波函数可写为形式

$$\phi=[F_1,F_2,G_1,G_2]^{\mathrm{T}}\sim[r^{-1}R_-,R_+,R_+,r^{-1}R_-]^{\mathrm{T}}Y_{lm}(\theta',\varphi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}. \tag{5.23.14}$$

利用熵的可加性,先求出每一分量对应的熵,然后再相加,便可得到 Dirac 场的熵.

对于 F_1 分量,利用砖墙法,设波函数在靠近视界 h 范围内为零:

$$F_1(r)=0\quad(r\leqslant r_H+h), \tag{5.23.15}$$

式中 $r_H=2M$,h 为非负小量的紫外截断因子,L 为红外截断因子,$L\gg r_H$.

F_1 的径向分量满足方程

$$\Delta\frac{\mathrm{d}^2R_{-1/2}}{\mathrm{d}r^2}+(r-M)\frac{\mathrm{d}R_{-1/2}}{\mathrm{d}r}+\left[\frac{E^2r^4}{\Delta}-2\mathrm{i}Er+\frac{\mathrm{i}Er^2(r-M)}{\Delta}-\lambda^2\right]R_{-1/2}=0. \tag{5.23.16}$$

设解为 $R_{-1/2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_1(r)}$，运用 WKB 近似可得

$$K_1^2=\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}E^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right].\qquad(5.23.17)$$

式中 $K_1=\partial_r S_1(r)$ 为径向波数.

假设所研究的 Dirac 场处于 Hartle-Hawking 真空态，此时 Dirac 场的温度应该为 Hawking 温度 $T_H=\frac{k}{2\pi}=\frac{1}{8\pi M}$. 根据正则系综理论，费米体系的自由能可表示为

$$\beta f_1=-\sum_E\ln(1+\mathrm{e}^{-\beta E}).\qquad(5.23.18)$$

作为半经典处理，视能态为连续分布，因而求和改为积分

$$\sum_E\to\int_0^\infty\mathrm{d}Eg(E).\qquad(5.23.19)$$

式中 $g(E)$ 为态密度，$g(E)=\frac{\mathrm{d}\Gamma(E)}{\mathrm{d}E}$，$\Gamma(E)$ 为微观态数目，即

$$\begin{aligned}\Gamma(E)&=\sum_{m,l}n_r(E,l,m)=\sum_l(2l+1)n_r(E,l)\\&=\int_l(2l+1)\mathrm{d}l\frac{1}{\pi}\int_r K_r(E,l)\mathrm{d}r.\end{aligned}\qquad(5.23.20)$$

式中对角量子数的求和也作积分处理，并且要求在积分时必须保持 $K_r(E,l)\geqslant0$. 于是，系统的自由能可表示为

$$\begin{aligned}\beta f_1&=-\int_0^\infty\mathrm{d}Eg_1(E)\ln(1+\mathrm{e}^{-\beta E})\\&=-\beta\int_0^\infty\mathrm{d}E\frac{\Gamma(E)}{\mathrm{e}^{\beta E}+1}\\&=-\frac{\beta}{\pi}\int_0^\infty\mathrm{d}E\int_{2M+h}^L\mathrm{d}r\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\int_l(2l+1)\mathrm{d}l\\&\quad\times(\mathrm{e}^{\beta E}+1)^{-1}\sqrt{E^2-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{l(l+1)}{r^2}}\\&=-\frac{2}{3}\frac{\beta}{\pi}\int_{2M+h}^L\mathrm{d}r\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-2}r^2\int_0^\infty\mathrm{d}E\frac{E^3}{\mathrm{e}^{\beta E}+1}.\end{aligned}\qquad(5.23.21)$$

当 $L\gg2M$ 和 $h\ll2M$ 时有

$$f_1\approx-\frac{7}{2}\frac{\pi^3}{90h}\left(\frac{2M}{\beta}\right)^4-\frac{2}{9\pi}L^3\int_0^\infty\mathrm{d}E\frac{E^3}{\mathrm{e}^{\beta E}+1}.\qquad(5.23.22)$$

式中右端第二项为系统周围远距离真空所产生的作用，可忽略；只需保留第一项，这是视界的内禀贡献，当 $h\to0$ 时线性发散. 故有

$$f_1\approx-\frac{7}{2}\frac{\pi^3}{90h}\left(\frac{2M}{\beta}\right)^4.\qquad(5.23.23)$$

进一步可算得内能和熵分别为

$$U_1 = \frac{\partial}{\partial\beta}(\beta f_1) = \frac{7}{8}\frac{2\pi^3}{15h}\left(\frac{2M}{\beta}\right)^4, \tag{5.23.24}$$

$$S_1 = \beta(U_1 - f_1) = \frac{7}{8}\frac{8\pi^3}{45h}2M\left(\frac{2M}{\beta}\right)^3. \tag{5.23.25}$$

同样用砖墙法,可得 F_2 分量满足的径向分量方程

$$\Delta\frac{\mathrm{d}^2R_{+1/2}}{\mathrm{d}r^2} + 3(r-M)\frac{\mathrm{d}R_{+1/2}}{\mathrm{d}r} + \left[\frac{E^2r^4}{\Delta} + 2\mathrm{i}Er - \frac{\mathrm{i}Er^2(r-M)}{\Delta} + 1 - \lambda^2\right]R_{+1/2} = 0. \tag{5.23.26}$$

经过与上面类似的讨论,采用 WKB 近似,得到

$$K_2^2 = \left[\frac{r^4E^2}{r^2-2Mr} - l(l+1) + 1\right]\frac{1}{r(r-2M)}, \tag{5.23.27}$$

$$K_2 = 2_rS_2(r).$$

从而得到 F_2 对应的自由能

$$\begin{aligned} f_2 &= -\int_0^\infty \mathrm{d}E\,\frac{\Gamma(E)}{\mathrm{e}^{\beta E}+1} \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}E\int_{2M+h}^{L}\mathrm{d}r\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\int_l(2l+1)\,\mathrm{d}l \\ &\quad\times(\mathrm{e}^{\beta E}+1)^{-1}\sqrt{E^2-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{[l(l+1)-1]}{r^2}} \\ &\approx -\frac{7}{2}\frac{\pi^3}{90h}\left(\frac{2M}{\beta}\right)^4 - \frac{2}{9\pi}L^3\int_0^\infty \mathrm{d}E\,\frac{E^3}{\mathrm{e}^{\beta E}+1}. \end{aligned} \tag{5.23.28}$$

右端第二项可忽略,得到

$$f_2 = f_1 \approx -\frac{7}{2}\frac{\pi^3}{90h}\left(\frac{2M}{\beta}\right)^4, \tag{5.23.29}$$

$$U_2 = U_1 \approx \frac{7}{8}\frac{2\pi^3}{15h}\left(\frac{2M}{\beta}\right)^4, \tag{5.23.30}$$

$$S_2 = S_1 \approx \frac{7}{8}\frac{8\pi^3}{45h}2M\left(\frac{2M}{\beta}\right)^3. \tag{5.23.31}$$

分量 G_1 和 G_2 对应的熵可同样计算,结果表明,它们对应的自由能和熵与 F_1 的分别相等. 这样,最后得到

$$F = 4f_1 \approx -\frac{7}{2}\frac{2\pi^3}{45h}\left(\frac{2M}{\beta}\right)^4, \tag{5.23.32}$$

$$S = 4S_1 \approx \frac{7}{2}\frac{8\pi^3}{45h}2M\left(\frac{2M}{\beta}\right)^3. \tag{5.23.33}$$

若紫外截断因子与标量场的情况相同,即

$$h = \frac{1}{720\pi M}, \tag{5.23.34}$$

再代入施瓦西黑洞的

$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{2\pi}{K} = 8\pi M, \tag{5.23.35}$$

可把熵写成

$$S = \frac{7}{2}4\pi M^2 = \frac{7}{2}\frac{A_H}{4}. \tag{5.23.36}$$

5.24　共形场论方法

如前所述,黑洞 Bekenstein-Hawking 熵的统计力学起源的研究是人们极为关注的问题.最近,弦理论、量子几何和诱导引力理论在稳态黑洞熵的统计力学起源的研究中取得了一些进展. Brown 和 Henneaux 指出:"AdS_3 的渐近对称群由 Virasoro 代数生成. 因此,在 AdS_3 中的任何引力量子理论都是共形场理论."由此,Strominger 发现,对于视界邻域几何为局部 AdS_3 的黑洞,用共形场的渐近态密度可得到统计力学熵.其结果与黑洞的 Bekenstein-Hawking 熵相同.这表明,通过在 AdS 时空边界上建立起共形场论,我们就可对黑洞熵进行统计力学解释. Strominger 方法有两个明显的局限性.其一,它只适用于(2+1)维 AdS 时空.此时,相关的 Virasoro 代数具有自然的几何意义:它们是三维 AdS 时空中二维边界的对称性.尽管弦理论中有些黑洞的视界几何与(2+1)维AdS 时空类似,但许多其他的黑洞(如 Schwarzschild 黑洞、Kerr 黑洞、Kerr-Newman 黑洞、dilaton 黑洞、Einstein-Maxwell dilaton-axion 黑洞等)没有这种性质.其二,由于 Virasoro 代数建立于空间无限远处,它不能检测时空内部几何.例如,多黑洞解每个视界有自己的熵,但无限远处的渐近代数只能确定该系统的总熵.事实上,无限远处的中心荷不能区别所得的熵是由黑洞或恒星引起的.因此,我们需要找到把 Strominger 方法推广到高维时空及单个黑洞视界面为边界.很自然,人们首先想到的是把 Cardy 公式推广到高维时空.不幸的是,至今仍未得到推广的高维 Cardy 公式.

由 Strominger 讨论中我们知道,在二维共形场理论中,从对称性可以得到态密度.如果我们能找出$(n+1)$维时空$(n>2)$中对黑洞热力学起特殊作用的二维子流形,我们就能得到二维共形场理论与$(n+1)$引力的联系.当用半经典方法研究$(n+1)$维黑洞热力学时,所有有趣的物理现象都发生在"r-t 平面".黑洞熵的半经典计算也仅取决于"r-t 平面"附近的几何.这一现象提示我们,对黑洞熵的统计力学计算有可能的两种方案.一种是在黑洞视界附近把广义相对论的维数降为二维,再由等效二维作用量找出相应的共形场和中心荷.另一种是找出微分同胚生成元的

Poisson 代数,并得到在“r-t 平面”上具有中心荷的子代数. Solodukhin 用第一种方案讨论了球对称黑洞(无物质场),他证明:在球对称黑洞视界附近的维数降低到二维可导致有合适中心荷的 Liouvlle 理论. 从而由对称性可以得到黑洞的 Bekensyein-Hawking 熵. 这一方法有两个缺点:降维过程中有可能导致信息丢失;对于由其他物质场得到的非球对称黑洞,降维过程十分复杂,甚至是不可能的.

对于第二种方案,我们得考虑具有边界的流形,加上一些边界条件使得我们要取的边界就为黑洞视界. 而后研究该流形中微分同胚生成元的 Poisson 代数,特别是在“r-t 平面”中微分同胚子代数. 我们期望该子代数可作经典的中心展开,具有中心荷和 L_0 的本征值 Δ. 再用 Cardy 公式,看中心荷 c 和 Δ 是否能正确地给出态密度的渐近行为. 如果能行,我们就证明了黑洞 Bekenstein-Hawking 熵确实可由对称性决定. 为此,我们得先找出合适的边界条件. 一种可能的方法是观察某坐标系中黑洞视界附近的度规函数形式,并要求在边界附近度规必须趋近这种形式. 实际上这是把 Brown-Henneaux 选取边界条件的方法推广到黑洞视界面及高维时空. 利用这种方法选取边界条件,Carlip 在$(n+1)$维类 Schwarzschild 时空中建立起了 Virasoro 子代数,并由 Cardy 公式得到了与黑洞 Bekenstein-Hawking 熵一致的统计力学熵. Soloviev 和 Das, Ghosh, Mitra 也用此方法对黑弦和黑洞熵进行了研究. 这种边界条件的建立似乎很直接,但是它过分依赖于坐标的选取,而且度规如何趋于边界值的要求也不清楚.

另一种选取边界条件的方法是 Carlip 提出的,就是在(局部)Killing 视界附近选取一组合适的边界条件. Carlip 发现,对于由真空引力场方程得到的高维黑洞,当采用协变相空间技术,由一组自然的边界条件可在视界上建立起具有中心荷的 Virasoro 子代数. 而后,利用共形场理论,Carlip 计算了 Rindler 时空、静态 de Sitter 时空,Taub-NUT 和 Taub-Bolt 时空,以及二维 dilaton 引力的统计力学熵. 由于协变相空间技术要用到 Lagrange 函数,即研究过程与物质场有关,因此,Carlip 的方法能否用于其他黑洞(如由 Einstein-Maxwell 场方程描述的 Kerr-Newman 黑洞、Kerr-Newman-AdS 黑洞、由 dilaton 引力描述的静态和稳态 dilaton 黑洞、Einstein-Maxwell dilaton-axion 黑洞、由弦理论得到的黑洞和黑弦等等)需进一步讨论. 本节对一般稳态轴对称荷电黑洞和静态和稳态 Dilaton 黑洞进行研究.

另一方面, Kaul 和 Majumdar 利用量子几何方法计算了黑洞的 Bekenstein-Hawking 的一级修正. 他们发现主要修正项具有对数形式,此时的熵为

$$S \sim \frac{A_H}{4} - \frac{3}{2}\ln\frac{A_H}{4} + \text{const.} + \cdots \tag{5.24.1}$$

式中 A_H 是黑洞的面积. Carlip 也利用共形场论方法计算了黑洞统计力学熵量子修正,其结果为

$$S \sim S_0 - \frac{3}{2}\ln S_0 + \ln c + \text{const.} + \cdots, \tag{5.24.2}$$

式中 S_0 是标准的 Bekenstein-Hawking 熵,即 $S_0=\frac{A_H}{4}$,c 是 Virasoro 子代数的中心荷. Carlip 认为,如果中心荷是与黑洞面积无关的量(Carlip 认为这可通过调节周期 β 而实现),则对数项的系数 −3/2 可能为一普适因子. 我们也将探讨 −3/2 是否为普适因子这一有趣课题.

下面用协变相空间方法构造一般四维稳态轴对称荷电黑洞和静态、稳态 dilaton 黑洞的约束代数. 在 Carlip 边界条件和稳态条件下,在 Killing 视界面上构造具有中心荷的标准 Virasoro 子代数. 对于 Kerr-Newman 黑洞、Kerr-Newman-AdS 黑洞,静态 Garfinkel-Horowitz- Strominger dilaton 黑洞、Garfinkle-Maeda 黑洞以及稳态 Kaluza-Klein 黑洞,利用由共形场理论得到的态密度研究它们的统计力学熵. 我们还将用共形场论方法考虑统计力学熵的一级修正.

首先,我们列出由协变相空间技术得到的一些有用的结果. 然后,利用协变相空间技术的结果,我们把 Carlip 对真空情况 $L_{a_1a_2\cdots a_n}=\frac{1}{16\pi G}\epsilon_{a_1a_2\cdots a_n}R$ 的研究推广到含宇宙项和电磁场的时空,此时的 Lagrange 函数的 n 形式由 $L_{a_1a_2\cdots a_n}=\frac{1}{16\pi}\epsilon_{a_1a_2\cdots a_n}\left[\frac{1}{G}(R-2\Lambda)+F^{ab}F_{ab}\right]$ 给出. 作为例子,我们采用 Carlip 边界条件研究了稳态荷电的 Kerr-Newman 黑洞和 Kerr-Newman-AdS 黑洞,在其视界邻域中建立具有中心荷的 Virasoro 子代数,并由 Cardy 公式得到了它们的统计力学熵. 接下来,我们研究具有电磁场和 dilaton 场的时空,即 Lagrange 函数的n 形式为 $L_{a_1a_2\cdots a_n}=\epsilon_{a_1a_2\cdots a_n}\left[R-2(\nabla\phi)^2-\mathrm{e}^{-2\alpha\phi}F^2\right]$. 计算了静态 Garfinkle-Horowitz-Stromingerdilaton 黑洞、Gibbons-Maeda dilaton 黑洞和稳态 Kaluza-Klein 黑洞的统计力学熵. 最后我们研究统计力学熵的一级修正.

20 世纪 90 年代初期,Lee,Wald,and Iyer 发现,由 Lagrange 函数的变分,即 $\delta\boldsymbol{L}=\boldsymbol{E}\delta\phi+\mathrm{d}\Theta$,可以定义运动方程的 n 形式 $\boldsymbol{E}$ 和 Symplectic 势$(n-1)$形式 Θ,其中,$\boldsymbol{L}$ 是 n 形式,$\boldsymbol{E}\delta\phi=\boldsymbol{E}_g^{ab}\delta g_{ab}+\boldsymbol{E}_\psi\delta_\psi$,$\phi=(g_{ab},\psi)$ 表示任意的动力学场的集合. 运动场方程为 $\boldsymbol{E}_g^{ab}=0$ 和 $\boldsymbol{E}_\psi=0$. 当取 ξ^a 为时空流形 M 中的任意光滑矢量场,即 ξ^a 是微分同胚的无限小生成元,我们可定义 Noether 流$(n-1)$形式为

$$J[\xi]=\Theta[\phi,\mathcal{L}_\xi\phi]-\xi\cdot L,\tag{5.24.3}$$

这里"·"表示矢量场 ξ^a 与相应的微分形式的第一个指标缩并. 用运动方程可以证明,对于任意的 ξ^a,J 是封闭的,即 $\mathrm{d}J=0$. 于是,我们得到

$$J=\mathrm{d}Q,\tag{5.24.4}$$

式中 Q 是 Noether 荷$(n-2)$形式. 由 Noether 流$(n-1)$形式的变分,我们知道 Symplectic 流$(n-1)$形式

$$\omega[\phi,\delta_1\phi,\delta_2\phi] = \delta_2\Theta[\phi,\delta_1\phi] - \delta_1\Theta[\phi,\delta_2\phi] \tag{5.24.5}$$

可表示为

$$\omega[\phi,\delta\phi,\mathcal{L}_\xi\phi] = \delta J[\xi] - \mathrm{d}(\xi\cdot\ \Theta[\phi,\delta\phi]), \tag{5.24.6}$$

Hamilton 量运动方程为

$$\delta H[\xi] = \int_C \omega[\phi,\delta\phi,\mathcal{L}_\xi\phi] = \int_C [\delta J[\xi] - \mathrm{d}(\xi\cdot\ \Theta[\phi,\delta\phi])]. \tag{5.24.7}$$

利用方程(5.24.4)、Carlip 边界条件以及由(5.24.8)式定义的$(n-1)-B$

$$\delta\int_{\partial C}\xi\cdot\ B[\phi] = \int_{\partial C}\xi\cdot\ \Theta[\phi,\delta\phi], \tag{5.24.8}$$

可把 Hamilton 量写为

$$H[\xi] = \int_{\partial C}(Q[\xi] - \xi\cdot\ B[\phi]). \tag{5.24.9}$$

由 Poisson 括号可得到标准的“表面形变代数”

$$\{H[\xi_1],H[\xi_2]\} = H[\{\xi_1,\xi_2\}] + K[\xi_1,{}_2\xi], \tag{5.24.10}$$

式中 $K[\xi_1,\xi_2]$仅通过边界值与动力学场相联系.

现在,我们利用前面的结果,从含宇宙项和电磁场的 Largrange 函数的 $\hat{n}$ 形式出发,采用 Carlip 边界条件及稳态时空条件,建立一般稳态轴对称荷电黑洞时空中的微分同胚代数. 然后作为例子,在稳态轴对称荷电 Kerr-Newman 黑洞和 Kerr-Newman-AdS 黑洞的视界邻域中建立起具有中心荷的 Virasoro 子代数,并用 Cardy 公式计算它们的统计力学熵.

5.25 稳态轴对称荷电黑洞时空中的微分同胚代数

这里,我们讨论一般稳态轴对称荷电黑洞. 为此,把 Lagrange 函数 n 形式取为

$$L_{a_1a_2\cdots a_n} = \frac{1}{16\pi}\epsilon_{a_1a_2\cdots a_n}\left[\frac{1}{G}(R-2\Lambda) + F^{ab}F_{ab}\right], \tag{5.25.1}$$

式中 $\epsilon_{a_1a_2\cdots a_n}$是体积元(连续非零的 n 形式),Λ 是宇宙常数,F_{ab}是电磁场张量. 利用无限小微分同胚生成元 ξ,可把 Symplectic 势$(n-1)$形式写为

$$\Theta_{a_1a_2a_{n-1}}[g,\mathcal{L}_\xi g] = \frac{1}{4\pi}\epsilon_{ca_1a_2\cdots a_{n-1}}\left\{\frac{1}{2G}(\nabla\ \nabla^{[e}\xi^{c]} + R^c_e\xi^e) + F^{dc}[F_{ed}\xi^e + (\xi^e A_e)_{;d}]\right\}. \tag{5.25.2}$$

由方程(5.24.3)和(5.25.2)得

$$J_{a_1a_2\cdots a_{n-1}} = \frac{1}{8\pi G}\epsilon_{ca_1a_2\cdots a_{n-1}}\left[\nabla\ \nabla^{[e}\xi^{c]} + \left(R^c_e - \frac{1}{2}\delta^c_e R + \delta^c_e\Lambda\right)\xi^e\right]$$

$$-\frac{1}{4\pi}\epsilon_{ca_1a_2\cdots a_{n-1}}\left[\frac{1}{4}F^{bd}F_{bd}\delta^c_e - F^{cd}F_{ed}\right]\xi^e + \frac{1}{4\pi}\epsilon_{ca_1a_2\cdots a_{n-1}}F^{ec}(\xi^d A_d)_{;e}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\epsilon_{ca_1a_2\cdots a_{n-1}}\left[\frac{1}{2G}\nabla_e\nabla^{[e}\xi^{c]} + \nabla_e(\nabla^{[e}A^{c]}A_d\xi^d)\right], \tag{5.25.3}$$

以上计算中，我们用了能动张量为 $\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{4}F^{bc}F_{bc}\delta^d_e - F^{dc}F_{ec}\right]$ 的 Einstein-Maxwell 方程.

比较方程(5.24.4)与(5.25.3)得到

$$Q_{a_1a_2\cdots a_{n-2}} = -\frac{1}{4\pi}\epsilon_{bca_1\cdots a_{n-2}}\left[\frac{1}{4G}\nabla^b\xi^c + (\nabla^b A^c)A_e\xi^e\right]. \tag{5.25.4}$$

对于一般稳态轴对称荷电黑洞（如 Kerr-Newman 黑洞和 Kerr-Newman AdS/dS 黑洞），电磁势 A_a、电磁场张量 F^{03} 及 Killing 矢量分别具有如下形式：

$$A_a = (A_0(r,\theta), A_1(r,\theta), A_2(r,\theta), A_3(r,\theta)),$$

$$F^{03} = -F^{30} = 0, \tag{5.25.5}$$

$$\chi^a_H = \chi_H^{(t)} + \chi_H^{(\varphi)} = (1,0,0,\Omega_H), \tag{5.25.6}$$

式中矢量 $\chi_H^{(t)}$ 对应于时间平移对称，$\chi_H^{(\varphi)}$ 对应于旋转对称，$\Omega_H = -(g_{t\varphi}/g_{\varphi\varphi})_H$ 是黑洞的角速度.

利用方程(5.25.5)，(5.25.6)可证明：

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\partial C}\epsilon_{bca_1\cdots a_{n-2}}(\nabla^b A^c)A_e\xi^e \to 0.\quad \text{在视界上} \tag{5.25.7}$$

于是，由方程(5.25.4)得

$$\int_{\partial C}Q_{a_1a_2\cdots a_{n-2}} = -\frac{1}{16\pi G}\int_{\partial C}\epsilon_{bca_1a_2\cdots a_{n-2}}\nabla^b\xi^c. \tag{5.25.8}$$

用 δ_ξ 表示关于微分同胚生成元 ξ 的变分，对 Noether 流 $J[\xi]$ 的变分可表示为

$$\delta_{\xi_2}J[\xi_1] = \xi_2 \mathrm{d}J[\xi_1] + \mathrm{d}[\xi_2\cdot J[\xi_1]] = \mathrm{d}[\xi_2(\Theta[\phi,\mathcal{L}_{\xi_1}\phi] - \xi_1\cdot L)]. \tag{5.25.9}$$

把方程(5.25.9)代入(5.24.7)式，并利用方程(5.25.2)，我们得到

$$\delta_{\xi_2}H[\xi_1] = \int_C(\delta_{\xi_2}J[\xi_1] - \mathrm{d}(\xi_1\Theta[\phi,\delta_{\xi_2}\phi]))$$

$$= \int_{\partial C}(\xi_2\Theta[\phi,\mathcal{L}_{\xi_1}\phi] - \xi_1\Theta[\phi,\mathcal{L}_{\xi_2}\phi] - \xi_2\xi_1 L)$$

$$= \frac{1}{16\pi G}\int_{\partial C}\epsilon_{bca_1\cdots a_{n-2}}\left[\xi_2^b\nabla_d(\nabla^d\xi_1^c - \nabla^c\xi_1^d) - \xi_1^b\nabla_d(\nabla^d\xi_2^c - \nabla^c\xi_2^d)\right]$$

$$+\frac{1}{8\pi}\int_{\partial C}\epsilon_{bca_1\cdots a_{n-2}}\left\{\xi_2^bF^{dc}\left[F_{ed}\xi_1^2 + (\xi_1^eA_e)_{;d}\right] - \xi_1^bF^{dc}\left[F_{ed}\xi_2^e + (\xi_2^eA_e)_{;d}\right]\right\}$$

$$-\frac{1}{16\pi G}\int_{\partial C}\epsilon_{bca_1\cdots a_{n-2}}\left[2R^c_d(\xi_1^b\xi_2^d-\xi_2^b\xi_1^d)+\xi_2^b\xi_1^c L\right]. \qquad (5.25.10)$$

在视界上,利用方程(5.25.5)和(5.25.6),我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial C}\epsilon_{bca_1\cdots a_{n-2}}\xi_2^b\xi_1^c L\\
&=\int_{\partial C}\hat{\epsilon}_{a_1\cdots a_{n-2}}L\left[\frac{|\chi|}{\rho}\mathscr{T}_2\rho_c+\left(\frac{\rho}{|\chi|}+t\cdot\rho\right)\mathscr{R}_2\chi_c\right](\mathscr{T}_1\chi^c+\mathscr{R}_1\rho^c)\\
&=\int_{\partial C}\hat{\epsilon}_{a_1\cdots a_{n-2}}L\left[\frac{|\chi|}{\rho}\mathscr{T}_2\mathscr{R}_1\rho^2+\left(\frac{\rho}{|\chi|}+t\cdot\rho\right)\mathscr{R}_2\mathscr{T}_1\chi^2\right]\\
&=0,
\end{aligned} \qquad (5.25.11)$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial C}\epsilon_{bca_1\cdots a_{n-2}}2R^c_d(\xi_1^b\xi_2^d-\xi_2^b\xi_1^d)\\
&=\int_{\partial C}\hat{\epsilon}_{a_1\cdots a_{n-2}}R^c_d\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\chi^2}{\rho^2}\right)\left[\frac{|\chi|}{\rho}\rho_c\rho^d-\left(\frac{\rho}{|\chi|}+t\cdot\rho\right)\chi_c\chi^d\right](\mathscr{T}_1 D\mathscr{T}_2-\mathscr{T}_2 D\mathscr{T}_1)\\
&=0,
\end{aligned} \qquad (5.25.12)$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial C}\xi^b\epsilon_{bca_1a_2\cdots a_{n-2}}F^{dc}[F_{ed}\xi^e+(\xi^e A_e)_{;d}]\\
&=\int_{\partial C}\xi^b\epsilon_{bca_1a_2\cdots a_{n-2}}F^{dc}\delta_\xi A_d\\
&=\int_{\partial C}\hat{\epsilon}_{a_1a_2\cdots a_{n-2}}\left[\frac{|\chi|}{\rho}\mathscr{T}\rho_c+\left(\frac{\rho}{|\chi|}+t\cdot\rho\right)\mathscr{R}\chi_c\right]F^{dc}\delta_\xi A_d\\
&=0.
\end{aligned} \qquad (5.25.13)$$

因此,可把(5.25.10)式表示为

$$\begin{aligned}
\delta_{\xi_2}H[\xi_1]=\frac{1}{16\pi G}\int_{\partial C}\epsilon_{bca_1\cdots a_{n-2}}[&\xi_2^b(\nabla^d\xi_1^c-\nabla^c\xi_1^d)\\
&-\xi_1^b(\nabla^d\xi_2^c-\nabla^c\xi_2^d)].
\end{aligned} \qquad (5.25.14)$$

在即壳(on shell)情况下,生成元 $H[\xi_1]$的"bulk"部分为零,因此,我们可以认为方程(5.25.14)的左边就是对表面项 J 的变分,即为 $\delta_{\xi_2}J[\xi_1]$.另一方面,由表面形变生成元 $J[\xi_2]$引起的 $J[\xi_1]$的变化可以精确地用 Dirac 括号$\{J[\xi_1],j[\xi_2]\}^*$表示,即

$$\delta_{\xi_2}J[\xi_1]=\{J[\xi_1],J[\xi_2]\}^*. \qquad (5.25.15)$$

于是得到

$$\begin{aligned}
\{J[\xi_1],J[\xi_2]\}^*=\frac{1}{16\pi G}\int_{\partial C}\epsilon_{bca_1\cdots a_{n-2}}[&\xi_2^b(\nabla^d\xi_1^c\\
&-\nabla^c\xi_1^d)-\xi_1^b(\nabla^d\xi_2^c-\nabla^c\xi_2^d)].
\end{aligned} \qquad (5.25.16)$$

于是,由以上的讨论及(5.24.10)式我们得到如下关系:

$$\{J[\xi_1],J[\xi_2]\}^* = J[\{\xi_1,\xi_2\}] + K[\xi_1,\xi_2], \tag{5.25.17}$$

把附录中的方程(C5),(C6)和(C10)代入到(5.25.16)式,我们发现

$$\{J[\xi_1],J[\xi_2]\}^* = -\frac{1}{16\pi G}\int_{\partial C}\hat{\epsilon}_{a_1\cdots a_{n-2}} \times \left[\frac{1}{\kappa}(\mathscr{T}_1 D^3\mathscr{T}_2 - \mathscr{T}_2 D^3\mathscr{T}_1) - 2\kappa(\mathscr{T}_1 D\mathscr{T}_2 - \mathscr{T}_2 D\mathscr{T}_1)\right]. \tag{5.25.18}$$

容易证明

$$\{\xi_1,\xi_2\}^a = (\mathscr{T}_1 D\mathscr{T}_2 - \mathscr{T}_2 D\mathscr{T}_1)\chi^a + \frac{1}{\kappa}\frac{\chi^2}{\rho^2}D(\mathscr{T}_1 D\mathscr{T}_2 - \mathscr{T}_2 D\mathscr{T}_1)\rho^a. \tag{5.25.19}$$

另一方面,方程(3.8)右边为

$$\int_{\partial C}\xi^b\Theta_{ba_1\cdots a_{n-2}} = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial C}\xi^b\epsilon_{bca_1\cdots a_{n-2}}\left\{\frac{1}{2}(\nabla_e\nabla^{[e}\xi^{c]} + R^c_e\xi^e) + F^{dc}[F_{ed}\xi^e + (\xi^e A_e)_{;d}]\right\}. \tag{5.25.20}$$

式中右边的前两项完全可以用 Carlip 讨论进行处理. 由方程(5.25.13)我们知道(5.25.20)式中的后两项不会对中心项 $K[\xi_1,\xi_2]$ 产生影响. 利用方程(5.24.4)和(5.25.8),并把 J 中的 ξ^a 用 $\{\xi_1,\xi_2\}^a$ 代替,我们得到

$$J[\{\xi_1,\xi_2\}] = \frac{1}{16\pi G}\int_{\partial C}\hat{\epsilon}_{a_1a_2\cdots a_{n-2}}\left[2\kappa(\mathscr{T}_1 D\mathscr{T}_2 - \mathscr{T}_2 D\mathscr{T}_1) - \frac{1}{\kappa}D(\mathscr{T}_1 D^2\mathscr{T}_2 - \mathscr{T}_2 D^2\mathscr{T}_1)\right]. \tag{5.25.21}$$

从方程(5.25.17),(5.25.18)和(5.25.21)得到中心项

$$K[\xi_1,\xi_2] = \frac{1}{16\pi G}\int_{\partial C}\hat{\epsilon}_{a_1a_2\cdots a_{n-2}}\frac{1}{\kappa}(D\mathscr{T}_1 D^2\mathscr{T}_2 - D\mathscr{T}_2 D^2\mathscr{T}_1). \tag{5.25.22}$$

以上所得的约束代数对一般稳态轴对称黑洞都成立. 下面,我们用所得到的约束代数以及共形场理论研究一些稳态轴对称黑洞的统计力学熵.

5.26 Kerr-Newman 黑洞的统计力学熵

在 Boyer-Lindquist 坐标中,稳态轴对称荷电 Kerr-Newman 黑洞时空的度规为

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}[dt - a\sin^2\theta d\phi]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}[a dt - (r^2 + a^2)d\varphi]^2, \tag{5.26.1}$$

其中,

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta,$$

$$\Delta = (r - r_+)(r - r_-), \tag{5.26.2}$$

$r_+ = r_H = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}$, $r_- = M - \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}$,参数 a 是比角动量,M 和 Q 分别表示黑洞的质量和电荷. 度规(3.33)是电磁矢势为

$$A = -\frac{Qr}{\rho^2}(\mathrm{d}t - a\sin^2\theta \mathrm{d}\phi), \tag{5.26.3}$$

电磁场张量为

$$F = -\frac{Q}{\rho^4}(r^2 - a^2\cos^2\theta)e^0 \wedge e^1 + \frac{Q}{\rho^4}(r^2 - a^2\cos^2\theta)e^2 \wedge e^3 \tag{5.26.4}$$

的 Einstein-Maxwell 方程的解. Kerr-Newman 黑洞具有 Killing 矢量

$$\chi_H^a = (1, 0, 0, \Omega_H), \tag{5.26.5}$$

式中 $\Omega_H = -\left(\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}}\right)_H = \frac{a}{r^2 + a^2}$是黑洞的角速度. 当引入周期为 $T = \frac{2\pi}{\kappa}$的函数 u 的积分,我们发现,满足方程($C8$)和(5.25.19)的单参数微分同胚群可取为

$$T_n = \frac{1}{\kappa}\exp\{\mathrm{in}[\kappa u + C\alpha(\varphi - \Omega_H u)]\}, \tag{5.26.6}$$

式中 C_α 为任意常数. 把方程(5.26.6)代入中心项(5.26.22)式,再利用条件(C8),我们得到

$$K[\mathscr{T}_m, \mathscr{T}_n] = -\frac{\mathrm{i}A_H}{8\pi G}m^3\delta_{m+n,0}, \tag{5.26.7}$$

式中 $A_H = \int_{\partial C}\hat{\epsilon}_{a_1 a_2 \cdots a_{n-2}} = 4\pi(r_+^2 + a^2)$是黑洞视界面积. 以上的讨论表明,方程(5.25.17)变成标准的 Virasoro 代数

$$\mathrm{i}\{J[\mathscr{T}_m], J[\mathscr{T}_n]\} = (m - n)J[\mathscr{T}_{m+n}] + \frac{c}{12}m^3\delta_{m+n,0}, \tag{5.26.8}$$

其中心荷为

$$\frac{c}{12} = \frac{A_H}{8\pi G}. \tag{5.26.9}$$

用方程(5.24.4),(5.25.4)和(5.26.6)可容易得到边界项 $J[\mathscr{T}_0] = \frac{A_H}{8\pi G}$. 当给定了 $J[\mathscr{T}_0]$的本征值 Δ,对于很大的 Δ,由 Cardy 公式知,态密度可渐近地由下式给出

$$\rho(\Delta) \sim \exp\left\{2\pi\sqrt{\frac{c}{6}\left(\Delta - \frac{c}{24}\right)}\right\} = \exp\left[\frac{A_H}{4G}\right]. \tag{5.26.10}$$

于是,我们得到 Kerr-Newman 黑洞的统计力学熵

$$\log\rho(\Delta) \sim \frac{A_H}{4G}. \tag{5.26.11}$$

该结果与 Kerr-Newman 黑洞的 Bekenstein-Hawking 熵相等.

5.27　Kerr-Newman-AdS 黑洞的统计力学熵

早在1968年,Carter就得到了四维时空中的Kerr-Newman-AdS黑洞度规

$$ds^2 = -\frac{\Delta_r}{\rho^2}\left[dt - \frac{a}{\Xi}\sin^2\theta d\varphi\right]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_r}dr^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_\theta}d\theta^2 + \frac{\sin^2\theta\Delta_\theta}{\rho^2}\left[adt - \frac{(r^2+a^2)}{\Xi}d\varphi\right]^2, \tag{5.27.1}$$

其中,

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta,$$
$$\Delta_r = (r^2+a^2)(1+l^2r^2) - 2Mr + q^2 + p^2,$$
$$\Delta_\theta = 1 - l^2a^2\cos^2\theta,$$
$$\Xi = 1 - l^2a^2,$$

参数M是黑洞质量,a是比角动量,q为电荷,p为磁荷,$l^2 = -\Lambda/3$(Λ是引力常数).黑洞的事件视界位于$r = r_+$,即为Δ_r的最大的根.度规(5.27.1)是Einstein-Maxwell方程的解,其相应的电磁矢势是

$$A = -\frac{qr}{\rho^2\Xi}(dt - a\sin^2\theta d\varphi) - \frac{p\cos\theta}{\rho^2\Xi}[adt - (r^2+a^2)d\varphi], \tag{5.27.2}$$

相应的电磁张量为

$$F = -\frac{1}{\rho^4}[q(r^2 - a^2\cos^2\theta) + 2pra\cos\theta]e^0\wedge e^1 + \frac{1}{\rho^4}[q(r^2 - a^2\cos^2\theta) - 2pra\cos\theta]e^2\wedge e^3. \tag{5.27.3}$$

Kerr-Newman-AdS黑洞的Killing矢量可表示为

$$\chi_H^a = \partial_t + \Omega_H\partial_\varphi, \tag{5.27.4}$$

式中$\Omega_H = -\left(\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}}\right)_H = \frac{\Xi a}{r_+^2 + a^2}$是黑洞的角动量.类似前一节的讨论,我们得到统计力学熵

$$S = \frac{A_H}{4G} = \frac{\pi}{G}\frac{r_+^2 + a^2}{\Xi}, \tag{5.27.5}$$

该结果也与Kerr-Newman-AdS黑洞的Bekenstein-Hawking熵一致.

下面,我们由弦理论得到的四维低能有效理论的含有dilaton标量场和电磁场的Lagrange函数出发,构造一般静态及稳态dilaton黑洞时空中的微分同胚代数和具有中心荷的Virasoro子代数.作为例子,再用共形场方法计算静态Garfinkle-Horowitz-Strominger dilaton黑洞、Garfinkle-Maeda黑洞以及稳态Kaluza-Klein黑洞

的统计力学熵.

5.28　静态和稳态 dilaton 黑洞时空中的微分同胚代数

由弦理论得到的四维低能等效理论的 Lagrange 函数为

$$L_{abcd}=\frac{1}{16\pi}\epsilon_{abcd}\left[\frac{1}{G}R-2(\nabla\phi)^2-\mathrm{e}^{-2\alpha\phi}F^2\right],\tag{5.28.1}$$

式中 ϕ 是 dilaton 标量场, F_{ab} 是与 $E_8\times E_8$ 或 Spin(32)/Z_2 的子群 $U(1)$ 相关的 Maxwell 场, α 是反映 dilaton 场与 Maxwell 场耦合强度的参数. 我们取其他的规范场和反对称张量场 $H_{\mu\nu\rho}$ 为零, 这是因为我们将要研究的静态和稳态 dilaton 黑洞都是由 Lagrange 函数(5.28.1)得到的. 从 Lagrange 函数(5.28.1)可导出关于动力学场 A_μ, ϕ 和 $g_{\mu\nu}$ 的运动方程:

$$\nabla_\mu(\mathrm{e}^{-2\alpha\phi}F^{\mu\nu})=0,\tag{5.28.2}$$

$$\nabla^2\phi+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\alpha\phi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=0,\tag{5.28.3}$$

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=2\nabla_\mu\phi\nabla_\mu\phi-g_{\mu\nu}(\nabla\phi)^2+2\mathrm{e}^{-2\alpha\phi}F_{\beta\nu}F^{\beta}_{\mu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathrm{e}^{-2\alpha\phi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.\tag{5.28.4}$$

以及 Symplectic 势$(n-1)$形式:

$$\Theta_{bcd}[g,\mathcal{L}_\xi g]=\frac{\epsilon_{abcd}}{4\pi}\left\{\frac{1}{2G}(\nabla_e\nabla^{[e}\xi^{\alpha]}+R^a_e\xi^e)-\xi^e\nabla_e\phi\nabla^a\phi-\mathrm{e}^{-2\alpha\phi}F^{af}[F_{ef}\xi^e+(\xi^eA_e)_{;f}]\right\}.\tag{5.28.5}$$

由方程(5.28.3)和(5.28.5)可得

$$\begin{aligned}J_{bcd}&=\frac{1}{8\pi G}\epsilon_{abcd}\left\{\nabla_e\nabla^{[e}\xi^{a]}-2G\mathrm{e}^{2\alpha\phi}F^{af}(\xi^eA_e)_{;f}+\left[R^a_e-\frac{1}{2}\delta^a_eR\right.\right.\\&\quad\left.\left.-2G\nabla_e\phi\nabla^a\phi+G\delta^a_e(\nabla\phi)^2-2G\mathrm{e}^{-2\alpha\phi}F^{af}F_{ef}+\frac{G}{2}\delta^a_e\mathrm{e}^{-2\alpha\phi}F^2\right]\xi^2\right\}\\&=\frac{1}{8\pi}\epsilon_{abcd}\left[\frac{1}{G}\nabla_e\nabla^{[e}\xi^{a]}-2\mathrm{e}^{-2\alpha\phi}F^{af}(\xi^eA_e)_{;f}\right]\\&=\frac{1}{8\pi}\epsilon_{abcd}\left[\frac{1}{G}\nabla_e\nabla^{[e}\xi^{a]}+4\nabla_f(\mathrm{e}^{-2\alpha\phi}\nabla^{[f}A^{a]}A_e\xi^e)\right],\end{aligned}\tag{5.28.6}$$

在上式第二和第三行推导中, 我们用到了运动方程(5.28.4)和(5.28.2), (5.24.4)和(5.28.6)式表明

$$Q_{cd}=-\frac{1}{16\pi}\epsilon_{abcd}\left[\frac{1}{G}\nabla^{a}\xi^{b}+4\mathrm{e}^{-2\alpha\phi}A_{e}\xi^{e}\nabla^{a}A^{b}\right].\tag{5.28.7}$$

对于一般静态和稳态的 dilaton 黑洞,其 dilaton 标量场、电磁势 A_a 以及 Killing 矢量可写成如下的一般形式:

$$\phi=\phi(r,\theta),\tag{5.28.8}$$

$$A_{a}=(A_{0}(r,\theta),A_{1}(r,\theta),A_{2}(r,\theta),A_{3}(r,\theta)),\tag{5.28.9}$$

$$\chi_{H}^{a}=(1,0,0,\Omega_{H}).\tag{5.28.10}$$

方程(5.24.8)右边为

$$\int_{\partial C}\xi^{b}\Theta_{bcd}=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial C}\epsilon_{abcd}\xi^{a}\left\{\frac{1}{2G}(\nabla_{e}\nabla^{[e}\xi^{b]}+R_{e}^{b}\xi^{e})\right.$$
$$\left.-\xi^{e}\nabla_{e}\phi\nabla^{b}\phi-\mathrm{e}^{-2\alpha\phi}F^{fb}[F_{ef}\xi^{e}+(\xi^{e}A_{e})_{;f}]\right\},\tag{5.28.11}$$

前两项可用 Carlip 的处理结果. 在视界上,利用方程(5.28.8),(5.28.9)和(5.28.10),我们得到

$$\int_{\partial C}\epsilon_{abcd}\xi_{2}^{a}\xi_{1}^{e}\nabla^{b}\phi\nabla_{e}\phi=0,\tag{5.28.12}$$

$$\int_{\partial C}\epsilon_{abcd}\mathrm{e}^{-2\alpha\phi}\xi^{a}F^{bf}[F_{ef}\xi^{e}+(\xi^{e}A_{e})_{;f}]$$
$$=\int_{\partial C}\epsilon_{abcd}\mathrm{e}^{-2\alpha\phi}\xi^{a}F^{bf}\delta_{\xi}A_{f}$$
$$=\int_{\partial C}\hat{\epsilon}_{cd}\mathrm{e}^{-2\alpha\phi}\left[\frac{|\chi|}{\rho}\mathscr{T}_{\rho b}+\left(\frac{\rho}{|\chi|}+t\cdot\rho\right)\mathscr{R}_{\chi_{b}}\right]F^{bf}\delta_{\xi}A_{f}$$
$$=0,\tag{5.28.13}$$

因此(5.28.11)式的后三项对 $K[\xi_1,\xi_2]$没有贡献.

利用方程(5.28.9)和(5.28.10),我们可以证明,在视界上

$$\int_{\partial C}\epsilon_{abcd}\mathrm{e}^{-2\alpha\phi}A_{e}\xi^{e}\nabla^{a}A^{b}\rightarrow 0.\tag{5.28.14}$$

于是,(5.28.7)式变成

$$\int_{\partial C}Q_{cd}=-\frac{1}{16\pi G}\int_{\partial C}\epsilon_{abcd}\nabla^{a}\xi^{b}.\tag{5.28.15}$$

对 Noether 流变分得 $\delta_{\xi_2}J[\xi_1]=\mathrm{d}[\xi_2(\Theta[\phi,\mathcal{L}_{\xi_1}\phi]-\xi_1\cdot L)]$. 我们从方程(5.24.7)和(5.28.5)知

$$\delta_{\xi_2}H[\xi_1]=\int_{\partial C}(\xi_2\Theta[\phi,\mathcal{L}_{\xi_1}\phi]-\xi_1\Theta[\phi,\mathcal{L}_{\xi_2}\phi]-\xi_2\xi_1L)$$
$$=\frac{1}{16\pi G}\int_{\partial C}\epsilon_{abcd}[\xi_2^{a}\nabla_{e}(\nabla^{e}\xi_1^{b}-\nabla^{b}\xi_1^{e})-\xi_1^{a}\nabla_{e}(\nabla^{e}\xi_2^{b}-\nabla^{b}\xi_2^{e})]$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int_{\partial C}\epsilon_{abcd}\mathrm{e}^{-2\alpha\phi}\left\{\xi_2^{a}F^{fb}[F_{ef}\xi_1^{e}+(\xi_1^{e}A_{e})_{;f}]\right.$$

$$- \xi_1^a F^{fb}[F_{ef}\xi_2^e + (\xi_2^e A_e)_{;f}]\Big\}$$
$$- \frac{1}{16\pi G}\int_{\partial C}\epsilon_{abcd}[4R_e^b(\xi_1^a\xi_2^e - \xi_2^a\xi_1^e) + \xi_2^a\xi_1^b L]$$
$$- \frac{1}{4\pi}\int_{\partial C}\epsilon_{abcd}(\xi_2^a\xi_1^e - \xi_1^a\xi_2^e)\nabla^b\phi\nabla_e\phi. \quad (5.28.16)$$

利用方程(5.28.8)~(5.28.10),我们发现在视界上有如下关系式

$$\int_{\partial C}\epsilon_{abcd}(\xi_2^a\xi_1^e - \xi_1^a\xi_2^e)\nabla^b\phi\nabla_e\phi = \int_{\partial C}\hat{\epsilon}_{cd}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\chi^2}{\rho^2}\right)\left[\frac{|\chi|}{\rho}\rho b\rho^e - \left(\frac{\rho}{|\chi|} + t\cdot\rho\right)\chi b\chi^e\right](\mathscr{T}_2 D\mathscr{T}_1 - \mathscr{T}_1 D\mathscr{T}_2)\nabla^b\phi\nabla_e\phi$$
$$= 0, \quad (5.28.17)$$

把方程(5.28.13),(5.28.17),(5.25.11)和(5.25.12)代入(5.28.16)式,得到

$$\delta_{\xi_2}H[\xi_1] = \frac{1}{16\pi G}\int_{\partial C}\epsilon_{abcd}[\xi_2^a\nabla_e(\nabla^e\xi_1^b - \nabla^b\xi_1^e) - \xi_1^a\nabla_e(\nabla^e\xi_2^b - \nabla^b\xi_2^e)]. \quad (5.28.18)$$

对于即壳情况,我们知 $\delta_{\xi_2}H[\xi_1] = \delta_{\xi_2}J[\xi_1] = \{J[\xi_1], j[\xi_2]\}^*$. 于是

$$\{J[\xi_1], J[\xi_2]\}^* = \frac{1}{16\pi G}\int_{\partial C}\epsilon_{abcd}[\xi_2^a\nabla_e(\nabla^e\xi_1^b - \nabla^b\xi_1^e) - \xi_1^a\nabla_e(\nabla^e\xi_2^b - \nabla^b\xi_2^e)], \quad (5.28.19)$$

$$\{J[\xi_1], J[\xi_2]\}^* = -\frac{1}{16\pi G}\int_{\partial C}\hat{\epsilon}_{cd}\left[\frac{1}{\kappa}(\mathscr{T}_1 D^3\mathscr{T}_2 - \mathscr{T}_2 D^3\mathscr{T}_1) - 2\kappa(\mathscr{T}_1 D\mathscr{T}_2 - \mathscr{T}_2 D\mathscr{T}_1)\right]. \quad (5.28.20)$$

对于满足条件(C5)和(C6)的单参数微分同胚群,容易证明

$$\{\xi_1, \xi_2\}^a = (\mathscr{T}_1 D\mathscr{T}_2 - \mathscr{T}_2 D\mathscr{T}_1)\chi^a + \frac{1}{\kappa}\frac{\chi^2}{\rho^2}D(\mathscr{T}_1 D\mathscr{T}_2 - \mathscr{T}_2 D\mathscr{T}_1)\rho^a. \quad (5.28.21)$$

Hamilton 量(5.24.9)式由两项组成,但是由方程(5.28.12)和(5.28.13),以及关于 $\xi\cdot\Theta$ 的讨论,我们得到

$$J[\{\xi_1, \xi_2\}] = \frac{1}{16\pi G}\int_{\partial C}\hat{\epsilon}_{cd}\left[2\kappa(\mathscr{T}_1 D\mathscr{T}_2 - \mathscr{T}_2 D\mathscr{T}_1) - \frac{1}{\kappa}D(\mathscr{T}_1 D^2\mathscr{T}_2 - \mathscr{T}_2 D^2\mathscr{T}_1)\right]. \quad (5.28.22)$$

对于即壳情况,(5.24.10)式可写为

$$\{J[\xi_1], J[\xi_2]\}^* = J[\{\xi_1, \xi_2\}] + K[\xi_1, \xi_2]. \quad (5.28.23)$$

其中心项为

$$K[\xi_1, \xi_2] = \frac{1}{16\pi G}\int_{\partial C}\hat{\epsilon}_{cd}\frac{1}{\kappa}(D\mathscr{T}_1 D^2\mathscr{T}_2 - D\mathscr{T}_2 D^2\mathscr{T}_1). \quad (5.28.24)$$

有趣的是,代数(5.28.23)式以及有关方程(5.28.20),(5.28.22)和(5.28.24)适用于一般稳态轴对称黑洞,它与前一节相应的结果具有相同的形式.我们将用这些结果计算一些静态和稳态 dilaton 黑洞的统计力学熵.

5.29　Garfinkle-Horowitz-Strominger dilatonic 黑洞的统计力学熵

Garfinkle-Horowitz-Strominger(GHS) dilatonic 黑洞由方程(5.28.2),(5.28.3)和(5.28.4)的解描述,其具体形式如下

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r(r-a)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{5.29.1}$$

其中,

$$e^{-2\phi} = e^{-2\phi_0} - \frac{Q^2}{Mr}, \quad F = Q\sin\theta d\theta \wedge d\varphi, \quad a = \frac{Q^2}{2M}e^{2\phi_0} \tag{5.29.2}$$

Q 是磁荷.考虑以 T 为周期的函数 u,则满足条件(C8)和(5.28.21)式的单参数微分同胚群为

$$\mathscr{T}_n = \frac{T}{2\pi}\exp\left[\frac{2\pi n i}{T}u\right]. \tag{5.29.3}$$

从方程(5.29.3)和(5.28.24)得到中心项

$$K[\mathscr{T}_m, \mathscr{T}_n] = \frac{iA_H}{8\pi G}\frac{2\pi}{\kappa T}m^3\delta_{m+n,0}, \tag{5.29.4}$$

式中 $A_H = \int_{\partial C}\hat{\epsilon}_{cd} = 4\pi r_+(r_+ - a)$ 黑洞视界面积.于是,方程(5.28.23)变成

$$i\{J[\mathscr{T}_m], J[\mathscr{T}_n]\} = (m-n)J[\mathscr{T}_{m+n}] + \frac{c}{12}m^3\delta_{m+n,0}, \tag{5.29.5}$$

相应的中心荷是

$$\frac{c}{12} = \frac{A_H}{8\pi G}\frac{2\pi}{\kappa T}. \tag{5.29.6}$$

用方程(5.24.4),(5.28.7)和(5.29.3)可得到 $J[\mathscr{T}_0]$

$$J[\mathscr{T}_0] = \Delta = \frac{A_H}{8\pi G}\frac{\kappa T}{2\pi}. \tag{5.29.7}$$

因此,由标准的 Cardy 公式得态密度

$$\rho(\Delta) \sim \exp\left[\frac{A_H}{4G}\sqrt{2 - \left(\frac{2\pi}{\kappa T}\right)^2}\right]. \tag{5.29.8}$$

当且仅当把 T 取为 Euclidean 黑洞的周期时,即

$$T = \frac{2\pi}{\kappa}, \tag{5.29.9}$$

所得的黑洞的统计力学熵

$$S_0 \sim \ln\rho(\Delta) = \frac{A_H}{4G} = \frac{\pi}{G} r_+ (r_+ - a), \tag{5.29.10}$$

与其 Bekenstein-Hawking 熵一致.

5.30 Garfinkle-Maeda dilaton 黑洞的统计力学熵

从弦理论的低能有效 Lagrangian(5.28.1)式得到的 Garfinkle-Maeda(GM) dilaton 黑洞为

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{r_+}{r}\right)\left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}} \mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-1}\left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\frac{\alpha^2-1}{1+\alpha^2}} \mathrm{d}r^2$$
$$+ r^2\left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2}} (\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2), \tag{5.30.1}$$

相应的 dilaton 标量场为

$$\mathrm{e}^{2\Phi} = \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}} \mathrm{e}^{-2\Phi_0}, \tag{5.30.2}$$

Maxwell 场是

$$F = \frac{Q}{r^2} \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}r, \tag{5.30.3}$$

式中 $r = r_+$ 是黑洞的事件视界. 当 $\alpha = 0$, $r = r_-$ 内部 Cauchy 视界;然而,当 $\alpha > 0$ 时, $r = r_-$ 是奇点. 黑洞的质量 M 和电荷 Q 与参数 r_+ 和 r_- 的关系为 $2M = r_+ + \left(\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\right) r_-$ 和 $Q^2 = \frac{r_+ r_-}{1+\alpha^2} \mathrm{e}^{2\alpha\Phi_0}$.

该黑洞的 Killing 矢量是 $\chi^a \frac{\partial}{\partial x^a} = \partial_t$. 单参数微分同胚群为

$$\mathscr{T}_n = \frac{T}{2\pi} \exp\left[\frac{2\pi n \mathrm{i}}{T} u\right]. \tag{5.30.4}$$

利用标准的 Cardy 公式,与前节类似的分析得到统计力学熵

$$S_0 = \frac{A_H}{4G} = \frac{\pi r_+^2}{G}\left(1 - \frac{r_-}{r_+}\right)^{2\alpha^2/(1+\alpha^2)}. \tag{5.30.5}$$

它完全与其 Bekenstein-Hawking 熵一致.

5.31　稳态 Kaluza-Klein 黑洞的统计力学熵

当取运动方程(5.28.2),(5.28.3)和(5.28.4)中的 $\alpha = \sqrt{3}$时,所得解就是 Kaluza-Klein 黑洞度规:

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{1-Z}{B}\mathrm{d}t^2 - \frac{2aZ\sin^2\theta}{B\sqrt{1-v^2}}\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi + \left[B(r^2+a^2) + a^2\sin^2\theta\frac{Z}{B}\right]\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2$$
$$+\frac{B\Sigma}{\Delta_r}\mathrm{d}r^2 + B\Sigma\mathrm{d}\theta^2, \tag{5.31.1}$$

式中,

$$Z = \frac{2mr}{\Sigma},\quad B = \left[1+\frac{v^2Z}{1-v^2}\right]^{1/2},$$
$$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta, \Delta_r = r^2 + a^2 - 2mr, \tag{5.31.2}$$

a 和 v 分别为旋转参数和速度. 黑洞的质量 M、电荷 Q 以及角动量 J_m 由下列关系给出:$M = m\left[1+\frac{v^2}{2(1-v^2)}\right]$, $Q = \frac{mv}{1-v^2}$, $J_m = \frac{ma}{\sqrt{1-v^2}}$. dilaton 标量场、矢量势和 Killing 矢量分别为

$$\phi = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ln B,$$
$$A_t = \frac{v}{2(1-v^2)}\frac{Z}{B^2},\quad A_r = A_\theta = 0,\quad A_\varphi = -\frac{av\sin^2\theta}{2\sqrt{1-v^2}}\frac{Z}{B^2},$$
$$\chi_H^a = (1,0,0,\Omega_H). \tag{5.31.3}$$

因此知单参数微分同胚群可取为

$$\mathscr{T}_n = \frac{T}{2\pi}\exp\left[\mathrm{i}n\left(\frac{2\pi}{T}u + l_a(\varphi - \Omega_H u)\right)\right], \tag{5.31.4}$$

式中 l_a 是任意常数. 由方程(5.31.4)得到中心荷:

$$\frac{c}{12} = \frac{A_H}{8\pi G}\frac{2\pi}{\kappa T}, \tag{5.31.5}$$

式中 $A_H = \int_{\partial C}\hat{\epsilon}_{cd} = 8\pi\left[\frac{m^2}{\sqrt{1-v^2}} + \sqrt{\frac{m^4}{1-v^2} - J_m^2}\right]$,即黑洞的面积. 边界项 $J[\mathscr{T}_0]$ 可容易从(5.24.4),(5.28.7)和(5.31.4)式求得

$$J[\mathscr{T}_0] = \Delta = \frac{A_H}{8\pi G}\frac{\kappa T}{2\pi}. \tag{5.31.6}$$

用标准的 Cardy 公式得态密度

$$\rho(\Delta) \approx \exp\left\{2\pi\sqrt{\frac{c}{6}\left(\Delta-\frac{c}{24}\right)}\right\} = \exp\left[\frac{A_H}{4G}\sqrt{2-\left(\frac{2\pi}{\kappa T}\right)^2}\right]. \qquad (5.31.7)$$

当我们取 $T=\dfrac{2\pi}{\kappa}$时，得到与 Bekenstein-Hawking 熵相等的统计力学熵

$$S_0 \sim \ln\rho(\Delta) = \frac{A_H}{4G} = \frac{2\pi}{G}\left[\frac{m^2}{\sqrt{1-v^2}}+\sqrt{\frac{m^4}{1-v^2}-J_m^2}\right]. \qquad (5.31.8)$$

5.32 黑洞统计力学熵的对数修正及新熵界

Carlip 证明态密度为

$$\rho(\Delta) = \int \mathrm{d}\mathscr{T}\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\Delta\mathscr{T}}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\Delta_0\frac{1}{\mathscr{T}}}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}c}{24}\frac{1}{\mathscr{T}}}\tilde{Z}(-1/\mathscr{T}). \qquad (5.32.1)$$

对于很大的 $\mathscr{T}$, $\tilde{Z}(-1/\mathscr{T})$趋于常数 $\rho(\Delta_0)$. 因此，只要 $\mathscr{T}$的虚部在鞍点足够大，(5.32.1)式的积分可用最陡下降法计算.

以上积分具有如下形式：

$$I[a,b] = \int \mathrm{d}\mathscr{T}\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}a\mathscr{T}+\frac{2\pi\mathrm{i}b}{\mathscr{T}}}f(\mathscr{T}). \qquad (5.32.2)$$

其指数存在极值点 $\mathscr{T}_0=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$. 在 $\mathscr{T}_0$ 附近作函数展开，得到

$$I[a,b] \approx \int d\mathscr{T}\,\mathrm{e}^{4\pi\mathrm{i}\sqrt{ab}+\frac{2\pi\mathrm{i}b}{\mathscr{T}_0^3}(\mathscr{T}-\mathscr{T}_0)^2}f(\mathscr{T}_0) = \left(-\frac{b}{4a^3}\right)^{1/4}\mathrm{e}^{4\pi\mathrm{i}\sqrt{ab}}f(\mathscr{T}_0). \qquad (5.32.3)$$

把方程(5.32.1)与(5.32.2)比较，我们得到

$$a = \frac{c}{24}-\Delta, \quad b = \frac{c}{24}-\Delta_0. \qquad (5.32.4)$$

因此，如果令 $c_{\mathrm{eff}}=c-24\Delta_0$，则含修正项的 Cardy 公式为

$$\rho_{cq}(\Delta) \approx \left[\frac{c_{\mathrm{eff}}}{96\left(\Delta-\frac{c}{24}\right)^3}\right]^{1/4}\exp\left\{2\pi\sqrt{\frac{c_{\mathrm{eff}}}{6}\left(\Delta-\frac{c}{24}\right)}\right\}\rho(\Delta_0). \qquad (5.32.5)$$

当我们考虑统计力学熵的一级量子修正时，应采用新的 Cardy 公式(5.32.5). 根据前面的讨论得知，为了使不含修正的统计力学熵与黑洞 Bekenstein-Hawking 熵一致，我们必须把 T 取为 Euclidean 黑洞的周期 $T=\dfrac{2\pi}{\kappa}$. 因此，对于各种黑洞都有

$$\frac{c}{12} = \frac{A_H}{8\pi C}, \qquad (5.32.6)$$

$$\Delta = \frac{A_H}{8\pi G}. \qquad (5.32.7)$$

把该结果代入公式(5.32.5),我们得到含修正的黑洞统计力学熵

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{A_H}{4} - \frac{3}{2}\ln\frac{A_H}{4} + \ln c + \text{const.} \\
&= \frac{A_H}{4} - \frac{1}{2}\ln\frac{A_H}{4} + \text{const.}.
\end{aligned}
\tag{5.32.8}
$$

式中的第一行中的第二、第三项具有对数形式且与 Carlip 结果(5.24.2)式一致.然而,以上推导表明:为了得到与黑洞 Bekenstein-Hawking 熵一致的结果,我们必须把 T 取为 Euclidean 黑洞的周期,即 $T = \frac{2\pi}{\kappa}$,因此我们不能像 Carlip 所预期的那样通过调节周期使中心荷变成与黑洞面积无关的量.注意到这一点,我们发现对数项的系数是 $-\frac{1}{2}$.由此我们得到新的熵界表达式

$$
S_{\max} = \ln\left[\frac{\exp(S_{BH})}{S_{BH}^{1/2}}\right].
\tag{5.32.9}
$$

式中 $S_{BH} = \frac{A_H}{4}$.这是比 Bekenstein 熵界更严的新熵界.应该注意的是,我们得到的对数项系数与 Kaul-Majumdar 从量子几何方法得到的结果 $-\frac{3}{2}$ 不同.这两种结果为什么出现差异值得进一步探究.

5.33　熵,哈密顿和 Noether 荷

为了阐明 Noether 荷 Q 的含义,我们考虑一个静态背景下,具有作用量

$$
I[\phi, g] = -\frac{1}{2}\int(\phi^{,\mu}\phi_{,\mu} + m^2\phi^2 + \xi R\phi^2)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x
\tag{5.33.1}
$$

的实标量场 ϕ.这个场在3维区域 B 中的能量 E 由能动张量确定:

$$
E = \int_B T_{\mu\nu}\xi^\mu \mathrm{d}\sigma^\nu,
\tag{5.33.2}
$$

其中 $\mathrm{d}\sigma^\nu$ 是体元 B 上的未来方向矢量,ξ^μ 是类时 Killing 矢量.能动张量由(5.33.1)经变分得

$$
T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta I[g]}{\delta g^{\mu\nu}},
\tag{5.33.3}
$$

在静态时空中,能量 E 关于场 ϕ 的运动方程是守恒的.除了能动张量(5.33.3)以外,我们还可以定义一个正则能动张量

$$
(T^C)_{\mu\nu} = \phi_{,\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^{,\nu}} - g_{\mu\nu}\mathscr{L},
\tag{5.33.4}
$$

式中 $\mathscr{L}$ 是该理论关于作用量 $I=\int\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x\mathscr{L}$ 的拉格朗日.

对于静态时空,$(T^C)_{\mu\nu}$给出另一个守恒量,即系统的哈密顿

$$H=\int_B T^C_{\mu\nu}\xi^\mu\sigma^\nu. \tag{5.33.5}$$

在正则形式中,H 起着系统沿 Killing 时间演化的生成元的作用. 一般地,张量 $T_{\mu\nu}$和$(T^C)_{\mu\nu}$是不相同的,它们的差给出 Noether 流

$$J_\mu=\frac{2\pi}{\kappa}((T^C)_{\mu\nu}-T_{\mu\nu})\xi^\nu, \tag{5.33.6}$$

式中 κ 是表面引力. 根据 Noether 定理,这个流关于运动方程是守恒的($\nabla^\mu J_\mu=0$). 和由(5.33.2),(5.33.5)式得到的过程一样,能量 E 和哈密顿 H 之差即为与流 J_μ 对应的 Noether 荷.

$T_{\mu\nu}$和$(T^C)_{\mu\nu}$不相同的最简单的例子是 $\xi\neq0$ 的标量场. 在这种情况下有

$$J_\mu=-\xi\frac{2\pi}{\kappa}(R_{\mu\nu}\phi^2+g_{\mu\nu}(\phi^2)^{;\rho}_{;\rho}-(\phi^2)_{;\mu\nu})\xi^\nu, \tag{5.33.7}$$

$$H-E=\xi\int_{\partial B}\mathrm{d}s^\kappa\,|g00|^{1/2}[(\phi^2)_{,\kappa}-\phi^2\omega\kappa]. \tag{5.33.8}$$

式中 $\mathrm{d}S^\kappa$ 是 B 中的 3 维矢量,沿边界 ∂B 的外法线. 这样,两个能量的差便可以超曲面 B 的边界面 ∂B 上给出. 显然,当我们考虑一个复柯西面的时候,(5.33.8)式中的边界项只含有空间无限远或者外部空间边界的贡献. 对于一个场,在无限远处减小,或者在边界面上满足适当的条件,可使 $E=H$. 尽管这是定性的,但如果 E 中的积分区域被 Killing 视界的分叉面 Σ 所限定,则此处场 ϕ 可以取任意的有限值. 如果空间无限远或者外边界的贡献只是不含 Σ 上的 Noether 荷,则这贡献给出差 $H-E$:

$$H-E=\frac{\kappa}{2\pi}Q, \tag{5.33.9}$$

$$Q=2\pi\xi\int_\Sigma\sqrt{\sigma}\mathrm{d}^2\theta\phi^2. \tag{5.33.10}$$

用一个类似的方法,我们可以应用另外一些定理来计算荷 Q. 自旋为 1/2 的场,分析表明,能量和哈密顿是恒等的,$Q=0$. 可以推测,在含有高自旋场的理论中 Q 应该不为零.

5.34 量子激发和黑洞的熵

黑洞热力学和黑洞统计力学是黑洞物理学中最激动人心和发展最快的领域. 我们已熟习黑洞具有热力学系统的类似性质. 根据这一类比,黑洞应具有熵 $S^{BH}=\frac{1}{4G}A$,式中 A 为视界面积,G 为牛顿常数(我们取 $\hbar=c=k_B=1$). 人们把 S^{BH}的上述

表达式称为 Bekenstein-Hawking 熵. 黑洞具有温度 $T_H = \dfrac{\kappa}{2\pi}$,其中 κ 为视界的表面引力加速度.

在爱因斯坦的广义相对论中,黑洞熵是一个纯几何量. 这时仅用经典爱因斯坦场方程和微分几何的知识便可导出热力学定律. 如果把黑洞和普通的热力学系统进行比较,就很容易发现一个重要区别:黑洞是一个具有强引力场的虚空,而普通物体则由原子分子组成. 普通物体的微观结构使人们可以用其微观成分的统计力学来解释物体的热力学性质. 但是黑洞是否具有和黑洞熵对应的内部自由度,这是黑洞物理的关键问题.

用统计力学方法得到黑洞熵是对量子引力基本理论的非常有效的检验. 最近在超弦理论中就极端黑洞和近极端黑洞对黑洞熵所进行的成功计算就清楚地表明了这一点. 除了超弦方案之外,还可以沿其他方向来处理黑洞熵的问题,如 Carlip 等对 3 维黑洞熵的解释和在圈量子引力的框架内的处理.

我们下面讨论用量子激发解释黑洞熵的方案.

物理真空的性质,尤其在有引力存在时,是不平凡的. 在真空态中总存在物理场的零点涨落. 对于静止于视界附近的观测者,这种零点涨落以黑洞的热大气的形式被探测到. t′Hooft 假定红移后的大气温度为 T_H. 由此表明黑洞熵正比于视界面积 A,为避免发散,t′Hooft 又假定场在离视界一定距离时变为零. 如果这个距离是 Planck 长度的量级,那么熵就与 S^{BH} 可比较了.

黑洞附近静止观测者把真空看成混合态的原因是因为与视界内部量子系统有关的信息的丢失. 可以证明,即使在平直空间中,当真空的测量限制在系统的一部分时,所得到的熵也不会为零,且会正比于所限区域 Ω 的表面积. 对于非零自旋场和不同于真空的纯态所得的熵也有类似结果. 非零熵的出现是因为“可观测的”和“不可观测的”真空涨落在 Ω 的边界上相互缠绕(关联).

Frolov 等建议把黑洞熵与黑洞内部量子态所对应的自由度联系起来. 这些自由度的密度矩阵可以通过把完整系统的量子态对黑洞外的场的态求平均而得到. 对于视界附近的模,此密度矩阵是**热**的. 粒子成对产生,而只有一个能产生于视界外. 黑洞内的粒子对处于纯态中,对熵没有贡献. 因此,统计力学熵与**缠绕**相关,可以写成对黑洞**外部**模求和的形式. 换言之,此方案保留了较早方案的主要性质.

黑洞的一个显著性质是其缠绕熵和与热大气相关的熵是一致的. 以下我们将称此量为**统计力学熵**.

在黑洞背景中传播的场(包括引力场)的小涨落与黑洞几何的小改变有关. 用黑洞的无边界波函数就可证明这一点. 因此,量子场的态就与黑洞量子激发的态相关.

在一般情况下,阐明黑洞的统计力学熵与其“可观测的”热力学熵之间的关系

是很有意义的.黑洞附近的量子场具有一个重要性质,即场的哈密顿量的能级密度在视界附近发散.这导致统计力学熵的发散.这种发散与理论的紫外原圈发散有关,且可以通过对牛顿耦合常数进行重正化而去掉.他们表明标准的 Pauli-Villais 方法能去掉 RN 背景中统计力学熵的发散性.而且在这种规则化中,最小耦合标量场的熵发散性用标准的紫外重正化就可以完全消除.

把 S^{BH} 与黑洞的量子激发联系起来的思想和首创性的文献引发了对存在 Killing 视界时量子场的统计力学的研究.这方面的文章已超过百篇.这里,我们对这些工作的讨论有两个主要目的:

1. 描述有 Killing 视界时量子场的统计力学及其方法和已得结果;

2. 讨论统计力学熵与可观测的黑洞熵 S^{BH} 之间的关系.

作为这些结果的应用,我们将给出诱导引力模型中黑洞熵的统计力学推导.

5.35 无视界静态引力场中量子场的统计力学

1. 系统的描述

我们先讨论无视界引力场量子场的统计力学.这个理论是在 20 世纪 70 年代初由 Gibbons,Gibbons & Perry 和 Dowker & Kennedy 给出的.一个典型例子是静态非旋转恒星引力场具有有限温度的量子场.此引力场可由度规

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{ab}dx^a dx^b,\ a,b = 1,2,3\ , \tag{5.35.1}$$

描述,其中 $g_{00}(x) < 0$.度规(5.35.1)只依赖于空间坐标 x^a,故存在 Killing 场 $\xi = \partial/\partial t$.在空间无限远处,背景是渐近平直的,且按假定,度规的时间分量 g_{00} 趋于 -1.由于度规(5.35.1)不依赖于时间,在这个背景中很容易定义不同场的统计力学系综.我们将处理由温度 $T = \beta^{-1}$(在渐近无限远处测得)所表征的正则系综①.观测者在点 x^a 测得的局域 Tolman 温度为 $T_{loc} = |g_{00}|^{-1/2}\beta^{-1}$.

为探究玻色和费米统计,我们将考虑自由标量场 ϕ 和 Dirac 场 Ψ.二者分别满足 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程

$$(-\nabla^{\mu}\nabla_{\mu} + m^2 + \xi R)\phi = 0, \tag{5.35.2}$$

$$(\gamma^{\mu}\nabla_{\mu} + m)\psi = 0, \tag{5.35.3}$$

这里,R 为标曲率,ξ 为非最小耦合参数.协变导数 ∇_{μ} 按场的自旋定义.Dirac 矩阵

---

① 众所周知,无限的热辐射浴从引力上看是不稳定的系统.为得到稳定情况,可以考虑充满辐射的有限腔.为表征这个系统可以固定边界处的温度或使用无限远处的红移温度.以上对与辐射处于热平衡的黑洞同样适用.对于质量为 M 的非旋转黑洞,腔的尺寸必须小于 $3M$.在谈到正则系综时,我们总假定这种边界存在.我们的主题是视界存在时量子场系综的性质,外边界的存在在此处并不重要.因此我们不再详细说明.

$\gamma^{\mu}=(\gamma^{0},\gamma^{\alpha})$满足标准关系$\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\}=2g^{\mu\nu}$. 注意$\gamma^{0}$是反厄米矩阵. 我们定义旋量导数为$\nabla_{\mu}=\partial_{\mu}+\Gamma_{\mu}$,其中$\Gamma_{\mu}=\frac{1}{8}\{\gamma^{\lambda},\gamma^{\rho}\}\times V_{\rho}^{l}\nabla_{\mu}$, $V_{l\lambda}$为联络,V_{ν}^{l}为标架.

对于方程(5.35.2)和(5.35.3)的解,可确定标积

$$<\phi_1,\phi_2>=\mathrm{i}\int_{\beta}\mathrm{d}^3x\sqrt{{}^{(3)}g\,|\,g_{00}\,|^{-1}}(\phi_1^{*}\partial_t\phi_2-\phi_2\partial_t\phi_1^{*}),\tag{5.35.4}$$

$$<\psi_1,\psi_2>=\int_{\beta}\mathrm{d}^3x\sqrt{{}^{(3)}g}\psi_1^{+}\psi_2,\tag{5.35.5}$$

其中${}^{(3)}g=\det g_{ab}$. 以上标积与整体柯西面B的选择无关.

2. 正则方案与单粒子谱

温度为β^{-1}时的正则系综由配分函数

$$Z^{C}(\beta)=\mathrm{tr}\,\mathrm{e}^{-\beta:\hat{\mathscr{H}}:}\tag{5.35.6}$$

决定. 算符$:\hat{\mathscr{H}}:$是二次量子化的场的哈密顿. 它确定了量子场关于 Killing 时间t的么正演化. 跟以前一样,我们把场算符分解为关于时间t的正频和负频部分,从而定义产生和湮没算符. (5.35.6)中的正规顺序正是对这些算符而言. 在这种情况下,零温态(真空)的能量为零. 如果真空能不为零,定义式(5.35.6)很容易修改. 这点我们后面会谈到. 系统的**正则**自由能为

$$F^{C}(\beta)=-\beta^{-1}\ln Z^{C}(\beta).\tag{5.35.7}$$

为计算$F^{C}(\beta)$,先把方程(5.35.7)写成基于单粒子谱的另一等价形式. 令ω为一个场模关于 Killing 时间t的频率. 我们称这一系列频率为**单粒子谱**. ω谱由统的边界条件唯一确定. 如果系统在一有限区域内,且符合狄里克雷边界条件或其他边界条件,这个谱是离散的. 此时,有些频率相同,故可引入相应的简并因子$\mathrm{d}(\omega)$. 这样,(5.28.7)式可等效地写成

$$F^{C}[\beta]=\eta\beta^{-1}\sum_{\omega}d(\omega)\ln(1-\eta\mathrm{e}^{-\beta\omega})\tag{5.35.8}$$

因子η与统计有关,玻色场$\eta=1$,费米场$\eta=-1$. 虽然3维椭圆算符的简并因子$d(\omega)$对于大的ω趋于ω^2,但由于指数截断,级数(5.35.8)收敛.

当系统尺度无限大时,ω谱由合适当的渐近条件确定. 一个常规要求是在趋于空间无限远时场的大小降得足够快. 此时谱是连续的,(5.35.8)式中的求和须换成积分

$$F^{C}[\beta]=\eta\beta^{-1}\int_{0}^{\infty}\mathrm{d}\omega\frac{\mathrm{d}n(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\ln(1-\eta\mathrm{e}^{-\beta\omega})\tag{5.35.9}$$

量$\frac{\mathrm{d}n(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\mathrm{d}\omega$是区间$(\omega,\omega+\mathrm{d}\omega)$内的能级数. (5.35.9)式也可以从(5.35.8)中取

能级间隔为零而得到.

3. 单粒子哈密顿

单粒子谱可从场的波函数(5.35.2)和(5.35.3)中得到. 在静态空间(5.35.1)中,这些方程可改写成(3+1)的形式:

$$(\partial_t^2 + H_s^2)\phi = 0\,,\quad (\mathrm{i}\partial_t - H_d)\psi = 0\,,\tag{5.35.10}$$

其中下标 s 和 d 分别指标量场和 Dirac 的旋量. H_s^2 和 H_d 是 3 维微分算符:

$$H_s^2 = |g_{00}|(-\nabla^a\nabla_a - w^a\nabla_a + m^2 + \xi R)\,,\tag{5.35.11}$$

$$H_d = -\mathrm{i}\gamma_0\left[\gamma^a\left(\nabla_a + \frac{1}{2}w_a\right) + m\right].\tag{5.35.12}$$

3 维协变导数 ∇_a 由常时($t=\mathrm{const.}$)超曲面上的度规 g_{ab} 决定. 我们记此常时曲面为 B. 含指标 a 的操作与 B 上的 3 维度规 g_{ab} 对应,且 $w_a = \frac{1}{2}\nabla_a \ln|g_{00}|$ 为 Killing 观测者加速度矢量 $w_\mu = (0, w_a)$ 的 3 维部分.

算符 H_s 和 H_d 是**量子的单粒子哈密顿量**,因为它们的本征值确定了单粒子谱. 把具有固定能量的波函数 $\phi(t,\boldsymbol{x}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\phi_\omega(\boldsymbol{x})$, $\psi(t,\boldsymbol{x}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\psi_\omega(\boldsymbol{x})$ 代入(5.35.10)式中,可得到本征值方程:

$$H_s^2\phi_\omega(\boldsymbol{x}) = \omega^2\phi_\omega(\boldsymbol{x})\,,\ H_d^2\psi_\omega(\boldsymbol{x}) = \omega^2\psi_\omega(\boldsymbol{x}).\tag{5.35.13}$$

容易证明,H_s 和 H_d 关于内积

$$(\phi_1,\phi_2) = \int_\beta \mathrm{d}^3x\sqrt{{}^{(3)}g\,|g_{00}|^{-1}}\,\phi_1^*(\boldsymbol{x})\phi_2(\boldsymbol{x})\,,\tag{5.35.14}$$

$$(\psi_1,\psi_2) = \int_\beta \mathrm{d}^3x\sqrt{{}^{(3)}g}\,\psi_1^+(\boldsymbol{x})\psi_2(\boldsymbol{x})\,,\tag{5.35.15}$$

是厄米算符,其中 ψ^+ 为厄米共轭旋量. 关系式(5.35.14)和(5.35.15)是从 4 维场的内积(5.35.4)和(5.35.5)式中得到的,可用来使模归一化.

为简化计算,我们还要使用 H_s^2 和 H_d 的另一**表示**. 做函数和算符变换:

$$\bar{\phi} = \mathrm{e}^{-\sigma}\phi,\quad \bar{\psi} = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\sigma}\psi,\tag{5.35.16}$$

$$\bar{H}_s^2 = \mathrm{e}^{-\sigma}H_s^2 e^{\sigma}\,,\quad \bar{H}_d = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\sigma}H_d \mathrm{e}^{\frac{3}{2}\sigma}\,,\tag{5.35.17}$$

其中 $\sigma = -\frac{1}{2}\ln|g_{00}|$. 变换后的函数的内积可从(5.35.14)和(5.35.15)式中得到,并具有普适形式.

$$(\bar{\Phi}_1,\bar{\Phi}_2) = \int_\beta \sqrt{{}^{(3)}\bar{g}}\,\mathrm{d}^3x(\bar{\Phi}_1) + \bar{\Phi}_2.\tag{5.35.18}$$

这里,$\bar{\Phi}$ 可表示标量或旋量场, ${}^{(3)}\bar{g} = \det\bar{g}_{ab}$, $\bar{g}_{ab} = g_{ab}/|g_{00}| = \mathrm{e}^{2\sigma}g_{ab}$. 强调一下,变换(5.35.16)和(5.35.17)式并不改变(5.35.13)式所确定的谱. 因此,算得 $\bar{H}_i$ 与

$H_i(i=s,d)$是**等价**的.

从(5.35.17)中可得到旋量哈密顿：

$$\bar{H}_d = \mathrm{i}\bar{\gamma}_0(\bar{\gamma}^a\bar{\nabla}_a + \mathrm{e}^{-\sigma}m), \tag{5.35.19}$$

式中$\{\bar{\gamma}^\mu,\bar{\gamma}^\nu\}=2\bar{g}^{\mu\nu}, \bar{g}_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}/|g_{00}|$. 故对于标量和旋量算符的平方,我们有

$$\bar{H}_i^2 = -\bar{\nabla}^a\bar{\nabla}_a + \mathrm{e}^{-2\sigma}m^2 + V_i, i=s,d. \tag{5.35.20}$$

导数$\bar{\nabla}_a$是由3维超曲面$\bar{B}$上的度规$\bar{g}_{ab}$定义的. 势V_i由背景空间几何及 Killing 观测者的加速度w^μ决定：

$$V_s = \xi\bar{R} + \mathrm{e}^{-2\sigma}(1-6\xi)(\nabla^\mu w_\mu - w^\mu w_\mu), \tag{5.35.21}$$

$$V_d = \frac{1}{4}\bar{R} + \mathrm{e}^{-2\sigma}m\gamma^\mu w_\mu, \tag{5.35.22}$$

$$\bar{R} = \mathrm{e}^{-2\sigma}[R + 6(\nabla^\mu w_\mu - w^\mu w_\mu)]. \tag{5.35.23}$$

注意,把场的变换(5.35.16)运用到波函数(5.35.2),(5.35.3)上可得到算符$\bar{H}_i$,如此得到的新方程可表述为**超静态**时空

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \bar{g}_{ab}\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b \tag{5.35.24}$$

中的场方程,此度规与物理度规通过共形变换$\bar{g}_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}/|g_{00}|$相联系. 此度规的标曲率$\bar{R}$见(5.35.23)式. 由(3+1)方案可得到单粒子哈密顿(5.35.20)式. 以下与超静态度规$\bar{g}_{\mu\nu}$相关的量都用一横标示. 共形相关的两理论中的单粒子谱与正则方案是等价的. 须指出,在一般情况下$\left(\text{有质量 } m \text{ 和非最小耦合 } \xi\neq\frac{1}{6}\text{出现}\right)$,理论不是共形不变的. 对于标量场,共形不变性只存在于$m=0$且$\xi=\frac{1}{6}$的情况.

4. 协变欧氏方案

统计力学的正则方案符合系统沿 Killing 时间的幺正演化. 它明显与(3+1)分解相关,故不是明显协变的. 稳态背景中处理有限温度量子场的协变欧氏方案由 Gibbons 和 Hawking 给出. 此方案已被证明对黑洞热力学非常有用.

考虑一个流形M_β,其欧氏度规为

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\tau\tau}\mathrm{d}\tau^2 + g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta, \quad 0\leqslant\tau\leqslant\beta, \tag{5.35.25}$$

此度规由静态洛伦兹度规(5.35.1)通过 Wick 转动$t\to\tau=\mathrm{i}t$而得到. 其中$g_{\tau\tau}=|g_{00}|$,且对虚时间τ加上了周期条件. 我们假定空间是渐近平直的,且具有拓扑R^3,则M_β的拓扑为$R^3\times S^1$.

根据 Gibbons 和 Hawking 的处理,对于静态引力背景中场Φ的正则系综,配分函数Z^E和有效作用量W由路径积分确定：

$$Z^E(\beta) = e^{-W[g,\beta]} = \int [D\Phi] e^{-I[g,\Phi]}. \tag{5.35.26}$$

其中 $I[g,\Phi]$ 为流形 M_β 上的经典欧氏作用量. 由于在空间无限远处 $g_{\tau\tau}=1$,参数 β 为 S^1 的长度,故 β 的意义是空间无限远处所测得的温度的倒数. 场 Φ 可以具有玻色和费米统计. 玻色变量假定对欧氏时间 τ 具有周期 β,而费米场则是反周期性的. $[D\Phi]$ 是协变积分测度. 对于自由标量场和 Dirac 场,(5.35.26)中的积分给出

$$W[g,\beta] = W_s[g,\beta] + W_d[g,\beta], \tag{5.35.27}$$

$$W_s[g,\beta] = \frac{1}{2}\log\det\rho^{-2}L_s, \quad W_d[g,\beta] = -\log\det\rho^{-1}L_d. \tag{5.35.28}$$

泛函 $W_i[g,\beta]$ 是紫外发散的,故假定其发散性已规则化了. ρ 为任意重正化参数,有长度量纲,且不依赖于背景度规. 以下我们为简单起见取 $\rho=1$. 只要需要,有效作用量对 ρ 的依赖关系容易恢复. 与(5.35.2),(5.35.3)式相对应的算符 L_i 为

$$L_s = -\nabla^\mu\nabla_\mu + \xi R + m^2, L_d = \gamma_5(\gamma^\mu\nabla_\mu + m). \tag{5.35.29}$$

注意,经过了从洛伦兹号差到欧氏号差的 Wick 转动,矩阵 γ_0 应换成 $i\gamma_0$,矩阵 γ_5 与其他的 γ 反对易,且归一化为 $\gamma_5^2=1$. (5.35.29)中的两个算符关于标准内积

$$(\Phi_1,\Phi_2) = \int d^4x\sqrt{g}\Phi_1^+\Phi_2. \tag{5.35.30}$$

都是厄米的.

欧氏自由能 $F_i^E[g,\beta]$ 由系统的有效作用量确定:

$$F_i^E[g,\beta] = \beta^{-1}W_i[g,\beta] - E_i^0[g]. \tag{5.35.31}$$

与 $F_i^C[g,\beta]$ 类似,如此定义的欧氏自由能 $F_i^E[g,\beta]$ 在零温度时为零. 这使得两个自由能的比较更为简单.

真空能

$$E_i^0[g] = \lim_{\beta\to\infty}(\beta^{-1}W_i[g,\beta]) \tag{5.35.32}$$

对熵没有贡献. 由于自由能 E_i^E 和真空能 E_i^0 由协变欧氏作用量 $W_i[g,\beta]$ 定义,故此方案称为**协变欧氏方案**.

5. 正则方案与协变欧氏方案的关系

无视界时两种方案的关系已被许多人讨论.

要比较两种方案,关键一点是把正则自由能用超静态空间($\bar{M}_\beta$)

$$ds^2 = d\tau^2 + \bar{g}_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \beta \tag{5.35.33}$$

中的有效作用量表示. 此空间与 M_β 共形相关,为积 $S^1\times\bar{B}$.

先定义 M_β 上与算得 L_i(5.35.29)式共形相关的算符 $\bar{L}_i$:

$$\bar{L}_i = e^{-3\sigma}L_s e^\sigma, \quad \bar{L}_d = e^{-\frac{5}{2}\sigma}L_d e^{\frac{3}{2}\sigma}. \tag{5.35.34}$$

易证

$$\bar{L}_s = \bar{H}_s^2 - \partial_\tau^2, \tag{5.35.35}$$

$$\bar{L}_d = \gamma_5 \bar{\gamma}_\tau (\bar{H}_d + \partial_\tau), \bar{L}_d^2 = \bar{H}_d^2 - \partial_\tau^2. \tag{5.35.36}$$

对于这些算符,可定义有效作用量

$$\bar{W}_s[g,\beta] = \frac{1}{2}\log\det\bar{L}_s, \bar{W}_d[g,\beta] = -\log\det\bar{L}_d. \tag{5.35.37}$$

(为简单见,我们把 $\bar{W}_d$ 看成物理度规 $g_{\mu\nu}$ 的泛函)

对于具有离散谱的系统. 由(5.35.35)和(5.35.36)式可得正则自由能与超静态空间中的有效作用量之间的关系

$$F_i^C[g,\beta] = \beta^{-1}\bar{W}_i[g,\beta] - \bar{E}_i^0[g]. \tag{5.35.38}$$

其中 $\bar{E}_i^0$ 为超静态空间场的真空能

$$\bar{E}_i^0[g] = \eta_i \sum_\omega \mathrm{d}_i(\omega)\frac{\omega}{2}. \tag{5.35.39}$$

(5.35.38)和(5.35.39)式等推广到连续谱的情况. 此时只要取能级间距为零并把对 ω 的求和换成积分就行了. (5.35.38)和(5.35.39)式的推导见 Allen.

须注意,$\bar{E}_i^0$ 包括了泛函 $\bar{W}_i$ 的所有紫外发散项. 故泛函 F_i^C 是紫外有限的. 此发散性的几何结构不依赖于系统的温度. 这是量子场论一个更一般性质的结果,即其紫外奇异性不依赖于系统的量子态. $\bar{W}_i$ 的重正化等价于 $\bar{E}_i^0$ 的重正化.

方程(5.35.34)对找到正则和欧氏自由能之间的关系至为重要. 与算符 L_i 和 $\bar{L}_i$ 相应的经典作用量为

$$I_i^E[g,\varphi_i] = \int_{M_\beta}\mathrm{d}^4x\sqrt{g}\varphi_i^+ L_i\varphi_i, I_i^C[\bar{g},\bar{\varphi}_i] = \int_{\bar{m}_\beta}\mathrm{d}^4x\sqrt{\bar{g}}\bar{\varphi}_i^+\bar{L}_i\bar{\varphi}_i. \tag{5.35.40}$$

其中 φ_i 指 ϕ 或 ψ. 故由(5.35.34),对于 $\bar{\phi} = e^{-\sigma}\phi$ 和 $\bar{\psi} = e^{-\frac{3}{2}\sigma}\psi$,有

$$I_i^E[g,\varphi_i] = I_i^C[\bar{g},\bar{\varphi}_i]. \tag{5.35.41}$$

在 $\xi = \frac{1}{6}$ 的无质量标量场或无质量旋量场的情况下,L_i 和 $\bar{L}_i$ 具有相同的形式,这意味着经典理论是共形不变的. 在一般情况下,这种不变性不存在. 但是仍有可能在经典作用量中引入辅助的共形荷,并用赝共形不变性解释(5.35.41)式.

在量子理论中,经典对称性由于一些反常而破坏. 因此,二重正化作用量之间的关系为

$$W_i[g,\beta] = \bar{W}_i[g,\beta] + \beta\Omega_i[g]. \tag{5.35.42}$$

反常正比于 β,故仅对真空能有贡献:

$$E_i^0[g] = \bar{E}_i^0[g] + \Omega_i[g]. \tag{5.35.43}$$

于是,自由能 F_i^E 和 F_i^C 一致:

$$F_i^E[g,\beta] = F_i^C[g,\beta]. \tag{5.35.44}$$

因此,在无视界的静态时空中,量子场的统计力学的协变欧氏方案和正则方案是等价的.

(5.35.42)式中反常项的出现可归因于积分测度对于共形变换的非不变性.泛函 W_i 的路径积分定义(5.35.26)式中所用的协变测度对标量场为 $g^{1/4}\mathrm{d}\phi$,对旋量场为 $g^{-r_d/2}\mathrm{d}\psi+\mathrm{d}\bar{\psi}$,其中 $g=\det g_{\mu\nu}$,r_d 为旋量表示的阶数.两测度中第一个因子的区别在于玻色变量和费米变量的不同积分规则.作用量 $\bar{W}_i$ 的积分测度也不一样.它们分别为 $\bar{g}^{1/4}\mathrm{d}\phi$ 和 $\bar{g}^{-r_d/2}\mathrm{d}\psi+\mathrm{d}\bar{\psi}$,且对超静态背景而言是协变的.此测度形式可通过把理论正则量子化而得到.

5.36　与视界有关的性质

黑洞热大气的统计力学熵的计算有许多方面直接与视界的存在相关.考虑一般的静态时空,其 Killing 矢量 $\xi=\partial_t$,Killing 视界在 $\xi^2=0$ 处.暂时我们并不要求度规满足爱因斯坦场方程.

如果表面引力

$$\kappa=\left[-\frac{1}{2}(\xi_{\mu;\nu}\xi^{\mu;\nu})\mid_{\xi^2=0}\right]^{1/2}\tag{5.36.1}$$

不为零,视界附近的度规可写成

$$\mathrm{d}s^2\approx-\kappa^2\rho^2\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}\rho^2+\mathrm{d}\Omega^2,\tag{5.36.2}$$

这里 $\mathrm{d}\Omega^2$ 为视界的 2 维分支面上的度规.我们把此面记为 Σ.在坐标(5.36.2)中,视界位于 $\rho=0$ 处.这种度规形式对非极端黑洞是普适的.

存在视界时,量子场关于 Killing 时间的谱有许多重要的新性质:

(1) 单粒子谱即使在系统大小有限时也是连续的,有限是指在离视界有限距离处对系统加有边界条件.

(2) 尽管场有自旋和质量,ω 谱也会减为零.

(3) 分叉面 Σ 在时间演化下是不变的.

谱的连续性很容易从单粒子哈密顿(5.35.20)式中看出.算符 $\bar{H}_i$ 在超静态空间(5.35.24)式的空间部分 $\mathscr{B}$ 中给出,空间 $\mathscr{B}$ 总是非紧致的,因为共形变换在事件视界处是奇异的,它把 Σ 上的点变成 $\mathscr{B}$ 中的空间无限远.

算符 $\bar{H}_i$ 质量隙为零有以下原因.(5.35.20)式表明,由于因子 $e^{-2\sigma}=|g_{00}|$ 的存在,场的质量 m_i 在视界附近无任何效应.算符 $\bar{\nabla}^a\bar{\nabla}_a$ 具有一个质量隙,这是由于纯几何原因:空间 $\mathscr{B}$ 在视界附近具有渐近的常曲率.但在视界处 $V_s=-\kappa^2$,$V_d=-\frac{3}{2}\kappa^2$.故这些势就像快子质量一样正好抵消 $\mathscr{B}$ 的曲率所引起的质量隙.

因此,我们所处理的系统在视界附近的行为类似于非紧致空间中的无质量量子场.众所周知,此时会碰到红外发散困难.由于这种发散,量子哈密顿 $\bar{H}_i$ 的本征值密度在视界附近趋于无穷大.结果,正则程式中的自由能(5.35.9)式在任意温度下都发散.

存在视界时,协变欧氏方案也呈现出新的性质.此时,黑洞解的欧氏流形 M_β(5.35.25)式不会对任意的 β 值都规则.在 Killing 矢量 $\xi=\partial_\tau$ 为零的面 Σ(欧氏视界)附近,由(5.36.2)式度规可写为

$$ds^2 \approx \kappa^2\rho^2 d\tau^2 + d\rho^2 + d\Omega^2, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \beta, \tag{5.36.3}$$

故在此面附近,M_β 就像是 $C_\beta\times\Sigma$,其中 C_β 是具有顶角的空间.显然,仅当 β 取特殊值 $\beta=\beta_H=2\pi\kappa^{-1}$ 时,顶角奇异性才消失,M_β 才为规则空间.此时的温度 $T_H=\beta_H^{-1}$ 即 Howking 温度,而相应的量子态则称为 Hartle-Hawking 真空.T_H 的物理意义是:它恰为蒸发黑洞所辐射的 Hawking 量子的温度.T_H 也是量子辐射与黑洞处于热平衡时的温度.

对于 $\beta\neq\beta_H$,顶角奇异性导致 M_β 的有效作用量中的附加紫外发散.因此,存在视界时,正则方案与协变欧氏方案都出现新的发散性.但二者来源不同:正则方案中是红外的,而协变欧氏程式中为紫外的.

5.37　视界存在时的正则方案

1. 能级密度及其性质

视界存在时统计力学量的发散性直接与哈密顿态密度的无限增加有关.这个与早期方案类似的思想是把 $dn_i(\omega)/d\omega$ 与算符 $\bar{H}_i^2$ 的热核联系起来.后者为一椭圆算符,其热核人们都很熟习.对于连续谱,我们有

$$\mathrm{tr}e^{-\bar{H}_i^2 t} = \int_0^\infty d\omega \frac{dn_i(\omega)}{d\omega} e^{-\omega^2 t}. \tag{5.37.1}$$

密度 $dn_i(\omega)/d\omega$ 可以用逆 daplau 变换从(4.1)式中得到.对角矩阵元

$$\langle x \mid \exp(-\bar{H}_i^2 t) \mid x\rangle \equiv [\exp(-\bar{H}_i^2 t)]_{\mathrm{diag}}$$

行为规则并有限.但相应的迹却因涉及非紧致空间 $\mathscr{B}$ 上的积分而发散.为看出这一点,我们只要研究 $[\exp(-\bar{H}_i^2 t)]_{\mathrm{diag}}$ 在视界附近的行为.为估计主要的渐近项,我们可以忽略视界2维面的曲率,并把黑洞度规(5.37.2)用 Rindler 空间度规近似写出

$$ds^2 = -\kappa^2\rho^2 dt^2 + d\rho^2 + dz_1^2 + dz_2^2, \ -\infty < z_1, \quad z_2 < \infty, \quad \rho > 0. \tag{5.37.2}$$

于是,共形空间 $\mathscr{B}$ 上的度规

$$dl^2 = \kappa^{-2}\rho^{-2}(d\rho^2 + dz_1^2 + dz_2^2) \tag{5.37.3}$$

就与具有原常曲率 $\bar{R}=-6\kappa^2$ 的双曲流形 H^3 上的度规相同. H_i^{-2} 的本征函数只要在无限远处($\rho\to\infty$ 时)有正确的衰减性质,它们就是完全确定的. 因此,在视界 $\rho=0$ 处不需要附加条件. 当 $\rho\to0$ 时,场可等效为无质量场,而 H^3 上的标量的旋量热核的对角元已精确得到

$$[\mathrm{e}^{-tH_s^2}]_{\mathrm{diag}}=\frac{1}{(4\pi t)^{3/2}},[\mathrm{e}^{-tH_d^2}]_{\mathrm{diag}}=\frac{r_d}{(4\pi t)^{3/2}}\left(1+\frac{1}{2}\kappa^2 t\right). \quad (5.37.4)$$

这里假定了对旋量指标求和,因而出现因子 r_d. 此时的几何与 Rindler 几何在远离视界处完全不同,质量项也变得很重要. 因此,一般地,(5.37.4)式存在正比于 ρ^2 的修正. 这些项的结构可以用 $\mathscr{B}$ 上热核的渐近性质来分析.

因此,从(5.37.1)和(5.37.4)式中可看出,算符的迹及其态密度按 $\mathscr{B}$ 的体积而增加.

有几种方法使这些发散性规则化. 例如,我们可以限制系统的空间尺寸. 此时,到视界的固有距离小于某长度 ϵ 的物理时空区域被排除在考虑之外. 为此,t′Hooft 建议在离视界的固有距离为 ϵ 的面上加上场的狄里克雷边界条件. t′Hooft 的这个方案称为"**砖墙**"**模型**. 一个类似但更简单的方案——**体积截断**方法则由 Frolov 和 Novikov 提出. 在此方法中,所有的空间积分都在固有距离 ϵ 处截断而并不加边界条件.

在体积截断方法中,可等效地在视界附近截出一区域使得时空不完整. 但也存在一些在完整时空背景中的规则化方法. 这里,密度 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\omega$ 即使在 $\epsilon\to0$ 时也有限,但它依赖于规则化质量 μ:当 $\mu\to\infty$ 时,它趋于 μ^2. 另一选择是维数规则化. 此方法源于 Σ_g(5.37.5),(5.37.6)式中主要发散项的次数依赖时空维数. 在 D 维时空间中,$\mathscr{B}$ 的体积的主要发散项为 $\epsilon^{2-D}(D\neq2)$. 于是,可以将 D 视为规则化参数,并在 $ReD<2$ 时取极限 $\epsilon\to0$. 于是密度 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\omega$ 在 $D=4$ 处有一极点.

在体积截断方法中,$\mathrm{d}n/\mathrm{d}\omega$ 是红外发散的. 在 PV 和维数规则化方法中,$\mathrm{d}n/\mathrm{d}\omega$ 是紫外发散的. 因此,根据规则化方法的不同我们可以讨论红外和紫外极限.

2. 红外极限和体积截断

我们记体积截断方法中的规则化密度为 $\frac{\mathrm{d}n_i/(\omega/\epsilon)}{\mathrm{d}\omega}$,并探讨 $\epsilon\to0$ 时其渐近性质. 把热核对区域 $\rho\geqslant\epsilon$ 积分,并运用(5.37.1)中的逆拉普拉斯变换,便可得到态实度发散部分的规则化表达式:

$$\left[\frac{\mathrm{d}n_s/(\omega/\epsilon)}{\mathrm{d}\omega}\right]_{\mathrm{div}}=\frac{1}{4\pi^2\kappa^3}\int_\Sigma\left\{\omega^2\left(\frac{1}{\epsilon^2}-\frac{1}{4}P\ln\frac{\epsilon^2}{l^2}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\kappa^2}{2}\ln\frac{\epsilon^2}{l^2}\left[\left(\frac{1}{6}-\xi\right)R-m^2\right]\right\}, \quad (5.37.5)$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}n_d/(\omega/\epsilon)}{\mathrm{d}\omega}\right]_{\mathrm{div}}=r_d\frac{1}{4\pi^2\kappa^3}\int_\Sigma\left\{\omega^2\left[\frac{1}{\epsilon^2}-\frac{1}{4}P\ln\frac{\epsilon^2}{l^2}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{\kappa^2}{4\epsilon^2}-\frac{\kappa^2}{2}\ln\frac{\epsilon^2}{l^2}\left[\frac{1}{8}\mathscr{Q}-\frac{1}{2}R-m^2\right]\right\},\quad(5.37.6)$$

其中$\int_\Sigma$假定了积分在视界分叉面Σ上进行,故:$\int_\Sigma l=\mathscr{A}$,$\mathscr{A}$为Σ的面积.此外,我们还在大距离处加上了附加的截断l.量r_d是旋量表示的维数.故对4维狄拉克旋量而言,$r_d=4$,令$n_i^\mu(i=1,2)$为正交于Σ又相互正交的两个单位矢量,则$P^{\mu\nu}=\sum_{i=1}^2 n_i^\mu n_i^\nu$为到垂直于Σ的2维面上的投影子.(5.37.5)和(5.37.6)式中的$\mathscr{P}$和$\mathscr{Q}$为

$$\mathscr{P}=2\mathscr{R}-\mathscr{Q},\quad \mathscr{Q}=P^{\mu\nu}R_{\mu\nu},\quad \mathscr{R}=P^{\mu\nu}P^{\lambda\rho}R_{\mu\lambda\nu\rho}.\qquad(5.37.7)$$

注意,(5.37.5),(5.37.6)式中的主要发散项ϵ^{-2}已出现在Rindler近似式(5.37.4)中.质量和非零曲率源于附加的对数发散项$\ln(\epsilon^2/l^2)$.

把(5.37.5)和(5.37.6)式代入正则自由能(5.35.9)中,解得

$$F^C_{s,\mathrm{div}}[g,\beta,\epsilon]=-\frac{1}{\kappa^3}\int_\Sigma\left\{\frac{\pi^2}{180\beta^4\epsilon^2}-\left[\frac{\pi^2}{720\beta^4}\mathscr{P}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\kappa^2}{48\beta^2}\left[\left(\frac{1}{6}-\xi\right)R-m^2\right]\right]\ln\frac{\epsilon^2}{l^2}\right\},\qquad(5.37.8)$$

$$F^C_{d,\mathrm{div}}[g,\beta,\epsilon]=-r_d\frac{1}{\kappa^3}\int_\Sigma\left\{\left(\frac{7\pi^2}{1440\beta^4}+\frac{\kappa^2}{192\beta^2}\right)\frac{1}{\epsilon^2}\right.$$
$$\left.-\left[\frac{7\pi^2}{5760\beta^4}\mathscr{P}+\frac{\kappa^2}{96\beta^2}\left[\frac{1}{8}\mathscr{Q}-\frac{1}{12}R-m^2\right]\right]\ln\frac{\epsilon^2}{l^2}\right\}.\qquad(5.37.9)$$

由此可以计算正则系综的其他性质,尤其对于统计力学熵

$$S^C_{i,\mathrm{div}}[g,\beta,\epsilon]=\beta^2\frac{\partial F^C_{i,\mathrm{div}}[g,\beta,\epsilon]}{\partial\beta}.\qquad(5.37.10)$$

在Hawking温度$\beta^{-1}=\beta_H^{-1}\equiv\kappa/2\pi$,得到

$$S^C_{s,\mathrm{div}}[g,\beta_H,\epsilon]=\frac{1}{\pi}\int_\Sigma\left\{\frac{1}{360\epsilon^2}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{1440}\left[2\mathscr{R}-\mathscr{Q}+30\left(\frac{1}{6}-\xi\right)R-30m^2\right]\ln\frac{\epsilon^2}{l^2}\right\},\ (5.37.11)$$

$$S^C_{d,\mathrm{div}}[g,\beta_H,\epsilon]=r_d\frac{1}{\pi}\int_\Sigma\left\{\frac{11}{1440\epsilon^2}-\frac{1}{5760}\left[7\mathscr{R}+4\mathscr{Q}-5R-60m^2\right]\ln\frac{\epsilon^2}{l^2}\right\}.$$
$$(5.37.12)$$

如前所述,(5.35.6)式中省略的真空能对熵没有贡献.对于标量场,熵的主要发散项ϵ^{-2}由自由能(5.37.8)式中的β^{-4}项决定.但旋量场不一样.为得到熵的ϵ^{-2}发散项,自由能(5.37.9)中的主级项β^{-4}和次主级项β^{-2}都必须知道.

为确定自由能和熵的发散性,只要知道热核算符的渐近性质即可.但如果还想计算这些量本身,这就不够了. $dn/d\omega$, F^C 和 S^C 能精确计算的例子所考虑的情况是时空的空间部分形如 $B=R^+\times\Sigma$,其中 Σ 为常曲率流形.特别地,对于 Rindler 时空,Σ 为 2 维平面,而有质量标量场的态密度为

$$\frac{dn_s(\omega/\epsilon)}{d\omega}=\frac{\mathscr{A}}{4\pi^2\kappa^3}\left[\frac{\omega^2}{\epsilon^2}+\frac{m^2\kappa^2}{2}\ln\frac{\epsilon^2m^2}{4}-\frac{m^2\kappa^2}{2}(1+2\mathrm{Re}\psi(i\omega/\kappa))\right].\tag{5.37.13}$$

这里,ψ 为 Γ 函数的对数导数. $\epsilon\to0$ 时会消失的项这里已省略.从(5.37.13)式可看出,(5.37.5)和(5.37.6)式中附加截断 l 的作用在这里被 m^{-1} 代替.

3. 紫外极限

(1)维数规则化

维数规则化是在完整时空中定义 $dn/d\omega$ 的最简单方案.在此方案中,可以一开始就取 $\epsilon=0$.量 $dn/d\omega$ 依赖于与时空维数相差的变参数 D,并在 $D=4$ 处存在极点:

$$\left[\frac{dn_s(\omega/D)}{d\omega}\right]_{\mathrm{div}}=\frac{\Gamma\left(1-\dfrac{D}{2}\right)}{(4\pi)^{D/2}}\frac{m^{D-4}}{\kappa}\int_\Sigma\left[2\left(m^2-\left(\frac{1}{6}-\xi\right)R\right)-\frac{\omega^2}{\kappa^2}\mathscr{P}\right],\tag{5.37.14}$$

$$\left[\frac{dn_d(\omega\mid D)}{d\omega}\right]_{\mathrm{div}}=r_d\frac{\Gamma\left(1-\dfrac{D}{2}\right)}{(4\pi)^{D/2}}\frac{m^{D-4}}{\kappa}\int_\Sigma\left[2\left(m^2+\frac{R}{12}-\frac{\mathscr{Q}}{8}\right)-\frac{\omega^2}{\kappa^2}\mathscr{P}\right].\tag{5.37.15}$$

由此可得到标量场和旋量场的正则自由能发散项:

$$F^C_{\mathrm{div}}[g,\beta,D]=-\eta\frac{\Gamma\left(1-\dfrac{D}{2}\right)}{(4\pi)^{D/2}}\frac{\pi^2m^{D-4}}{3\kappa\beta^2}\int_\Sigma\left[f_1m^2-\left(p_1\frac{4\pi^2}{\kappa^2\beta^2}\mathscr{P}+p_2R+p_3\mathscr{Q}\right)\right].\tag{5.37.16}$$

相应的熵发散项为

$$S^C_{i,\mathrm{div}}[g,\beta,D]=\beta^2\frac{\partial F^C_{i,\mathrm{div}}[g,\beta,D]}{\partial\beta},$$

$$S^C_{i,\mathrm{div}}[g,\beta,D]=\eta\frac{\Gamma\left(1-\dfrac{D}{2}\right)}{(4\pi)^{D/2}}\frac{2\pi^2m^{D-4}}{3\kappa\beta}\int_\Sigma\left[f_1m^2-\left(p_1\frac{8\pi^2}{\kappa^2\beta^2}\mathscr{P}+p_2R+p_3\mathscr{Q}\right)\right].\tag{5.37.17}$$

常数 f_1 和 p_k 依赖于自旋.

附表

spin	d_1	f_1	q_1	q_2	q_3	p_1	p_2	p_3
0	$\frac{1}{6}-\xi$	1	1	-1	$\frac{5}{2}(1-6\xi)^2$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{6}-\xi$	0
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{12}r_d$	$-\frac{1}{2}r_d$	$-\frac{7}{8}r_d$	$-r_d$	$\frac{5}{8}r_d$	$-\frac{7}{480}r_d$	$\frac{1}{24}r_d$	$-\frac{1}{16}r_d$

（2）Pauli-Villars 规则化

维数规则化只产生对数发散项. 因此,用另一种更完全的规则化来研究 F^C_{div} 是有价值的,此即 Pauli-Villars 方法. 在此方法中,对于每一种物理场都引入 5 个附加辅助场:其中两个场质量为 M_κ,统计与前相同,三个场质量为 M'_r,统计与前相反. 为消除发散,辅助场的质量应满足

$$f(1)=f(2)=0, \tag{5.37.18}$$

其中

$$f(p)=m^{2p}+\sum_\kappa M_\kappa^{2p}-\sum_r (M_r^t)^{2p}=0. \tag{5.37.19}$$

取 $M_{1,2}=\sqrt{3\mu^2+m^2}$,$M'_{1,2}=\sqrt{\mu^2+m^2}$,$M'_3=\sqrt{4\mu^2+m^2}$ 就可满足条件(5.37.18). 规则化的态密度则为

$$\frac{\mathrm{d}n_i(\omega\mid\mu)}{\mathrm{d}\omega}\equiv\frac{\mathrm{d}n_i(\omega,m)}{\mathrm{d}\omega}+\sum_\kappa\frac{\mathrm{d}n_i(\omega,M_\kappa)}{\mathrm{d}\omega}-\sum_r\frac{\mathrm{d}n_i(\omega,M'_r)}{\mathrm{d}\omega}. \tag{5.37.20}$$

量 $\mathrm{d}n_i(\omega,M_\kappa)/\mathrm{d}\omega$ 和 $\mathrm{d}n_i(\omega,M'_r)/\mathrm{d}\omega$ 为辅助场的态密度. 统计相反的场在比式中给出负的项. 由于这种场的数目等于统计相同场的数目(5.37.5),(5.37.6)式中主要的 ϵ 发散项相互抵消. 对数发散项 $\ln\epsilon^2$ 也因条件 $f(p=1)=0$ 而相消. 结果,规则化的态密度(5.37.20)不含 $\epsilon\to0$ 时发散项,并可在完整的背景中定义. 由于存在辅助场时 $\mathrm{d}n_i(\omega\mid\mu)/\mathrm{d}\omega$ 有限,故结果与维数规则化时一样. 由(5.37.14)和(5.37.15)式,考虑到(5.37.18)式,可得

$$\left[\frac{\mathrm{d}n_s(\omega\mid\mu)}{\mathrm{d}\omega}\right]_{\text{div}}=\frac{1}{(4\pi)^2\kappa}\int_\Sigma\left[2b+a\left(\frac{\omega^2}{\kappa^2}P+2\left(\frac{1}{6}-\xi\right)R\right)\right], \tag{5.37.21}$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}n_d(\omega\mid\mu)}{\mathrm{d}\omega}\right]_{\text{div}}=r_d\frac{1}{(4\pi)^2\kappa}\int_\Sigma\left[2b+a\left(\frac{\omega^2}{\kappa^2}P-\frac{R}{6}+\frac{\mathscr{Q}}{4}\right)\right]. \tag{5.37.22}$$

其中,函数 a 和 b 依赖于 m 和 μ:

$$a\equiv-\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p}\right|_{p=0}=-\ln m^2-\sum_\kappa\ln M_\kappa^2+\sum_r\ln(M'_r)^2, \tag{5.37.23}$$

$$b\equiv-\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p}\right|_{p=1}=m^2\ln m^2+\sum_\kappa M_\kappa^2\ln M_\kappa^2-\sum_r(M'_r)^2\ln(M'_r)^2. \tag{5.37.24}$$

在 Pauli-Villars 方法中,μ^2 起到了紫外截断的作用. 在 $\mu\to\infty$ 时,$\mathrm{d}n_i(\omega|\mu)/\mathrm{d}\omega$ 是紫外发散的. 此时

$$a \approx \ln\frac{\mu^2}{m^2}, b \approx \mu^2\ln\frac{729}{256} - m^2\ln\frac{\mu^2}{m^2}, \tag{5.37.25}$$

因此,一般地,$\mathrm{d}n/\mathrm{d}\omega$ 包括了平方和对数发数项.

从方程(5.37.21)和(5.37.22),可以得到统计力学自由能的发数项:

$$F^C_{\mathrm{div}}[g,\beta,\mu] = -\frac{\eta}{48\kappa\beta^2}\int_\Sigma\left[bf_1 + a\left(p_1\frac{4\pi^2}{\kappa^2\beta^2}P + p_2R + p_3\mathcal{Q}\right)\right]. \tag{5.37.26}$$

对于 RN 黑洞背景中的标量场,由(5.37.26)式可得 Hawking 温度下熵的发散部分:

$$S^C_{\mathrm{div}}[g,\beta_H,\mu] = \frac{\eta}{48\pi}\int_\Sigma[bf_1 + a(2p_1P + p_2R + p_3\mathcal{Q})]. \tag{5.37.27}$$

考虑到(5.37.25)式,对于大的 μ,此式可写成

$$S^C_{\mathrm{div}}[g,\beta_H,\mu] = \frac{\eta}{48\pi}\int_\Sigma\left[c\mu^2f_1 + (2p_1P + p_2R + p_3\mathcal{Q} - f_1m^2)\ln\frac{\mu^2}{m^2}\right], \tag{5.37.28}$$

其中 $c = \ln\dfrac{729}{256}$. 表达式(5.37.28)与体积截断规则化中的(5.37.11)和(5.37.12)式有相同的结构. 易见 ϵ 与 μ^{-1} 对应,即 Pauli-Villars 规则化导致积分在视界附近的截断,此处距规界的固有距离约为场的质量的倒数. 这可作如下解释:在视界附近,当局域温度大于 μ 时,有质量的辅助场被激发,又由约束条件(5.37.18),它们的贡献刚好抵消物理场的贡献.

有趣的是,对于每一个场都可找到 ϵ 与 μ^{-1} 之间的关系,只要令主级发散项相等即可. 由此就可能找出 l 与 m^{-1} 的联系,这使得对数发散项也相等. 但是要注意,在这种等同中,ϵ 与 μ 的关系对不同自旋的场不一样,见(5.37.11),(5.37.12)和(5.37.28)式.

4. WKB 近似和砖墙模型

统计力学量中的发散性也可用 WKB 方法得到. 这种计算方法由 t′Hooft 提出,并被许多人运用. 作为例子,我们考虑渐近平直且球对称的黑洞背景

$$\mathrm{d}s^2 = -g(r)\mathrm{d}t^2 + g^{-1}(r)\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2) \tag{5.37.29}$$

中的标量场. 这里 $r\geqslant r_h$,而 r_h 为视界半径,满足 $g(r_h)=0$. 施瓦西黑洞和 RN 黑洞均由此类度规描述. 我们感兴趣的是模 $\bar{\phi}_{\omega,l}(\mathbf{x})$,其能量为 ω,角动量为 l. 这些模是本征值问题

$$\bar{H}^2_s\bar{\phi}_{\omega,l} = \omega^2\bar{\phi}_{\omega,l} \tag{5.37.30}$$

的解. 此方程可退化为具有势

$$V_{\text{eff}}^{l}(r) = -\frac{1}{4}(g')^2 + g(r)[m^2 + r^{-2}l(l+1)] \tag{5.37.31}$$

的一维问题

$$\left[-\frac{g^2}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r) + V_{\text{eff}}^{l}(r) - \omega^2\right]\bar{\phi}_{\omega,l} = 0. \tag{5.37.32}$$

在视界附近,此势为负,$V_{\text{eff}}^{l}(r_h) = -\kappa^2$,但当 $r \gg r_h$ 时为正,$V_{\text{eff}}^{l}(r=\infty) = m^2$.

现在考虑砖墙模型. 我们假定砖墙这个狄里克雷条件加在离视界的固有距离为 ϵ 处,且 $r(\epsilon)$ 为坐标(5.37.29)式中砖墙的位置. 由(5.37.32)式,可用准经典近似估计能量小于 ω 时的能级数 $n_s(\omega|\epsilon)$:

$$n_s(\omega|\epsilon) = \frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{l(\omega)}(2l+1)\int_{r(\epsilon)}^{rB}\frac{dr}{g(r)}\sqrt{\omega^2 - V_{\text{eff}}^{l}(r)}. \tag{5.37.33}$$

这里,$l(\omega)$ 为最大角动量,此时(5.37.33)式中的平方根为零,$r_B \gg r_h$ 为附加的红外截断.

为估计 $\epsilon \to 0$ 时 $n_s(\omega|\epsilon)$ 的渐近行为,我们假定 ω^2 大到可与背景的曲率相比较. 于是,只有大角动量的贡献才是重要的,而对 l 的求和可代之以积分:

$$n_s(\omega|\epsilon) \approx \frac{2}{3\pi}\int_{r(\epsilon)}^{rB}\frac{r^2 dr}{g^2}(\omega^2 - gm^2)^{3/2} \approx \frac{\mathscr{A}}{12\pi^2\kappa^3}\left[\frac{\omega^3}{\epsilon^2} + \frac{3}{2}\kappa^2 m^2 \omega \ln\frac{\epsilon^2}{l^2}\right]. \tag{5.37.34}$$

在最后一步中,我们令 $\mathscr{A} = 4\pi r_h^2$,$d\rho = g^{-1/2}dr$,并对视界附近的度规(5.37.29)用到了 Rindler 近似(5.37.2). 易见,(5.37.34)式与 $\mathscr{P} = R = 0$ 时标量场的表达式(5.37.5)给出同样的能级密度.

因此,至少对主级发散项而言,体积截断规则化与 WKB 砖墙模型是一致的. 如果换成 Newmann 边界条件,这种一致性仍然存在. 不同条件下的 $n_s(\omega|\epsilon)$ 只相差一个常数. 应注意,对于物理场,视界并非真实边界. 从数学上看,这意味着(5.37.30)式中满足 $\omega < m$ 的波函数只要在 $r \gg \epsilon$ 及时衰减得足够快就可以完全确定,且在截断长度 ϵ 处不需任何边界条件. 因此,体积截断方法似乎比砖墙方法更合适.

WKB 方法也可用于研究紫外发散.

5.38　协变欧氏方案

1. 体积截断与高温展开

在协变欧氏方案中,视界处发散问题的处理与正则方案一样,可引入体积截断或紫外规则化. 显然,欧氏方案和正则方案的比较只对等价的规则化才有意义.

在体积截断规则化中,可等效地在视界附近截去一区域,这使得时空不完整. 结果就得到无视界静态时空中的理论. 如前所述,此时协变欧氏方案与正则方案是等价的.

视界附近的欧氏作用量可由高温渐近得到. 这种渐近能给出很好的近似,因为局域温度在接近视界时趋于无穷. 有效作用量的高温展开由 Dowken 等得

$$W_i[g,\beta]=\beta\int d^3xg^{1/2}[b_i(x,\beta)+h_i(x)]+W_i^{(3)}[g]-\Delta W_i. \quad (5.38.1)$$

对于旋量,$W_i^{(3)}[g]=0$,但对于标量,$W_s^{(3)}[g]=-\frac{1}{2}\xi'(0)\bar{H}_i^2$ 由算符 $\bar{H}_s^2$ 的 ξ 函数确定,量 b_i 和 h_i 为

$$b_s(x,\beta)=-\frac{\pi^2}{90\beta_l^4}-\frac{1}{24\beta_l^2}\left[\left(\frac{1}{6}-\xi\right)R-m^2\right]-\frac{a_{s,2}(x)}{16\pi^2}\ln\frac{\mu\beta_l}{2\pi}, \quad (5.38.2)$$

$$b_d(x,\beta)=-\frac{7\pi^2r_d}{720\beta_l^4}+\frac{r_d}{48\beta_l^2}\left[\frac{1}{12}R+\frac{1}{2}(\nabla\omega-\omega^2)+m^2\right]+\frac{a_{d,2}(x)}{16\pi^2}\ln\frac{\mu\beta_l}{2\pi}, \quad (5.38.3)$$

$$h_s=\frac{1}{2880\pi^2}\Big[5\omega^2(\omega^2-2\nabla\omega)-3(\nabla\omega)^2+R_{\mu\nu}\omega^\mu\omega^\nu$$
$$-30\left[\left(\xi-\frac{1}{15}\right)R+m^2\right]\omega^2\Big], \quad (5.38.4)$$

$$h_d=\frac{r_d}{1440\pi^2}\Big[7\omega^2(\omega^2-2\nabla\omega)-18(\nabla\omega)^2+22R_{\mu\nu}\omega^\mu\omega^\nu$$
$$-5(R+6m^2)\omega^2\Big]. \quad (5.38.5)$$

其中,$\omega^2=\omega_\mu\omega^\mu$, $\nabla\omega=\nabla^\mu\omega_\mu$, $\beta_l(x)=|g_{00}|^{1/2}\beta$ 为局域 Tolman 温度的倒数,$a_{i,2}(x)$ 为 4 维算符 L_i(5.35.29)式的第二个热系数. $a_{d,2}(x)$ 中对对旋量指标求迹已假定.

(5.38.1)式中的 ΔW_i 为

$$\Delta W_i=\frac{\beta}{16\pi^{5/2}}\sum_{n=3}^{\infty}c_{i,n}\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)\zeta_R(2n-3)\bar{a}_{i,n}\left[\frac{\beta}{2\pi}\right]^{2n-4}.$$

这里 $c_{s,n}=1$,$c_{d,n}=1-2^{2n-3}$,$\zeta_R(z)$ 为 Riemann ζ 函数. $\bar{a}_{i,n}$ 为算得 $\bar{H}_i^2$ 的热核渐近展开的系数. 量 ΔW_i 也可用物理度规和局域温度写出. 须强调,除了 W_i^B 外,有效作用量的高温展开(5.38.1)式具有局域形式. 对有限温度的有效作用量的非局域贡献见.

在体积截断方法中,(5.38.1)式中的积分范围到距视界 ϵ 处为止. 作用量 W_i 和自由能 F_i^E 当 $\epsilon\to0$ 时发散. 发散仅由函数 $b_i(x,\beta)$ 中的 β^{-4} 和 β^{-2} 项产生. 函数 h_i 则对真空能的发散有贡献. 正如所期望的,欧氏和正则自由能中的发散项一致.

$$F_{i,\mathrm{div}}^C[g,\beta,\epsilon]=F_{i,\mathrm{div}}^E[g,\beta,\epsilon]. \quad (5.38.6)$$

这里,$F^{C}_{i,\mathrm{div}}$由(5.37.8)和(5.37.9)式决定,而 $F^{E}_{i,\mathrm{div}}$则可由作用量(5.38.1)减去真空能得到.

2. 顶角奇异性与紫外发散

现在考虑完整流形 M_β——具有顶角奇异性的流形上的协变欧氏有效作用量(已有一些对含顶角奇异性空间的有效作用量的计算,如 2 维,3 维的和 4 维的. 值得注意的是,顶角奇异性也出现于许多其他的物理应用中,如宇宙弦和 He^3 超流相中的拓扑缺陷.)这种情况下的一个重要性质是,顶角奇异性导致依赖于 β 的附加紫外发散.

引入作用于标量的旋量上的波算符 $\Delta_i = -\nabla^\mu\nabla_\mu + X_i$,其中 ∇ 为相应的协变导数. 我们有

$$L_s = \Delta_s + m^2, L_d^2 = \Delta_d + m^2, \tag{5.38.7}$$

其中 $X_s = (1/6 - \xi)R, X_d = \frac{1}{4}RI$.

一般地,单圈有效作用量可由 Schwinger-DeWitt 表示确定:

$$W[g,\beta] = \frac{\eta}{2}\log\det(\Delta + m^2) = -\frac{\eta}{2}\int_{\delta^2}^{\infty}\frac{\mathrm{d}s}{s}\mathrm{e}^{-m^2 s}\mathrm{tr}\,\mathrm{e}^{-s\Delta}, \tag{5.38.8}$$

其中,δ^2 为紫外截断.(为简单起见,我们省略了表示场的种类的指标 i.)紫外发散的几何结构由热核在小 s 处的渐近展开式中的第一项决定. 在无边界流形中,它具有形式

$$\mathrm{tr}\,\mathrm{e}^{-s\Delta} \approx \frac{1}{(4\pi s)^{D/2}}(B_0 + sB_1 + s^2B_2 + \cdots), \tag{5.38.9}$$

其中 D 为 M_β 的维数. 热系数(*HMDS* 系数)$B_k(k\geqslant 1)$可表为两项之和:

$$B_\kappa = A_\kappa + A_{\beta,\kappa}. \tag{5.38.10}$$

这里,A_κ 是 M_β 的规则区域上的标准系数, A_β, κ 为由顶角奇异性引起的附加项. 此项为 Σ 上的泛函,依赖于此面附近 M_β 的几何特征. A_κ 和 $A_{\beta,\kappa}$的前两项为

$$A_1 = \mathrm{d}_1\int_{M_\beta-\Sigma}R, A_{\beta,1} = \frac{\pi}{3\gamma}f_1(\gamma^2 - 1)\mathscr{A}, \tag{5.38.11}$$

$$A_2 = \frac{1}{180}\int_{M_\beta-\Sigma}(q_1R^{\mu\nu\lambda\rho}R_{\mu\nu\lambda\rho} + q_2R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + q_3R^2), \tag{5.38.12}$$

$$A_{\beta,2} = \frac{\pi}{3\gamma}\int_\Sigma\left[(\gamma^4 - 1)p_1\mathscr{P} + (\gamma^2 - 1)(p_2R + p_3\mathscr{Q})\right], \tag{5.38.13}$$

其中 $\gamma = \frac{\beta_H}{\beta}$.

M_β 上有效作用量的发散部分 $W_{\mathrm{div}}[g,\beta]$ 可用不同的规则化方法写出. 方便的是从维数规则化开始. 对于 $D\neq 4$,从(5.38.8)和(5.38.9)式可得

$$W_{\text{div}}[g,\beta,D] = -\frac{\eta}{2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{s}\mathrm{e}^{-m^2 s}\frac{1}{(4\pi s)^{D/2}}(B_0 + sB_1 + s^2 B_2). \tag{5.38.14}$$

从作用量中减去真空能即得欧氏自由能(见(2.31)式).在规则欧氏流形上,发散性仅由系数 A_0, A_1, A_2 决定,且正比于周期 β,故它们对自由能和熵没有贡献.当存在顶角奇异性时,发散项就由于附加项 $A_{\beta,\kappa}$ 而具有关于 β^{-1} 级数的多项式形式.这些项不能通过减去真空部分而消除.因此,欧氏自由能是发散的.发散部分 $F^E_{\text{div}}(g,\beta,D)$ 可很容易从(5.38.11),(5.38.13)和(5.38.14)式中得到.

由(4.16)式,正则和欧氏自由能的紫外发散部分(不管是标量场还是旋量场)在维数规则化中是**相同**的,这种同一性也出现在 PV 规则化中,故有

$$F^E_{i,\text{div}}[g,\beta,\delta] = F^C_{i,\text{div}}[g,\beta,\delta], \quad i = s,d. \tag{5.38.15}$$

其中 δ 为规则化参数(对于维数规则化,$\delta = D-4$;对于 PV 规则化,$\delta = \mu^{-1}$).作为(5.38.15)式的重要结果,不同方案中的熵发散项是相同的:

$$S^E_{i,\text{div}}[g,\beta,\delta] = S^C_{i,\text{div}}[g,\beta,\delta], \quad i = s,d. \tag{5.38.16}$$

3. 视界存在时正则方案与欧氏方案之间的关系

到现在为止,我们讨论和比较了视界存在时正则方案和协变欧氏方案中自由能的发散部分.本节讨论两方案中自由能有限部分的关系.

如前所述,正则和欧氏方案对于无视界静态时空是完全等价的.这是因为 M_β 和 $\bar{M}_\beta$ 上的有效作用量 W 和 $\bar{W}$ 由共形变换联系.从 W 和 $\bar{W}$ 中减去零温度部分而得到的欧氏和正则自由能无发散性.它们也不存在由重正化导致的反常,故 F^E 与 F^C 在无视界时一致.

整个泛函 $F^C[g,\beta,\epsilon]$ 和 $F^E[g,\beta,\epsilon]$(包括 ϵ 发散项和规则部分)在有视界的背景中也一致,只要使用体积截断方法就行.在此方法中,联系两自由能的共形变换也是行为规则的.

困难出现于含视界的完整背景中,此时,M_β 与 $\bar{M}_\beta$ 具有不同的拓扑,分别是 $R^2 \times \Sigma$ 和 $S^1 \times \bar{\beta}$,而 M_β 到 $\bar{M}_\beta$ 上的共形变换在分叉面上是奇异的.因此,此时两种方案的关系需进一步探讨.

我们已表明,存在对协变欧氏自由能和正则自由能都适用的紫外规则化方法.现在我们考虑体积截断和 PV 规则化同时运用的情形.此时,自由能依赖于 ϵ 和 PV 参数 μ.由于视界被排除,故

$$F^E_i[g,\beta,\mu,\epsilon] = F^C_i[g,\beta,\mu,\epsilon]. \tag{5.38.17}$$

如前所述,等式两边当去掉 ϵ 截断时仍保持有限.由(5.38.17)式得

$$F^E_i[g,\beta,\mu] = \lim_{\epsilon\to 0}F^E_i[g,\beta,\mu,\epsilon] = \lim_{\epsilon\to 0}F^C_i[g,\beta,\mu,\epsilon] = F^C_i[g,\beta,\mu]. \tag{5.38.18}$$

在极限 $\epsilon \to 0$ 下，F_i^E 变成 M_β 上的泛函，而 F_i^C 则为 $\bar{M}_\beta$ 上的泛函. 由(5.38.18)式可得出，当使用紫外规则化时，对于协变欧氏程式和正则程式的自由能，不仅其发散部分相同，而且整个裸自由能也相同.

有几个计算例子可以证实等式(5.38.18). 例如，把 Rindler 时空中有质量标量场的能级密度(5.37.13)重新在 PV 规则化中写出，则可得到其正则自由能，从而证实(5.38.18)式. 也可在 2 维情况下导出(5.38.18)式.

关系式(5.38.18)表明，由欧氏路径积分定义的配分函数 Z^E(5.35.26)式与正则配分函数 Z^C(5.35.6)式相同，这也包括时空有视界的情况. 这个事实很重要，它使得黑洞情况下 G-H 路径积分方法的统计力学解释成为合理.

须注意，(5.38.18)式仅对标量场和旋量场分析过. 对于更高自旋的场需要其他考虑.

4. 关于旋转黑洞和极端黑洞

研究表明，具有 Killing 视界的稳态几何通过 Wick 转动后得到的欧氏流形具有一个类似于静态情况的顶角奇异性. 这种奇异性来源于形如(5.37.26)式的单圈发散项.

关于极端黑洞，其视界具有零表面引力，这意味着此黑洞的温度为零. 在欧氏理论中，极端黑洞具有环状拓扑，故对任意周期 β 都无顶角奇异性. 极端黑洞背景中量子场的统计力学具有不同于非极端情况的重要性质. 尤其是，量子场能级密度 $\frac{dn}{d\omega}$ 的主级发散项正比于 $e^{L/M}$，其中 M 为黑洞质量，L 为空间边界处与视界附近截断位置之间的固有距离. 然而，紫外型规则化仍可用来消除态密度和正则自由能中的发散性. 有趣的是，$\frac{dn}{d\omega}$ 与 F^C 在这些规则化中的发散项具有类似(5.37.14)~(5.37.16)和(5.37.21)~(5.37.22)，(5.37.26)式的形式. 对极端黑洞情况下统计力学的两种方案尚未有比较结果.

5.39　黑洞的热力学和统计力学

我们已分析了黑洞周围量子场统计力学熵的性质. 在一般情况下，此熵是发散的，而黑洞熵是有限的，黑洞量子激发的统计力学熵与其热力学熵有何关系呢?

在量子场论中，量子修正是紫外发散量，其发散性由裸耦合常数的重正化而消去. 如前所述，统计力学熵的发散部分 S^C_{div} 具有紫外形式. 研究指出，S^C_{div} 可由牛顿常数的标准重正化所吸收.

现在我们详细讨论这一重正化. 对于边界处温度倒数 β 给定的黑洞正则系综, 其全部信息包含于由欧氏路径积分给出的配分函数 $Z(\beta)$ 中

$$Z(\beta) = \int [D\Phi] \exp(-I[\Phi]). \tag{5.39.1}$$

这里,积分对所有的场进行,包括引力场.

量 Φ 代表描述这些场的所有变量,包括引力场变量. $[D\Phi]$ 为场 Φ 空间的测度, I 为场位形的欧氏作用量. 作用量 I 包括了欧氏爱因斯坦作用量. 系统的态由度规的边界条件决定. 对温度为 T, 半径为 r_0 的球状盒内的引力场正则系综, 积分必须遍及盒内的所有度规, 其周期 β 等同为 T^{-1}. 这样的配分函数一定能描述黑洞的热系综. Z 与有效作用量 Γ 的关系为 $\Gamma = -\ln Z$, 自由能 F 定义为 $F = \beta^{-1}\Gamma = -\beta^{-1}\ln Z$. 由稳相近似可得

$$\beta F \equiv \Gamma = I[\Phi_0] + W + \cdots \tag{5.39.2}$$

这里 Φ_0 (一般为复的) 为作用量 $I[\Phi]$ 的经典场方程的解, 满足周期性条件和边界条件. 除了主级项 $I[\Phi_0]$, (5.39.2) 式还包括单圈修正项 W. 它来源于对背景 Φ_0 的场微扰的贡献. (5.39.2) 式中还有更高阶的圈展开项, 用(……)表示. 对于自由场, W 为在协变欧氏程式中计算出的单圈有效作用量, 见(5.35.28)式.

W 中出现的单圈发散性可由最初经典作用量 I 中的耦合常数的重正化吸收. 为此, 取 I 形如

$$I(G_B, \Lambda_B, c_B^i) = \int d^4x \sqrt{g} L, \tag{5.39.3}$$

$$L = \left[-\frac{\Lambda_B}{8\pi G_B} - \frac{R}{16\pi G_B} + c_B^1 R^2 + c_B^2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + c_B^3 R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} \right]. \tag{5.39.4}$$

在单圈发散性存在时, 稳相近拟方法须做如下改动. 记单圈有效作用量 W 的紫外发散部分为 W_{div}, 则重正化量可定义为

$$I_{\text{ren}} \equiv I(G_{\text{ren}}, \Lambda_{\text{ren}}, c_{\text{ren}}^i) = I(G_B, \Lambda_B, c_B^i) + W_{\text{div}}, W_{\text{ren}} = W - W_{\text{div}}. \tag{5.39.5}$$

现在, 半经典近似的起点是找到重正化作用量 I_{ren} 的极值点. 由于对此背景 W_{ren} 有限且正比于 $\hbar$, 此部分作用量描述小的量子修正.

在重正化中关键的一点是, W_{div} 具有与(5.39.3), (5.39.4)式相同的结构, 故可通过对 $I(G_B, \Lambda_B, c_B^i)$ 中的耦合常数重新定义而吸收掉. 换言之, 在最初的经典作用量中把裸系数 Λ_B, G_B 和 c_B^i 换成重正化系数 Λ_{ren}, G_{ren}, 和 c_{ren}^i 即得 I_{ren}. 由关系式(5.38.9)和相应拉普拉斯算得(在规则背景中)的热核系数(5.38.10)~(5.38.12)式可以得到 W_{div} 裸耦合常数与重正化耦合常数之间的关系与规则化方法有关. 例如, 在 PV 规则化中, 对于非最小耦合标量场, 牛顿常数的重正化为

$$\frac{1}{G_{\text{ren}}} = \frac{1}{G_{\text{B}}} + \frac{c}{2\pi}\left(\frac{1}{6} - \xi\right)\mu^2, \tag{5.39.6}$$

其中 $c=\ln(729/256)$，μ 为 PV 截断.

用重正化常数表示的自由能 $F(\beta)=\beta^{-1}\Gamma$ 是有限的. 在黑洞瞬子上计算 $F(\beta)$ 可以得到黑洞的单圈自由能. "可观测的"黑洞热力学熵 S^{TD} 具有标准形式 $S^{TD}=\beta^2\mathrm{d}F/\mathrm{d}\beta$. 如果暂时忽略对数发散并令 $\Lambda_{\mathrm{ren}}=0$，则得

$$S^{TD}=S^{BH}(G_{\mathrm{ren}})+o(\hbar)\tag{5.39.7}$$

这里，$S^{BH}(G_{\mathrm{ren}})$ 为广义相对论中具有牛顿常数 G_{ren} 的黑洞熵. $o(\hbar)$ 表示 E 比于 $\hbar$ 的有限量子修正. (5.39.6)和(5.39.7)式可以与量子场的统计力学熵 S^C 比较. 对于标量场，由(5.37.28)式可得 S^C 的主要发散项：

$$S^C_{\mathrm{div}}=\frac{C}{48\pi}\mu^2\mathscr{A}.\tag{5.39.8}$$

故由(5.39.6)式得

$$S^{BH}(G_{\mathrm{ren}})=S^{BH}(G_B)+S^C_{\mathrm{div}}-Q_{\mathrm{div}},\tag{5.39.9}$$

其中 $Q_{\mathrm{div}}=\xi c\mu^2\mathscr{A}/(2\pi)$ 出现在标量场与曲率非最小耦合时. 在下一节我们将证明，当非主要发散项也包括进来时，(5.39.9)式的形式仍保持不变.

(5.39.7)式明显表明，"可观测的"黑洞熵包括了黑洞量子激发的统计力学熵，但一般并不等于它. 对于非最小耦合，还有一项 Q 存在. 即使 $Q=0$，裸的纯几何贡献 $S^{BH}(G_B)$ 的存在也明显排除了把 $S^{BH}(G_{\mathrm{ren}})$ 与具有明显统计力学意义的 S^C_{div} 等同起来的可能性. 而且，为得到 $S^{BH}(G_{\mathrm{ren}})$ 的有限值，必须假定纯几何"熵" $S^{BH}(G_B)$ 无限且为负. 因此，把 S^{BH} 与量子激发联系起的想法不行，至少在标准重正化方案中如此. 此问题的出路在于只考虑特殊情况 $S^{BH}(G_B)=0$. 这当 $G_B^{-1}=0$ 时成立，故从一开始引力就是非动力学的. 引力场的动力学只能作为量子效应的结果而出现. 诱导引力即是这种理论.

5.40　广义重正化和 Noether 荷

在讨论诱导引力模型前，我们先考虑(5.39.9)式的推广. 考虑曲率平方项保留在重正化作用量中的情况. 此时，经典黑洞熵为

$$S^{BH}(G_{\mathrm{ren}},c^i_{\mathrm{ren}})=\frac{1}{4G_{\mathrm{ren}}}\mathscr{A}-\int_\Sigma\sqrt{\sigma}\mathrm{d}^2\theta(8\pi c^1_{\mathrm{ren}}R+4\pi C^2_{\mathrm{ren}}\mathscr{L}+8\pi C^3_{\mathrm{ren}}\mathscr{R}).\tag{5.40.1}$$

其中积分在视界分叉面上进行. (5.40.1)式右边的第一项为黑洞熵，其他项的出现是由于作用量中的高阶曲率项.

在标量和旋量场模型中，对于 PV 和维数规则化，(5.39.9)式具有如下形式：

$$S^{BH}(G_{\mathrm{ren}},c^i_{\mathrm{ren}})=S^{BH}(G_B,c^i_B)+S^C_{\mathrm{div}}-Q_{\mathrm{div}}.\tag{5.40.2}$$

在 PV 规则化中，S^C_{div} 由(5.37.28)决定. 量 Q_{div} 出现于非最小耦合标量场时，

$$Q_{\mathrm{div}} = \xi \frac{1}{8\pi}\int_{\Sigma}\left[b + a\left(\frac{1}{6} - \xi \right) R \right]. \tag{5.40.3}$$

系数 a,b 依赖于 PV 截断 μ 并由(5.37.23),(5.37.24)式给出. 当 $Q_{\mathrm{div}}=0$ 时.

对于非最小耦合的标量场,Q_{div}(5.40.3)式可写成

$$Q_{\mathrm{div}} = 2\pi\xi\int_{\Sigma}\langle \hat{\phi}^2 \rangle_{\mathrm{div}}, \tag{5.40.4}$$

这里已假定标量场的涨落$\langle \phi^2 \rangle$是在 PV 规则化中进行的.

量(5.40.4)出现于(5.40.2)式中的原因如下. 当标量场非最小耦合时,黑洞熵包括了附加项 $Q=2\pi\xi\int_{\Sigma}\phi^2$,其中 ϕ 为经典场. 在量子理论中,Q 变成算得,其平均值的发散部分与 Q_{div}一致. 在单圈近似中,由于有非最小耦合,Q_{div}决定了 S^{BH} 的量子修正.

在引力的微分同胚不变性理论中,经典黑洞熵可解释为 Noether 荷. 在 5.33 节中我们证明了,对于在固定弯曲背景中传播的非最小耦合物质场,Q 与其 Noether 荷一致. 我们还构造出了相应的 Neother 流. 我们也证明了

$$Q = \frac{2\pi}{\kappa}(H - E), \tag{5.40.5}$$

其中 κ 为表面引力,H 为场的 E 则哈密顿量 E 为从能动张量中得到的场的能量,见定义(5.33.2),(5.33.5)式. 此关系在诱导引力模型中起重要作用.

5.41 诱导引力中的黑洞熵

诱导引力理论由 Sakharrov 提出. 此理论中的低能引力有效作用量 $\Gamma[g]$定义为在给定的引力背景 g 中传播的场 ϕ 的量子平均:

$$\exp(-\Gamma[g]) = \int[D\Phi]\exp(-I[g,\Phi]) \tag{5.41.1}$$

Sakharrov 的基本假定是,引力仅在作为成分场量子效应的结果时是动力学的,因此,我们所处理的特殊情况是$[g]=0$. 此图像中的引力子类似于低温极限理论中描述晶体晶格的集体激发的光子场. 在一般情况下,(5.41.1)式中每一个成分场都会对. 有效作用量 $\Gamma[g]$产生发散项. 在原圈近似中,这些项是局域的,且为曲率的零次方、一次方和二次方. 在诱导引力中,各成分满足附加条件,使得其发散性相消. 该理论又假定其中某些场的质量与普朗克质量可比较,且所选择的条件使得诱导出的宇宙常数为零. 于是,有效作用量 $\Gamma[g]$是有限的,且在低能近似下具有 Einstein-Hilbert 作用量的形式:

$$\Gamma[g] = -\frac{1}{16\pi G}\left(\int_M \mathrm{d}VR + 2\int_{\partial M}\mathrm{d}\upsilon K \right) + \cdots, \tag{5.41.2}$$

其中,牛顿常数 G 由重质量决定.(5.41.2)式中的点表示对 $W(g)$的可能高阶曲率

修正. 当曲率很小时, 这些项都小于幂因子 m_i^{-2}. 真空引力场方程 $\delta W/\delta g^{\mu\nu}=0$ 相当要求各成分的总能动张量真空平均值为零:

$$\langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle = 0. \tag{5.41.3}$$

在 G-H 瞬子上计算出的 E-H 作用量(5.41.2)的值决定了黑洞的经典自由能, 故可给出黑洞熵 S^{BH}.

考虑一个诱导引力模型, 包括许多质量为 m_s 的标量场和质量为 m_d 的狄拉克费米子. 标量场可以具有非最小耦合 ξ_s. 我们引入两个函数:

$$\begin{aligned} p(z) &= \sum_s m_s^{2z} - 4\sum_d m_d^{2z}, q(z) \\ &= \sum_s m_s^{2z}(1-6\xi_s) + 2\sum_d m_d^{2z} \end{aligned} \tag{5.41.4}$$

直接计算表明, 当

$$p(0) = p(1) = p(2) = p'(2) = 0 \tag{5.41.5}$$

时, 诱导宇宙常数为零. 如果满足

$$q(0) = q(1) = 0, \tag{5.41.6}$$

则诱导引力耦合常数 G 有限. 关系(5.41.5)对满足 $p(z)=0$ 的超对称, 有质量多重态理论成立. (5.41.6)式则形成定义 ξ_s 的线性系统.

非最小耦合成分的存在很重要. 此时, 关于参数 m_s, m_d 和 ξ_s 的约束条件可能成立, 从而保证诱导引力作用量 $\Gamma[g]$ 中的主要紫外发散项相互抵消. 此模型中的诱导牛顿常数为

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{12\pi} = \left[\sum_S (1-6\xi_s) m_s^2 \ln m_s^2 + 2\sum_d m_d^2 \ln m_{\mathrm{ren}}^2 d \right]. \tag{5.41.7}$$

现在分析诱导引力中施瓦西黑洞的熵. 如果条件(5.41.5)和(5.41.6)满足, 诱导作用量中就只有对数发散项. 但这些项以平方关系依赖于曲率, 且在施瓦西背景中因不依赖于几何而可忽略. 考虑差 S^C-Q, 其中 S^C 是有质量的标量, 旋量场的统计力学熵, Q 为因标量场的非最小耦合而出现的 Noether 荷. 假定 S^C 和 Q 已按同种方法规则化, 如 PV 方法. 在低温极限下, 可以计算出这些量的主要项 m_i^2. 在此近似下, S^C 与 PV 规则化中的 S_{div}^C (5.37.27) 相同. 类似地, Noether 荷近似等于(5.40.3)式中的 Q_{div}. 容易检验, 对于施瓦西黑洞, S^C 和 Q 中的主要发散项相消, 且由(5.37.27)和(5.40.3)式可得

$$S^C - Q \approx S_{\mathrm{div}}^C - Q_{\mathrm{div}} = \frac{1}{4G}\mathscr{A} + C \tag{5.41.8}$$

这里, C 为一个发散的常数. 在我们的考虑中, C 可忽略, 因为它不依赖于黑洞几何. 因此, S^C-Q 与诱导黑洞熵 $S^{BH}=\frac{1}{4G}\mathscr{A}$ 一致. 结果(5.41.8)式也可用维数规则化得到.

由(5.41.8)式,黑洞熵由重线分场统计力学熵合主要部分决定. S^C_{div}源于视界附近一窄层上的积分,大小约为各成分的康普顿波长的量级,与普朗克长度可比较. 因此,黑洞熵只依赖于视界的局部性质. 此结论意味着关系式(5.41.8)必然对一般静态或稳态黑洞也成立.

由(5.41.8)式可以得到另一结论:黑洞熵 S^{BH} 与统计力学熵 S^C 并不相同. 实际上,S^{BH}为有限量,而 S^C 则由于各成分给出 E 的发散项而发散. 在(5.41.8)式中,S^C 的发散性通过减去 Q 而消除. 可以证明,在此模型中,Q 具有 E 的发散项. 因此,非最小耦合场的存在不仅对理论紫外有限是必需的,它也使 S^C 的发散性能通过减法而消除.

对于 Noether 荷 Q 出现于关系(5.41.8)式中,是否有统计力学解释呢? 一种可能的机制. 诱导引力把黑洞熵与成分场的统计力学熵联系起来. 由于反作用效应,黑洞几何会因这些场的量子涨落而发生变化. 结果之一是场的能量 E 在平均值 $E=0$ 附近的涨落引起黑洞质量在其平均值 M 附近的涨落. 黑洞熵 S^{BH}确定了间隔$(M, M+\Delta M)$内的态数密度,故 $\exp(S^{BH})$与黑洞质量谱的简并度 $\nu(M)$一致. 现在,用微分质量公式易证,精确到普朗克常数的最高阶时,黑洞质量的改变 ΔM 与成分场的能量改变 ΔE 相同. 因此,寻找黑洞质量谱的简并度就简化成寻找成分场的能量谱. 特别地,黑洞熵与 E 的数密度 $\nu(E)$的关系为 $\mathrm{e}^{S^{BH}}=\nu|_{E=0}$.

与 S^{BH}不同,统计力学熵 S^C 与使系统沿 Killing 时间平移的哈密顿量 H 的谱相关. H 与 E 相差一个 Noether 荷 Q. 这就是 S^{BH}与 S^C 不同且由(5.41.8)式联系的原因.

为什么具有能量 E 的态数密度有限,而 H 的态数即使在等外有限理论中也发散? 这与存在 Killing 视界时量子系统的特殊性质有关. 我们已指出,此时单粒子激发的频率谱没有质量隙. 换言之,存在频率小到可忽略的模,称为**软模**. 任意多的软模可加进这样的系统而不会影响 E 则能 H. E 是软模导致 H 谱的附加无限简并. 然而,软模对能量 E 的贡献并非零,且 E 谱没有过多的简并度.

软模对 E 有贡献的原因是 E 与 H 差 Noether 荷 Q. 实际上,Q 仅由软模决定. 为看出这一点,把视界附近的黑洞几何用 Rindler 空间近似(5.4.2)式就足够了. 由(5.7.4)式,Q 由分叉面 Σ 上标量关联平均值$\langle\phi^2\rangle$决定. 在 Rindler 近似下,此关联为

$$
\begin{aligned}
\langle\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')\rangle &= \mathrm{tr}[\rho\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')] \\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}\omega\int \mathrm{d}^2\kappa[n_\omega\phi^*_{\omega,\kappa}(x)\phi_{\omega,\kappa}(x') \\
&\quad +(n_\omega+1)\phi_{\omega,\kappa}(x')\phi^*_{\omega,\kappa}(x')]
\end{aligned}
\tag{5.41.9}
$$

这里,$n_\omega=[\exp(2\pi\omega/\kappa)-1]^{-1}$为在 Hawking 温度下具有能量 ω 的粒子数. 函数 $\phi_{\omega,\kappa}(x)$是由(5.35.11)式确定的单粒子哈密顿 H_S 的本征函数. 在 Rindler 空间

(5.37.2)式中,

$$\phi_{\omega},\kappa(x) = \frac{1}{4\pi^3\kappa^{1/2}}(\sinh(\pi\omega/\kappa))^{1/2}K i\omega/\kappa[\rho(m^2+\kappa_j^2)^{1/2}]e^{-i\omega t}e^{-i\kappa_j z_j} \tag{5.41.10}$$

其中 κ^i 和 z^i 为沿视界的动量和坐标. $K\ i\omega/\kappa$ 为修正后的贝塞尔函数. 当到视界的固有距离 ρ 超于零时, $K i\omega/\kappa(\rho(m^2+\kappa_j^2)^{1/2}$ 趋于 δ 函数 $\delta(\omega)$. 因此, 当关联(5.41.9)式的一个变量在视界上时, 只有软模的贡献能存在. 运用 PV 规则代并在(5.41.9)式中取极限 $\rho\to 0$, 就可得到 Q_{div} 在 $R=0$ 时的形式(5.40.3).

诱导引力提出了下列对黑洞熵公式(5.41.8)的统计力学解释. S^{BH} 由对应于给定黑洞质量 M 的物理态数密度决定. 物理态与黑洞外成分场的激发态相关, 而后者导致黑洞质量的涨落. 物理态空间可以通过所有热激发的空间对软模子空间的分解而得到. 这就去掉了附加的简并, 使得物理态的数密度有限. 这种对软模的分解等价于从 S^C 中减去 Noether 荷而得到 S^{BH}. 这种机制类似于规范理论, 软模起着纯规范自由度的作用.

5.42　小　　结

我们主要讨论了黑洞时空中量子场热系综的描述. 这个工作源于黑洞物理的核心问题——找出黑洞熵的统计力学解释.

黑洞附近量子场统计力学的主要困难与附加的热(红外)发散有关. 当这些发散性存在时, 正则方案和协变欧氏方案之间的关系需要重新考虑. 在前几节中, 我们着重分析了其规则化方法和发散性. 我们证明了正则和协变欧氏方案是等价的, 且以同一规则化中两方案发散性相同. 此问题的一个重要性质是一种规则化中的热发散具有另一规则化中的紫外发散的形式. 这种对偶性对黑洞熵的讨论至关重要. 对黑洞熵有贡献的热发散与使引力耦合常数重正化的紫外单圈发散有关.

我们分析了黑洞熵问题, 并证明此问题不能在引力理论中用标准的重正化方案解决. 重正化需要最初的裸熵, 它有纯几何起源, 且(在无非最小耦合时)为负的无穷大量. 但是, 如果裸的经典(主级)引力不存在, 黑洞熵 S^{BH} 可直接与黑洞量子激发的统计力学熵 S^C 相关. 新的重要性质是这个关系必须包括非最小耦合场的 Noether 荷. 在无裸引力的单圈紫外有限理论中, S^{BH} 与 S^C 的关系为

$$S^{\text{BH}} = S^C - Q \tag{5.42.1}$$

这种理论属于所谓的诱导引力理论. 在这些理论中, 引力作为具有普朗克质量的重要成分场的集体量子激发的结果而诱导出来. 产生低能引力的同样成分场导致了黑洞的熵 S^{BH}.

对具体模型的分析表明, 关系式(9.1)是理论上自洽的结果, Noether 荷 Q 决

定了系统能量 E 与哈密顿 H 值之差. 熵 S^{BH} 描述黑洞态关于其质量的简并. 它可与成分场系统关于其能量 E 的简并联系起来. 后者与哈密顿 H 的简并不同.

在此方案中,对熵有贡献的场(成分)被认为是基本的. 可以预见,这些场可产生于基本的量子引力理论如弦论中. 这种机制现在还未存在. 但它的可能存在也许能解释黑洞熵的普适性.

附录 A　曲率在与黑洞视界面正交的子空间中的投影

我们定义一对正交矢量:

$$n_1^{\mu} = \left(0,\ \sqrt{g^{rr}}, 0, 0\right),$$

$$n_2^{\mu} = \left(\frac{1}{\sqrt{-\left(g_{tt} + 2\tilde{\Omega} g_{t\varphi} + \tilde{\Omega}^2 g_{\varphi\varphi}\right)}}, 0, 0, \frac{\tilde{\Omega}}{\sqrt{-\left(g_{tt} + 2\tilde{\Omega} g_{t\varphi} + \tilde{\Omega}^2 g_{\varphi\varphi}\right)}}\right), \tag{A1}$$

$$n_{\mu}^{1} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{g^{rr}}}, 0, 0\right),$$

$$n_{\mu}^{2} = \left(\frac{\sqrt{-\left(g_{tt} + 2\tilde{\Omega} g_{t\varphi} + \tilde{\Omega}^2 g_{\varphi\varphi}\right)}}{1 - \tilde{\Omega} F}, 0, 0, -\frac{F\sqrt{-\left(g_{tt} + 2\tilde{\Omega} g_{t\varphi} + \tilde{\Omega}^2 g_{\varphi\varphi}\right)}}{1 - \tilde{\Omega} F}\right). \tag{A2}$$

通过冗长的计算,得知曲率在与视界面正交的子空间的投影

$$R_{aa} = \sum_{a=1}^{2} R_{\mu\nu} n_a^{\mu} n_a^{\mu},$$

$$R_{abab} = \sum_{a=1}^{2} R_{\mu\nu\lambda\rho} n_a^{\mu} n_b^{\nu} n_a^{\lambda} n_b^{\rho}, \tag{A3}$$

可表示为

$$\begin{aligned} R_{aa}(r_H, \theta) = \Bigg[& \frac{g_{t\varphi}^2}{f g_{\varphi\varphi}^3}\left(\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}\right)^2 - \frac{2 g_{t\varphi}}{f g_{\varphi\varphi}^2}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{f g_{\varphi\varphi}}\left(\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r}\right)^2 \\ & - \frac{3}{2}\frac{\partial \ln f}{\partial r}\frac{\partial g^{rr}}{\partial r} - \frac{1}{2 g_{\theta\theta}}\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r}\frac{\partial g^{rr}}{\partial r} - \frac{1}{2 g_{\varphi\varphi}}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}\frac{\partial g^{rr}}{\partial r} - \frac{\partial^2 g^{rr}}{\partial r^2}\Bigg]_{r_H}, \end{aligned} \tag{A4}$$

$$\begin{aligned} R_{abab}(r_H, \theta) = \frac{1}{f}\Bigg[& \frac{3 g_{t\varphi}^2}{2 g_{\varphi\varphi}^3}\left(\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}\right)^2 - \frac{3 g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}^2}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r} + \frac{3}{2 g_{\varphi\varphi}}\left(\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r}\right)^2 \\ & - \frac{3}{2}\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial g^{rr}}{\partial r} - f\frac{\partial^2 g^{rr}}{\partial r^2}\Bigg]_{r_H}. \end{aligned} \tag{A5}$$

方程(A4)和(A5)给出

$$R_{nn}(r_H,\theta)-2R_{mnmn}(r_H,\theta)=\left\{\frac{\partial^2 g^{rr}}{\partial r^2}+\frac{3}{2}\frac{\partial g^{rr}}{\partial r}\frac{\partial \ln f}{\partial r}-\frac{1}{2}\frac{\partial g^{rr}}{\partial r}\left(\frac{1}{g_{\theta\theta}}\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r}+\frac{1}{g_{\varphi\varphi}}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{2g_{\varphi\varphi}}{f}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}}\right)^2\right\}_{r_H}. \qquad (A6)$$

附录 B　视界的外曲率几何

利用由(A1)和(A2)式定义的矢量 n^1 和 n^2,我们引入诱导度规

$$\gamma_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}-n^1_\mu n^1_\nu-n^2_\mu n^2_\nu. \qquad (B1)$$

其非零分量为

$$\gamma_{tt}=\frac{g^2_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}}-fg^{rr}+\frac{fHg^{rr}}{\left(1+\frac{\tilde{\Omega}(g_{t\varphi}+g_{\varphi\varphi}\tilde{\Omega})}{g^2_{t\varphi}/g_{\varphi\varphi}-fg^{rr}+g_{t\varphi}\tilde{\Omega}}\right)^2},$$

$$\gamma_{t\varphi}=g_{t\varphi}+\frac{(fg_{\varphi\varphi}Hg^{rr}(g_{t\varphi}+g_{\varphi\varphi}\tilde{\Omega})(-g^2_{t\varphi}+fg_{\varphi\varphi}g^{rr}-g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}\tilde{\Omega}))}{-g^2_{t\varphi}+fg_{\varphi\varphi}g^{rr}-2g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}\tilde{\Omega}-g^2_{\varphi\varphi}\tilde{\Omega}^2)^2},$$

$$\gamma_{\theta\theta}=g_{\theta\theta},$$

$$\gamma_{\varphi\varphi}=g_{\varphi\varphi}+\frac{fg^2_{\varphi\varphi}Hg^{rr}(g_{t\varphi}+g_{\varphi\varphi}\tilde{\Omega})^2}{(-g^2_{t\varphi}+fg_{\varphi\varphi}g^{rr}-2g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}\tilde{\Omega}-g^2_{\varphi\varphi}\tilde{\Omega}^2)^2}. \qquad (B2)$$

式中,

$$H=\left(1+\frac{g_{\varphi\varphi}(\Omega-\tilde{\Omega})^2}{g_{tt}g_{\varphi\varphi}-g^2_{t\varphi}}\right), \qquad (B3)$$

$$\Omega=-\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}}. \qquad (B4)$$

由正交矢量 n^a_μ,$(a=1,2)$,我们定义的外曲率

$$K^a_{\mu\nu}=-\gamma^\alpha_\mu\gamma^\beta_\nu\Delta_\alpha n^\alpha_\beta. \qquad (B5)$$

在黑洞外部,其非零的分量为

$$K^1_{tt}=-\frac{\tilde{\Omega}^2(g^2_{t\varphi}-fg_{\varphi\varphi}g^{rr}+g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}\tilde{\Omega})^2}{2f^2g^2_{\varphi\varphi}H^2(g^{rr})^{3/2}}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}$$
$$+\frac{\tilde{\Omega}(-g^2_{t\varphi}+fg_{\varphi\varphi}g^{rr}-g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}\tilde{\Omega})(g^2_{t\varphi}-fg_{\varphi\varphi}g^{rr}+fg_{\varphi\varphi}Hg^{rr}+g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}\tilde{\Omega})}{f^2g^2_{\varphi\varphi}H^2(g^{rr})^{3/2}}\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{(g_{t\varphi}^2-fg_{\varphi\varphi}g^{rr}+fg_{\varphi\varphi}Hg^{rr}+g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}\tilde{\Omega})^2}{2f^2g_{\varphi\varphi}^4H^2(g^{rr})^{3/2}}\\
&\times\left[g_{\varphi\varphi}^2g^{rr}\frac{\partial f}{\partial r}+g_{t\varphi}^2\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}-2g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r}+fg_{\varphi\varphi}^2\frac{\partial g^{rr}}{\partial r}\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{t\varphi}^1=&-\frac{\tilde{\Omega}(g_{t\varphi}^2-fg_{\varphi\varphi}g^{rr}+g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}\tilde{\Omega})(fHg^{rr}+g_{t\varphi}\tilde{\Omega}+g_{\varphi\varphi}\tilde{\Omega}^2)}{2f^2g_{\varphi\varphi}H^2(g^{rr})^{3/2}}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}\\
&-\frac{\tilde{\Omega}(g_{t\varphi}+g_{\varphi\varphi}\tilde{\Omega})(g_{t\varphi}^2-fg_{\varphi\varphi}g^{rr}+g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}\tilde{\Omega})}{2f^2g_{\varphi\varphi}H^2(g^{rr})^{3/2}}\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r}\\
&+\frac{(-g_{t\varphi}^2+fg_{\varphi\varphi}g^{rr}-fg_{\varphi\varphi}Hg^{rr}-g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}\tilde{\Omega})(fHg^{rr}+g_{t\varphi}\tilde{\Omega}+g_{\varphi\varphi}\tilde{\Omega}^2)}{2f^2g_{\varphi\varphi}H^2(g^{rr})^{3/2}}\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r}\\
&+\frac{(g_{t\varphi}+g_{\varphi\varphi}\tilde{\Omega})(g_{t\varphi}^2-fg_{\varphi\varphi}g^{rr}+fg_{\varphi\varphi}Hg^{rr}+g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}\tilde{\Omega})}{2f^2g_{\varphi\varphi}^3H^2(g^{rr})^{3/2}}\\
&\times\left[g_{\varphi\varphi}^2g^{rr}\frac{\partial f}{\partial r}+g_{t\varphi}^2\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}-2g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r}+fg_{\varphi\varphi}^2\frac{\partial g^{rr}}{\partial r}\right],
\end{aligned}
$$

$$
K_{\theta\theta}^1=-\frac{\sqrt{g^{rr}}}{2}\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r},
$$

$$
\begin{aligned}
K_{\varphi\varphi}^1=&-\frac{(fHg^{rr}+g_{t\varphi}\tilde{\Omega}+g_{\varphi\varphi}\tilde{\Omega}^2)^2}{f^2H^2(g^{rr})^{3/2}}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}+\frac{(g_{t\varphi}+g_{\varphi\varphi}\tilde{\Omega})}{(fHg^{rr}+g_{t\varphi}\tilde{\Omega}+g_{\varphi\varphi}\tilde{\Omega}^2)}\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r}\right]\\
&+(g_{t\varphi}+g_{\varphi\varphi}\tilde{\Omega})^2\left[g^{rr}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{g_{t\varphi}^2}{g_{\varphi\varphi}^2}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}-\frac{2g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r}+f\frac{\partial g^{rr}}{\partial r}}\right]\frac{1}{2f^2H^2(g^{rr})^{3/2}},
\end{aligned}
\tag{B6}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{t\theta}^2=&\frac{(-fHg^{rr})^{1/2}\tilde{\Omega}(-g_{t\varphi}^2+fg_{\varphi\varphi}g^{rr}-g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}\tilde{\Omega})}{2fHg^{rr}(-g_{t\varphi}^2+fg_{\varphi\varphi}g^{rr}-2g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}\tilde{\Omega}-g_{\varphi\varphi}^2\tilde{\Omega}^2)}\left(\tilde{\Omega}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\theta}+\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial\theta}\right)\\
&+(-fHg^{rr})^{1/2}(g_{t\varphi}^2-fg_{\varphi\varphi}g^{rr}+fg_{\varphi\varphi}Hg^{rr}+g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}\tilde{\Omega})\\
&\times\frac{\left(g_{\varphi\varphi}^2g^{rr}\frac{\partial f}{\partial\theta}+g_{t\varphi}^2\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\theta}-2g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial\theta}-g_{\varphi\varphi}^2\tilde{\Omega}\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial\theta}+fg_{\varphi\varphi}^2\frac{\partial g^{rr}}{\partial\theta}\right.}{2fg_{\varphi\varphi}^2Hg^{rr}(-g_{t\varphi}^2+fg_{\varphi\varphi}g^{rr}-2g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}\tilde{\Omega}-g_{\varphi\varphi}^2\tilde{\Omega}^2)},
\end{aligned}
$$

$$
K_{\varphi\theta}^2=\frac{g_{\varphi\varphi}(-fHg^{rr})^{1/2}(fHg^{rr}+g_{t\varphi}\tilde{\Omega}+g_{\varphi\varphi}\tilde{\Omega}^2)}{2fHg^{rr}(g_{t\varphi}^2-fg_{\varphi\varphi}g^{rr}+2g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}\tilde{\Omega}+g_{\varphi\varphi}^2\tilde{\Omega}^2)}\left[\tilde{\Omega}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\theta}+\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial\theta}\right]
$$

$$-\left[(-fHg^{rr})^{1/2}(g_{t\varphi}+g_{\varphi\varphi}\tilde{\Omega})\left(g_{\varphi\varphi}^{2}g^{rr}\frac{\partial f}{\partial\theta}+g_{t\varphi}^{2}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}-2g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial\theta}\right.\right.$$
$$\left.\left.-g_{\varphi\varphi}^{2}\tilde{\Omega}\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial\theta}+fg_{\varphi\varphi}^{2}\frac{\partial g^{rr}}{\partial\theta}\right)\right]\frac{1}{2g_{\varphi\varphi}(-g_{t\varphi}^{2}+fg_{\varphi\varphi}g^{rr}-2g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}\tilde{\Omega}-g_{\varphi\varphi}^{2}\tilde{\Omega}^{2})}. \tag{B7}$$

相应的逆变分量为

$$K_{1}^{tt}=\left(g_{\varphi\varphi}^{2}g^{rr}\frac{\partial f}{\partial r}-2g_{\varphi\varphi}^{2}Hg^{rr}\frac{\partial f}{\partial r}+g_{\varphi\varphi}^{2}H^{2}g^{rr}\frac{\partial f}{\partial r}+g_{t\varphi}^{2}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}-2g_{t\varphi}^{2}H\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}\right.$$
$$-2g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}H\tilde{\Omega}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}-g_{\varphi\varphi}^{2}\tilde{\Omega}^{2}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}-2g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r}(1-H)-2g_{\varphi\varphi}^{2}\tilde{\Omega}\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r}$$
$$\left.+2g_{\varphi\varphi}^{2}H\tilde{\Omega}\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r}+fg_{\varphi\varphi}^{2}\frac{\partial g^{rr}}{\partial r}(1-H)^{2}\right)\Big/\left(2f^{2}g_{\varphi\varphi}^{2}H^{2}(g^{rr})^{3/2}\right),$$

$$K_{1}^{t\varphi}=\left[g_{\varphi\varphi}^{2}g_{t\varphi}Hg^{rr}\frac{\partial f}{\partial r}-g_{\varphi\varphi}^{2}g_{t\varphi}H^{2}g^{rr}\frac{\partial f}{\partial r}+g_{\varphi\varphi}^{3}g^{rr}\tilde{\Omega}\frac{\partial f}{\partial r}(1-H)+g_{t\varphi}^{3}H\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}\right.$$
$$-fg_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}H^{2}g^{rr}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}+g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}^{2}\tilde{\Omega}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}-fg_{\varphi\varphi}^{2}Hg^{rr}\tilde{\Omega}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}-g_{\varphi\varphi}^{2}g_{t\varphi}H\tilde{\Omega}^{2}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}$$
$$-g_{\varphi\varphi}^{3}\tilde{\Omega}^{3}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}-g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}^{2}H\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r}-fg_{\varphi\varphi}^{2}Hg^{rr}\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r}+fg_{\varphi\varphi}^{2}H^{2}g^{rr}\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r}$$
$$-2g_{\varphi\varphi}^{2}g_{t\varphi}\tilde{\Omega}\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r}-2g_{\varphi\varphi}^{3}\tilde{\Omega}^{2}\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r}+g_{\varphi\varphi}^{3}H\tilde{\Omega}^{2}\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r}+fg_{\varphi\varphi}^{2}g_{t\varphi}H\frac{\partial g^{rr}}{\partial r}(1-H)$$
$$\left.+fg_{\varphi\varphi}^{3}\tilde{\Omega}\frac{\partial g^{rr}}{\partial r}-fg_{\varphi\varphi}^{3}H\tilde{\Omega}\frac{\partial g^{rr}}{\partial r}\right]\Big/\left(2f^{2}g_{\varphi\varphi}^{3}H^{2}(g^{rr})^{3/2}\right),$$

$$K_{1}^{\theta\theta}=-\left[(g^{rr})^{1/2}\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r}\right]\Big/\left(2g_{\theta\theta}^{2}\right),$$

$$K_{1}^{\varphi\varphi}=\left(g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}^{2}H^{2}g^{rr}\frac{\partial f}{\partial r}+2g_{\varphi\varphi}^{2}g_{t\varphi}Hg^{rr}\tilde{\Omega}\frac{\partial f}{\partial r}+g_{\varphi\varphi}^{3}g^{rr}\tilde{\Omega}^{2}\frac{\partial f}{\partial r}+2fg_{t\varphi}^{2}H^{2}g^{rr}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}\right.$$
$$-f^{2}g_{\varphi\varphi}H^{2}(g^{rr})^{2}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}+2g_{t\varphi}^{3}H\tilde{\Omega}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}+g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}^{2}\tilde{\Omega}^{2}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}+2g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}^{2}H\tilde{\Omega}^{2}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}$$
$$-2fg_{\varphi\varphi}^{2}Hg^{rr}\tilde{\Omega}^{2}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}-g_{\varphi\varphi}^{3}\tilde{\Omega}^{4}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}-2fg_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}H^{2}g^{rr}\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r}-2g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}^{2}H\tilde{\Omega}\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r}$$
$$-2fg_{\varphi\varphi}^{2}Hg^{rr}\tilde{\Omega}\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r}-2g_{\varphi\varphi}^{2}g_{t\varphi}\tilde{\Omega}^{2}\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r}-2g_{\varphi\varphi}^{2}g_{t\varphi}H\tilde{\Omega}^{2}\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r}-2g_{\varphi\varphi}^{3}\tilde{\Omega}^{3}\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r}$$
$$\left.+fg_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}^{2}H^{2}\frac{\partial g^{rr}}{\partial r}+2fg_{\varphi\varphi}^{2}g_{t\varphi}H\tilde{\Omega}\frac{\partial g^{rr}}{\partial r}+fg_{\varphi\varphi}^{3}\tilde{\Omega}^{2}\frac{\partial g^{rr}}{\partial r}\right)\Big/\left(2f^{2}g_{\varphi\varphi}^{3}H^{2}(g^{rr})^{3/2}\right).$$

$$K_2^{t\theta} = \Big[(-fHg^{rr})^{1/2} \Big[2g_{\varphi\varphi}^2 g_{t\varphi}^2 g^{rr} \frac{\partial f}{\partial\theta} - 2g_{\varphi\varphi}^2 g_{t\varphi}^2 H g^{rr} \frac{\partial f}{\partial\theta} - f g_{\varphi\varphi}^3 (g^{rr})^2 \frac{\partial f}{\partial\theta}$$

$$+ f g_{\varphi\varphi}^3 H (g^{rr})^2 \frac{\partial f}{\partial\theta} + 2g_{\varphi\varphi}^3 g_{t\varphi} g^{rr} \tilde{\Omega} \frac{\partial f}{\partial\theta} - 2g_{\varphi\varphi}^3 g_{t\varphi} H g^{rr} \tilde{\Omega} \frac{\partial f}{\partial\theta} + 2g_{t\varphi}^4 \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\theta}$$

$$- f g_{\varphi\varphi} g_{t\varphi}^2 g^{rr} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\theta} - f g_{\varphi\varphi} g_{t\varphi}^2 H g^{rr} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\theta} + 4 g_{\varphi\varphi} g_{t\varphi}^3 \tilde{\Omega} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\theta}$$

$$- (2 + H) f g_{\varphi\varphi}^2 g_{t\varphi} g^{rr} \tilde{\Omega} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\theta} + 2g_{\varphi\varphi}^2 g_{t\varphi}^2 \tilde{\Omega}^2 \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\theta} - f g_{\varphi\varphi}^3 g^{rr} \tilde{\Omega}^2 \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\theta}$$

$$- 2 g_{\varphi\varphi} g_{t\varphi}^3 \frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial\theta} + f g_{\varphi\varphi}^2 g_{t\varphi} H g^{rr} \frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial\theta} - 4 g_{\varphi\varphi}^2 g_{t\varphi}^2 \tilde{\Omega} \frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial\theta} + f g_{\varphi\varphi}^3 H g^{rr} \tilde{\Omega} \frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial\theta}$$

$$- 2 g_{\varphi\varphi}^3 g_{t\varphi} \tilde{\Omega}^2 \frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial\theta} + 2f g_{\varphi\varphi}^2 g_{t\varphi}^2 \frac{\partial g^{rr}}{\partial\theta} - 2f g_{\varphi\varphi}^2 g_{t\varphi}^2 H \frac{\partial g^{rr}}{\partial\theta} - f^2 g_{\varphi\varphi}^3 g^{rr} \frac{\partial g^{rr}}{\partial\theta}$$

$$+ f^2 g_{\varphi\varphi}^3 H g^{rr} \frac{\partial g^{rr}}{\partial\theta} + 2(1 - H) f g_{\varphi\varphi}^3 g_{t\varphi} \tilde{\Omega} \frac{\partial g^{rr}}{\partial\theta} \Big] / (2f^2 g_{\theta\theta} g_{\varphi\varphi}^2 H (g^{rr})^2 (g_{t\varphi}^2$$

$$- f g_{\varphi\varphi} g^{rr} + g_{\varphi\varphi} g_{t\varphi} \tilde{\Omega} + g_{\varphi\varphi} g_{t\varphi} \tilde{\Omega} + g_{\varphi\varphi}^2 \tilde{\Omega} \tilde{\Omega})),$$

$$K_2^{\varphi\theta} = \Big[(-fHg^{rr})^{1/2} \Big(- 2 g_{\varphi\varphi} g_{t\varphi}^3 H g^{rr} \frac{\partial f}{\partial\theta} + f g_{\varphi\varphi}^2 g_{t\varphi} H (g^{rr})^2 \frac{\partial f}{\partial\theta} - 2 g_{\varphi\varphi}^2 g_{t\varphi}^2 g^{rr} \tilde{\Omega} \frac{\partial f}{\partial\theta}$$

$$- 2 g_{\varphi\varphi}^2 g_{t\varphi}^2 H g^{rr} \tilde{\Omega} \frac{\partial f}{\partial\theta} + f g_{\varphi\varphi}^3 (g^{rr})^2 \tilde{\Omega} \frac{\partial f}{\partial\theta} - 2 g_{\varphi\varphi}^3 g_{t\varphi} g^{rr} \tilde{\Omega}^2 \frac{\partial f}{\partial\theta} - 3 f g_{t\varphi}^3 H g^{rr} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\theta}$$

$$+ 2f^2 g_{\varphi\varphi} g_{t\varphi} H (g^{rr})^2 \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\theta} - 2 g_{t\varphi}^4 \tilde{\Omega} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\theta} + f(1 - 3H) g_{\varphi\varphi} g_{t\varphi}^2 g^{rr} \tilde{\Omega} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\theta}$$

$$+ f^2 g_{\varphi\varphi}^2 H (g^{rr})^2 \tilde{\Omega} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\theta} - 4 g_{\varphi\varphi} g_{t\varphi}^3 \tilde{\Omega}^2 \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\theta} + 2f g_{\varphi\varphi}^2 g_{t\varphi} g^{rr} \tilde{\Omega}^2 \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\theta}$$

$$+ f g_{\varphi\varphi}^3 g^{rr} \tilde{\Omega}^3 \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\theta} + 3f g_{\varphi\varphi} g_{t\varphi}^2 H g^{rr} \frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial\theta} - f^2 g_{\varphi\varphi}^2 H (g^{rr})^2 \frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial\theta} + 2 g_{\varphi\varphi} g_{t\varphi}^3 \tilde{\Omega} \frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial\theta}$$

$$+ 3f g_{\varphi\varphi}^2 g_{t\varphi} H g^{rr} \tilde{\Omega} \frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial\theta} + 4 g_{\varphi\varphi}^2 g_{t\varphi}^2 \tilde{\Omega}^2 \frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial\theta} + 2 g_{\varphi\varphi}^3 g_{t\varphi} \tilde{\Omega}^3 \frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial\theta} - 2f g_{\varphi\varphi} g_{t\varphi}^3 H \frac{\partial g^{rr}}{\partial\theta}$$

$$+ f^2 g_{\varphi\varphi}^2 g_{t\varphi} H g^{rr} \frac{\partial g^{rr}}{\partial\theta} - 2f g_{\varphi\varphi}^2 g_{t\varphi}^2 \tilde{\Omega} \frac{\partial g^{rr}}{\partial\theta} - 2f g_{\varphi\varphi}^2 g_{t\varphi}^2 H \tilde{\Omega} \frac{\partial g^{rr}}{\partial\theta} + f^2 g_{\varphi\varphi}^3 g^{rr} \tilde{\Omega} \frac{\partial g^{rr}}{\partial\theta}$$

$$- 2f g_{\varphi\varphi}^3 g_{t\varphi} \tilde{\Omega}^2 \frac{\partial g^{rr}}{\partial\theta} - 2 g_{\varphi\varphi}^2 g_{t\varphi}^2 \tilde{\Omega}^3 \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\theta} \Big) \Big] / [2f^2 g_{\theta\theta} g_{\varphi\varphi}^2 H (g^{rr})^2 (- g_{t\varphi}^2 - g_{\varphi\varphi}^2 \tilde{\Omega}^2$$

$$- g_{\varphi\varphi} g_{t\varphi} \tilde{\Omega} + f g_{\varphi\varphi} g^{rr})]. \tag{B8}$$

外曲率的迹 $K^a = g^{\mu\nu} K^a_{\mu\nu}$ 是

$$K^1 = \frac{1}{2f^2 g_{\theta\theta} g_{\varphi\varphi}^3 H^2 (g^{rr})^{3/2}} \Big(g_{\theta\theta} g_{\varphi\varphi}^2 g_{t\varphi}^2 g^{rr} \frac{\partial f}{\partial r} - f(1 - H)^2 g_{\theta\theta} g_{\varphi\varphi}^3 (g^{rr})^2 \frac{\partial f}{\partial r}$$

$$+ 2g_{00}g_{\varphi\varphi}^3 g_{t\varphi}g^{rr}\tilde{\Omega}\frac{\partial f}{\partial r} + g_{00}g_{\varphi\varphi}^4 g^{rr}\tilde{\Omega}^2\frac{\partial f}{\partial r} - f^2 g_{\varphi\varphi}^3 H^2 (g^{rr})^2\frac{\partial g_{00}}{\partial r}$$

$$+ g_{00}g_{t\varphi}^4\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} - f(1-2H)g_{00}g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}^2 g^{rr}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} - f^2 g_{00}g_{\varphi\varphi}^2 H^2 (g^{rr})^2\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}$$

$$+ 2g_{00}g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}^3\tilde{\Omega}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} + f(1-2H)g_{00}g_{\varphi\varphi}^3 g^{rr}\tilde{\Omega}^2\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} - 2g_{00}g_{\varphi\varphi}^3 g_{t\varphi}\tilde{\Omega}^3\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}$$

$$- g_{00}g_{\varphi\varphi}^4\tilde{\Omega}^4\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} - 2g_{00}g_{\varphi\varphi}g_{t\varphi}^3\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r} + 2f(1-2H)g_{00}g_{\varphi\varphi}^2 g_{t\varphi}g^{rr}\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r}$$

$$- 6g_{00}g_{\varphi\varphi}^2\tilde{\Omega}\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r} + 2f(1-2H)g_{00}g_{\varphi\varphi}^3 g^{rr}\tilde{\Omega}\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r} - 6g_{00}g_{\varphi\varphi}^3 g_{t\varphi}\tilde{\Omega}^2\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r}$$

$$- 2g_{00}g_{\varphi\varphi}^4\tilde{\Omega}^3\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r} + fg_{00}g_{\varphi\varphi}^2 g_{t\varphi}^2\frac{\partial g^{rr}}{\partial r} - f^2 g_{00}g_{\varphi\varphi}^3 g^{rr}\frac{\partial g^{rr}}{\partial r} + 2f^2 g_{00}g_{\varphi\varphi}^3 H g^{rr}\frac{\partial g^{rr}}{\partial r}$$

$$\left. - f^2 g_{00}g_{\varphi\varphi}^3 H^2 g^{rr}\frac{\partial g^{rr}}{\partial r} + 2fg_{00}g_{\varphi\varphi}^3 g_{t\varphi}\tilde{\Omega}\frac{\partial g^{rr}}{\partial r} + fg_{00}g_{\varphi\varphi}^4\tilde{\Omega}^2\frac{\partial g^{rr}}{\partial r}\right],$$

$$K^2 = 0 \tag{B9}$$

由方程(B6),(B7),(B8)和(B9)给出的量在视界面上都为零(在邻近视界处各量都与 $\sqrt{g^{rr}}$ 成比例). 由以上的讨论我们得到,在视界面上

$$K^a K^a = 0,$$
$$\mathrm{tr}(K.K) = K^a_{\mu\nu}K^{\mu\nu}_a = 0. \tag{B10}$$

附录 C　Carlip 边界条件

为了完整和方便起见,我们列出 Carlip 边界条件.

要用协变相空间技术在黑洞的 Killing 视界上建立起 Virasoro 代数,就得考虑各量在视界邻域中的变分. 为此,Carlip 定义了一个“延伸视界”

$$\chi^2 = \epsilon. \tag{C1}$$

式中 $\chi^2 = g_{ab}\chi^a\chi^b$, χ^a 是 Killing 矢量, ϵ 为小量. 所有计算结果都通过取 ϵ 趋于零而定值于黑洞的事件视界. 在“延伸视界”附近,引入与 χ^a 的轨道正交的矢量 ρ_a.

$$\nabla_a\chi^2 = -2\kappa\rho_a. \tag{C2}$$

式中 κ 是表面引力. 矢量 ρ_a 满足如下关系

$$\chi^a\rho_a = -\frac{1}{\kappa}\chi^a\chi^b\nabla_a\chi_b = 0,\quad (\text{任意处})$$
$$\rho^a \to \chi^a,\quad (\text{视界上}) \tag{C3}$$

为了保持视界处的“渐近”结构,我们引入以下边界条件

$$\delta\chi^2 = 0,$$

$$\chi^a t^b \delta g_{ab} = 0,$$

$$\delta\rho_a = -\frac{1}{2\kappa}\nabla_a(\delta\chi^2) = 0,\ 在\ \chi^2 = 0, \tag{C4}$$

式中 t^a 是与时空 M 的边界 ∂M 相切的任意类空单位矢量. 表面形变矢量取为

$$\xi^a = \mathscr{R}\rho^a + \mathscr{T}\chi^a, \tag{C5}$$

式中函数 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{T}$ 满足条件

$$\mathscr{R} = \frac{1}{\kappa}\frac{\chi^2}{\rho^2}\chi^a\nabla_a\mathscr{T},$$

$$\rho^a\nabla_a\mathscr{T} = 0, \tag{C6}$$

$\tilde{\kappa}$ 的平均值$\left(\tilde{\kappa} = -\dfrac{a^2}{\chi^2}, a^a = \chi^b\nabla_b\chi^a\ \ \chi^a 是\ \chi^a\ 的轨道加速度\right)$可通过(C7)式求出

$$\delta\int_{\partial C}\hat{\epsilon}\left(\tilde{\kappa} - \frac{\rho}{|\kappa|}\kappa\right) = 0, \tag{C7}$$

式中 $\hat{\epsilon}$ 是 $\mathscr{H}$ 上的诱导体积元($\mathscr{H}$ 为 Cauchy 曲面 C 与 Killing 视界面 $\chi^2 = 0$ 相交的 $(n-2)$ 维截面). 条件(C7)的作用是保证存在生成元 $H[\xi]$. 对于满足条件 $D\mathscr{T}_\alpha = \lambda_\alpha\mathscr{T}_\alpha(D\equiv\chi^a\partial_a)$ 的微分同胚单参数群,方程(C7)变成正交条件

$$\int_{\partial C}\hat{\epsilon}\mathscr{T}_\alpha\mathscr{T}_\beta \sim \delta_{\alpha+\beta}. \tag{C8}$$

利用将来取向的零矢量

$$N^a = \kappa^a - \alpha\chi^a - t^a, \tag{C9}$$

其中 $\kappa^a = -\dfrac{1}{\chi^2}\left(\chi^a - \dfrac{|\chi|}{\rho}\rho^a\right)$,以及条件 $N_a\chi^a = -1$,可以把体积元写为

$$\epsilon_{bca_1\cdots a_{n-2}} = \hat{\epsilon}_{a_1\cdots a_{n-2}}(\chi_b N_c - \chi_c N_b) + \cdots, \tag{C10}$$

忽略的项对积分没有贡献.

第 6 章　黑洞的量子效应

6.1　粒子对的自发产生过程

Zeldovich(1972),Starobinsky(1973)和 Unruh(1974)研究了稳态时空中粒子对的产生过程.

弯曲时空中自旋为零的荷电粒子的克莱因－戈尔登方程具有形式

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}-\mathrm{i}\varepsilon A_{\mu}\right)\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}-\mathrm{i}\varepsilon A_{\nu}\right)\right]\phi(x)-\mu^{2}\phi(x)=0. \quad (6.1.1)$$

考虑稳态时空背景,将克尔–纽曼度规代入,上式可写为

$$\left\{\partial_r\Delta\partial_r-\frac{1}{\Delta}\left[(r^2+a^2)\partial_t+a\partial_\varphi+\mathrm{i}Q\varepsilon r\right]^2-\mu^2r^2+\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\sin\theta\partial_\theta\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi+a\sin\theta\partial_t\right)^2-\mu^2a^2\cos^2\theta\right\}\varphi=0. \quad (6.1.2)$$

此方程可分离变量. 令

$$\varphi=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m\varphi-\omega t)}\chi^{(\theta)}\psi^{(r)}, \quad (6.1.3)$$

得到

$$\left[-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}+\left(\frac{m}{\sin\theta}-a\omega\sin\theta\right)^2+\mu^2a^2\cos^2\theta\right]\chi=K\chi, \quad (6.1.4)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}z^2}=-V\psi. \quad (6.1.5)$$

式中,

$$V=\Delta(\mu^2r^2+K)-\left[\omega(r^2+a^2)-am-Q\varepsilon r\right]^2, \quad (6.1.6)$$

$$\mathrm{d}z=-\mathrm{d}r/\Delta. \quad (6.1.7)$$

由(6.1.5)式知 $V>0$ 是禁区,我们有 $V<0$,或

$$\left[\omega(r^2+a^2)-am-Q\varepsilon r\right]^2-\Delta(\mu^2r^2+K)\geqslant 0. \quad (6.1.8)$$

在禁区内 $V>0$,可把有效势 V 看做势垒. 为了看清这一点,可引入 Tortoise 坐标

$$\frac{\mathrm{d}r^*}{\mathrm{d}r}=\frac{r^2+a^2}{\Delta}.$$

此时视界为

$$r^*=-\infty,\quad V\to-(\omega-m\Omega)^2,$$

空间无限远处为

$$r^*=\infty,\quad V\to-\omega^2,$$

中间为 $V>0$. 所以 V 为具有一定宽度的势垒.

下面计算自真空中的粒子产生率. 利用量子场论中入射态和出射态的概念,设外场局限于时空范围 Ω 内,入射态和出射态分别为 Ω 的过去无限大和将来无限大的态. 分别以

$$P_i^{in}(x) \text{ 和 } n_i^{in}(x) \equiv (P_i^{in}(x))^*$$

表示入射正能态和负能态,则它们组成一正交归一的完备集

$$\begin{aligned}(P_i^{in}, P_k^{in}) &= \delta_{ik} = \pm(n_i^{in}, n_k^{in}),\\ (P_i^{in}, n_k^{in}) &= 0.\end{aligned} \tag{6.1.9}$$

式中正负号分别对应于费米子和玻色子.

任意场函数可以展开为

$$\varphi(x) = \sum_i [a_i^{in} P_i^{in}(x) + (a_i^{in})^+ n_i^{in}(x)], \tag{6.1.10}$$

其中 a_i^{in} 和$(a_i^{in})^+$分别是入射正能粒子的湮没算符和产生算符. 它们满足下述量子条件:

$$[a_i^{in}, (a_i^{in})^+]_\pm = \delta_{ik}. \tag{6.1.11}$$

我们定义入射真空态$|in>_{vac}$为

$$a_i^{in} | in >_{vac} = 0, \forall i. \tag{6.1.12}$$

由此可得 $a_i^+ a_i | in >_{vac} = 0$, 即 $N_i^{in} | in >_{vac} = 0$, $\forall i$. N_i^{in} 为入射正能粒子数算符. 所以,(8.9.12)式意味着入射真空态不含入射正能粒子.

完全类似,我们也可以定义

$$P_i^{out}(x), n_i^{out}(x) \text{ 和 } | out >_{vac}.$$

所谓真空中产生粒子,即入射真空态$|in>_{vac}$中包含出射粒子,

或

$$n_i = {}_{vac}< in | (a_i^{out})^+ a_i^{out} | in >_{vac} \neq 0, \tag{6.1.13}$$

其中 n_i 代表平均粒子数.

由

$$\varphi = \sum_i [a_i^{in} p_i^{in} + (a_i^{in})^+ n_i^{in}] = \sum_i [a_i^{out} p_i^{out} + (a_i^{out})^+ n_i^{out})],$$

两边同乘以$(p_i^{out})^+$并利用(8.9.9)式可得

$$a_i^{out} = \sum_k [(p_i^{out}, p_k^{in}) a_k^{in} + (p_i^{out}, n_k^{in})(a_k^{in})^+], \tag{6.1.14}$$

$$(a_i^{out})^+ = \sum_k [(p_i^{out}, p_i^{in})^+ (a_k^{in})^+ + (p_i^{out}, n_k^{in})^+ a_k^{in}].$$

引入

$$\alpha_{ik} \equiv (p_i^{out}, p_k^{in}), \quad \beta_{ik} \equiv (p_i^{out}, n_k^{in}), \tag{6.1.15}$$

(6.1.14)和(6.1.15)两式便简写为

$$a_i^{out} = \sum_k (\alpha_{ik} a_k^{in} + \beta_{ik} a_k^{in+}),$$

$$(a_i^{out})^+ = \sum_k [\alpha_{ik}^* (a_k^{in})^+ + \beta_{ik}^* a_k^{in}]. \tag{6.1.16}$$

这就是 Bogoliubov 变换.

不难得出

$$p_i^{out} = \sum_k [\alpha_{ik} p_k^{in} + \beta_{in} n_k^{in}],$$

$$n_k^{in} = \sum_i [\beta_{ik} p_i^{out} + \alpha_{ik} n_i^{out}]. \tag{6.1.17}$$

式中 β_{ik} 叫正负频混合系数.

由(6.1.16)式知(6.1.13)式中的 n_i 为

$$n_i = \sum_k \beta_{ik}^* \cdot \beta_{ik} = \sum_k |\beta_{ik}|^2 = \sum_k |(p_i^{out}, n_k^{in})|^2. \tag{6.1.18}$$

可见,自真空中产生粒子,或入射真空中包含出射粒子的关键是出现正负频的混合.

在弯曲时空中,只要我们能定义正负频解,就能定义产生和湮没算符,就能定义真空,而只要两套不同的真空出现正负频混合,就可以自真空中产生粒子.

在目前所考虑的 Klein 机制中,正负频混合系数为

$$\beta_{ik} = (p_i^{out}, n_k^{in}),$$

正好就是透射率幅:

$$T_{ik} = (p_i^{out}, n_k^{in}). \tag{6.1.19}$$

因此在 Klein 机制中,强静电场引起正负能级的交错是产生正负频混合的原因.

(5.9.19)式中 $|T_{ik}|^2 = |\beta_{ik}|^2$ 与自真空中以“k”标志的入射负能态 n_k^{in} 产生以“i”标志的出射正能态 p_i^{out} 的平均粒子数成正比,而所产生的平均总粒子数为

$$N = \sum_i n_i \sim \sum_{i,k} |T_{ik}|^2, \tag{6.1.20}$$

式中“i”,“k”等表示一组完备量子数集合.

考虑到守恒律的限制

$$T_{ik} = T_i \delta_{ik} = T_{\omega_i \alpha_i} \delta(\omega_i - \omega_k) \delta_{\alpha_i \alpha_k},$$

其中 ω 表示初态或末态的能量,α 表示初态或末态的分立量子数,则

$$n_i \sim |T_{ik}|^2 = |T_i|^2 = |T_{\omega_i \alpha_i}|^2 [\delta(\omega_i - \omega_k)]^2,$$

$$N = \sum_i n_i \sim \sum_{i,k} \left| T_{\omega_i \alpha_i} \right|^2 \delta(\omega_i - \omega_k) \frac{1}{2\pi} \int e^{i(\omega_i - \omega_k)t} dt$$

$$= \sum_{i,k} \left| T_{\omega_i \alpha_i} \right|^2 \delta(\omega_i - \omega_k) \frac{1}{2\pi} \int dt,$$

故

$$\frac{dN}{dt} \sim \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d\omega_i \int d\omega_k \sum_{ki} \left| T_{\omega_i \alpha_i} \right|^2 \delta(\omega_i - \omega_k) \frac{1}{2\pi}$$

$$= \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d\omega \sum_i \frac{1}{2\pi} \left| T_{\omega_i \alpha_i} \right|^2. \tag{6.1.21}$$

对于克尔-纽曼时空,作类似处理,可以得到黑洞外粒子对的产生率:

$$\frac{dN}{dt} = \int \frac{d\omega}{2\pi} \sum_{m,k} \left| T \right|^2_{\omega,m,k}. \tag{6.1.22}$$

用 WKB 近似法,可以计算

$$\xi = 2 \int V^{1/2} dz, \tag{6.1.23}$$

$$| T^2 | = e^{-\xi},$$

式中积分沿势垒. 引入局部正交标架 ω_μ:

$$d\omega^\mu = \alpha^\mu_\nu dx^\nu,$$

$$(\alpha^\mu_\nu) = \begin{bmatrix} \frac{\Delta^{1/2}}{\rho} & 0 & 0 & -\left(\frac{\Delta^{1/2}}{\rho} a \sin^2\theta\right) \\ 0 & \frac{\rho}{\Delta^{1/2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 \\ -\sin\theta \frac{a}{\rho} & 0 & 0 & \sin\theta \frac{r^2 + a^2}{\rho} \end{bmatrix} \tag{6.1.24}$$

此时克尔-纽曼度规具有形式

$$ds^2 = -d\omega_0^2 + d\omega_1^2 + d\omega_2^2 + d\omega_3^2,$$

式中,

$$d\omega^0 = \frac{\Delta^{1/2}}{\rho} (dt - a \sin^2\theta d\varphi),$$

$$d\omega^1 = \frac{\rho}{\Delta^{1/2}} dr,$$

$$d\omega^2 = \rho d\theta,$$

$$d\omega^3 = \sin\theta \cdot \frac{1}{\rho} [(r^2 + a^2) d\varphi - a dt]. \tag{6.1.25}$$

由于

$$a = \rho^2 \sin\theta, \alpha = | \alpha_\nu^\mu |,$$

我们得到

$$(\alpha_\nu^\mu) = \begin{bmatrix} \frac{r^2 + a^2}{\Delta^{1/2}\rho} & 0 & 0 & \frac{a\sin\theta}{\rho} \\ 0 & \frac{\Delta^{1/2}}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ \frac{a}{\Delta^{1/2}\rho} & & & \frac{1}{\rho\sin\theta} \end{bmatrix} \tag{6.1.26}$$

于是在正交标架中有

$$F_{\mu\nu} = \alpha_{\mu'}^\tau \alpha_{\nu'}^\sigma F_{\tau\sigma}. \tag{6.1.27}$$

电场和磁场的分量分别为

$$E_1 = e\rho^{-4}(r^2 - a^2\cos^2\theta),$$

$$B_1 = e\rho^{-4} 2ar\cos\theta. \tag{6.1.28}$$

$$E_0 = E_2 = E_3 = B_0 = B_2 = B_3 = 0.$$

此式表明,电场和磁场互相平行,这是引入上述局部标架的结果.

在局部时空范围内,我们采用平直时空近似和均匀电磁场近似.在这种近似条件下,海森伯和欧勒早就指出,波函数可以由分离变量法求得.自旋为1/2的解具有形式

$$\varphi = e^{i(k_x x - \omega t)} u_n[(\varepsilon B)^{1/2}(y^2 + k_x/\varepsilon B)]\psi(z), \tag{6.1.29}$$

式中 u_n 为 n 阶谐振子的波函数,$\psi(z)$ 满足方程

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (\xi^2 - \lambda)\psi = 0, \tag{6.1.30}$$

$$\xi = \pi\mu \frac{2}{\varepsilon E_1} + 2\pi\left(n + \frac{1}{2} + \sigma_1\right)\frac{B_1}{E_1}. \tag{6.1.31}$$

透射率

$$T^2 = e^{-\xi}, \tag{6.1.32}$$

在 $n = 0, \sigma = -1/2$ 时最大,

$$u_n = N_n H_n(\alpha\xi)\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2\xi^2\right). \tag{6.1.33}$$

$n = 0$ 时,对应谐振子的基态或粒子只有沿 ω_1 方向的运动,$\sigma = -\frac{1}{2}$表示透射的费米子流是极化的,分支比

$$\frac{\Gamma_{-1/2}^2}{\Gamma_{1/2}^2} = \exp(-2\pi B_1/E_1).$$

自旋为 1/2 的费米子,所产生的总粒子对数为

$$N = \int \sqrt{g}\mathrm{d}^4 x \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon E_1}{\pi}\right)^2 \frac{\pi B_1/E_1}{\mathrm{th}(\pi B_1/E_1)}\exp(-\pi\mu^2/\varepsilon E_1), \tag{6.1.34}$$

式中

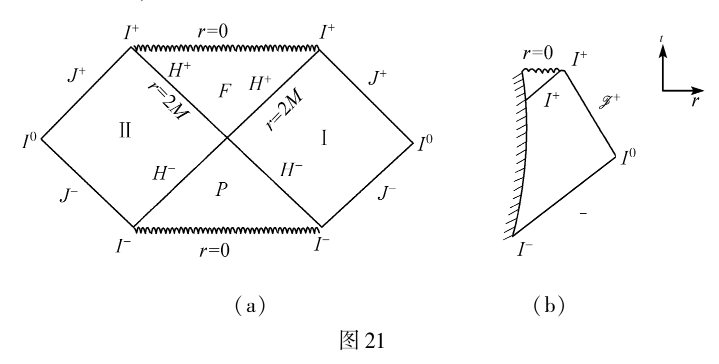
$$g = \rho^4 \sin^2\theta. \tag{6.1.35}$$

6.2　霍金辐射

霍金(1974)发现,黑洞像一个黑体一样,具有温度 $T_B = \dfrac{\bar{h}\kappa}{ck}$ 标志的热辐射. 霍金计算的是一颗坍缩的恒星正在形成黑洞时的量子效应. 后来人们进一步研究发现,完成坍缩后的永久黑洞以及任何一个具有未来世界的静态和稳态时空都具有完全相同的霍金辐射.

下面就介绍霍金所做的推导.

图 21(a)所示为一已完成坍缩的施瓦西黑洞的 Penrose 图,零无限远 J^+ 和 J^- 是渐近闵可夫斯基区. 对 Ⅰ 区来说,可以选择 $J^- \cup I^- \cup H^-$ 为 Cauchy 面. 图(b)表示坍缩中的黑洞(施瓦西黑洞),阴影部分为坍缩星体占据的部分. 此时 Ⅰ 区的 Cauchy 面是 $I^- \cup J^-$,而 J^+ 和 J^- 仍为渐近闵可夫斯基区.



(a)　　　　(b)

图 21

设 $\mathscr{J}^-$ 处($t=-\infty, r=+\infty$)的入射标量波的正、负频解为

$$f_{\omega lm}(r,\theta,\varphi,t), \quad f^*_{\omega lm}(r,\theta,\varphi,t).$$

任一标量波函数可如下展开:

$$\varphi(x) = \sum_{l,m}\int \mathrm{d}\omega(a_{\omega lm}f_{\omega lm} + a^+_{\omega lm}f^*_{\omega lm}). \tag{6.2.1}$$

入射真空 $|0>_{in}$ 的定义为

$$a_{\omega lm}|0>_{in} = 0$$

$$\forall \omega, l, m, \tag{6.2.2}$$

在 $t = +\infty$ 时的出射标量波可在 $\mathscr{I}^+$ $(t = +\infty, r = +\infty)$ 和 H^+ $(t = +\infty, r = 2m)$ 两处出现，故 $t = +\infty$ 时的正、负频解分别为

$$(p_{\omega lm}, p^*_{\omega lm})\ \mathscr{I}^+\ 处, (q_{\omega lm}, q^*_{\omega lm})\ H^+\ 处.$$

任一标量波函数可展开为

$$\varphi(x) = \sum_{l,m} \int d\omega \left(b_{\omega lm} p_{\omega lm} + b^+_{\omega lm} p^*_{\omega lm} + c_{\omega lm} q_{\omega lm} + c^+_{\omega lm} q^*_{\omega lm} \right). \tag{6.2.3}$$

现在我们感兴趣的是要去计算正负频混合系数

$$\beta_{\omega lm; \omega' lm} = (p_{\omega lm} f^*_{\omega lm}), \tag{6.2.4}$$

及入射真空中所含出射粒子数

$$\underset{in}{<} 0 \mid N^{out}_{\omega ln} \mid 0 \underset{in}{>} = \underset{in}{<} 0 \mid b^+_{\omega lm} b_{\omega lm} \mid 0 \underset{in}{>} = \int d\omega' \mid \beta_{\omega lm; \omega' lm} \mid^2. \tag{6.2.5}$$

为了简单，我们讨论无质量标量粒子的产生.

坍缩星的终态对应的外部度规为施瓦西外部度规

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \tag{6.2.6}$$

在无质量标量场的情况下，可以用分离变量法解克莱因-戈尔登方程

$$\Delta_\mu \Delta^\mu_\varphi = 0. \tag{6.2.7}$$

令

$$\varphi(r, \theta, \varphi, t) \sim r^{-1} R_{\omega l}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) e^{i\omega t}, \tag{6.2.8}$$

则得到径向方程

$$\frac{d^2}{dr^{*2}} R_{\omega l} + \left\{ \omega^2 - [l(l+1)r^{-2} + 2mr^{-3}] \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \right\} R_{\omega l} = 0, \tag{6.2.9}$$

式中

$$r^* \equiv r + 2m\ln \left| \frac{r}{2m} - 1 \right|, \tag{6.2.10}$$

为 Tortoise 坐标.

引入有效势

$$V \equiv [l(l+1)r^{-2} + 2mr^{-3}](1 - 2mr^{-1}),$$

$$H \equiv \omega^2,$$

则(6.2.9)式可写为

$$\frac{d^2}{dr^{*2}} R_{\omega l} + (H - V) R_{\omega l} = 0. \tag{6.2.11}$$

当 $r \to \infty$ $(r^* \to \infty)$ 时，$V \to 0$，于是得到解

$$P_{\omega lm} = r^{-1} \exp(-i\omega u) Y_{lm}, \quad 出射波; \tag{6.2.12}$$

$$f_{\omega lm} = r^{-1} \exp(-i\omega v) Y_{lm}, \quad 入射波, \tag{6.2.13}$$

式中

$$u = t - r^*, v = t + r^*,$$

为双零(类光)坐标. 在这一坐标系中,施瓦西度规具有形式:

$$ds^2 = (1 - 2mr^{-1})\,du\,dv - r^2 d\Omega^2. \tag{6.2.14}$$

从 $\mathscr{I}^-$ 来的入射波 $f_{\omega lm}$ 沿着零短程线 $v = \text{const.}$ 传播,经过坍缩星中心,然后“反射”,沿着 $u = \text{const.}$ 到达 $\mathscr{I}^+$,变成出射波 $p_{\omega lm}$(如图 22).

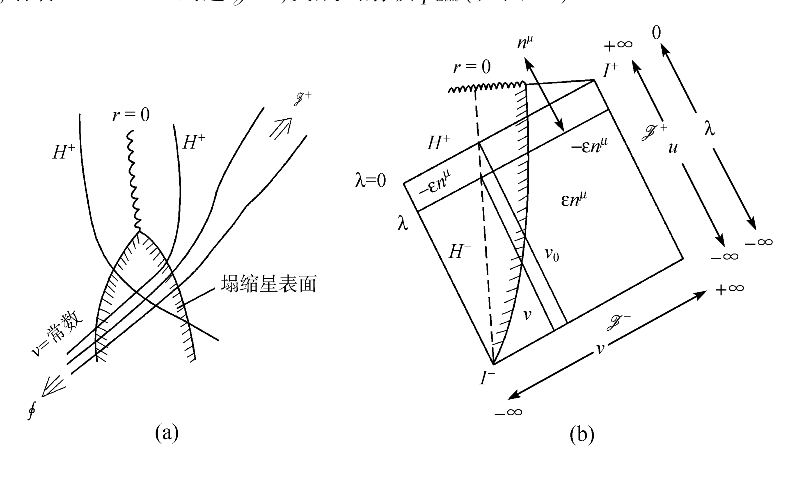


图 22

由于星体的坍缩将引起出射波有一甚大的红移,因此入射波 $f_{\omega' lm}$ 应有一甚高的频率 ω',这样我们就可采用几何光学近似以讨论上述“反射”过程.

现在我们希望找出函数关系

$$u = u(v).$$

令 $v = v_0$ 是投射在坍缩星上而变为 H^+ 的入射线路径,显然所有晚于 v_0($v > v_0$)的入射线都不可能被“反射”出来,只有早于 v_0($v < v_0$)的入射线才可能被“反射”以形成出射线. 在 H^+ 某点作一指向未来的零矢 $\boldsymbol{n}^\mu$,设 $-\varepsilon\boldsymbol{n}^\mu$($\varepsilon$ 是一小正数)是联结此点与一大 u 值的邻近世界线的矢量,划出完整的 Penrose 图,把矢量 $-\varepsilon\boldsymbol{n}^\mu$ 沿 H^+ 平行移位到 H^+ 与 H^- 的交点处,此时矢量 $-\varepsilon\boldsymbol{n}^\mu$ 整个在 H^-,取 $\lambda = -ce^{-\kappa u}$ $\left(c > 0, \kappa = \dfrac{1}{4m}\right)$ 为 H^- 上的母线的仿射参量,在交点引入该点的局部惯性系,则在交点,$\lambda = 0$, $d\boldsymbol{x}^\mu / d\lambda = \boldsymbol{n}^\mu$,

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}^\mu}{d\lambda^2} = \frac{d\boldsymbol{n}^\mu}{d\lambda} = 0.$$

这表明,在 $\lambda = 0$ 的邻域, $\boldsymbol{n}^\mu$ 是一个常矢量,因而 H^- 上矢量 $-\varepsilon\boldsymbol{n}^\mu$ 的长度即

$$-\varepsilon\boldsymbol{n}^{\mu}=\int_0^{\lambda}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{\mu}}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda=\boldsymbol{n}^{\mu}\cdot\lambda=\boldsymbol{x}^{\mu}(\lambda)-\boldsymbol{x}^{\mu}(0).$$

由此得　$\varepsilon = c\mathrm{e}^{-\kappa u}$.

现在把矢量 $-\varepsilon\boldsymbol{n}^{\mu}$ 移回原位置,然后把它平移到 H^{+} 与 v_0 的交点,再沿 v_0 平移到极早时的大 r 处,由于平移时矢量与短程线间的角度不变,所以矢量 $-\varepsilon\boldsymbol{n}^{\mu}$ 将如图22所示的把 v_0 与某个 v 联结起来,即

$$v-v_0=-\varepsilon n^{\mu}.$$

在 $r=+\infty$,时空平直,光线的切矢 $\boldsymbol{n}^{\mu}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{\mu}}{\mathrm{d}\lambda}$为一常数 D,即

$$v-v_0=-\varepsilon D=-cD\mathrm{e}^{-\kappa u}.$$

故

$$u=u(v)=-4m\ln\left(\frac{v_0-v}{cD}\right).\tag{6.2.15}$$

可把出射波

$$P_{\omega lm}=N\omega^{-1/2}r^{-1}\exp(\mathrm{i}\omega u)Y_{lm}$$

改写为

$$P_{\omega lm}=N\omega^{-1/2}r^{-1}\exp\left[\mathrm{i}4m\omega\ln\left(\frac{v_0-v}{cD}\right)\right]Y_{lm},$$

$$N=2^{-3/2}\cdot\pi^{-1}\quad(v<v_0),$$

$$N=0\quad(v>v_0).$$

由

$$P_{\omega lm}=\int\mathrm{d}\omega'(\alpha_{\omega lm;\omega' lm}f_{\omega' lm}+\beta_{\omega lm;\omega' lm}f^{*}_{\omega' lm})$$

可得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}v\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega' v}P_{\omega lm}=N\omega'^{-1/2}r^{-1}Y_{lm}\alpha_{\omega lm;\omega' lm},$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}v\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' v}P_{\omega lm}=N\omega'^{-1/2}r^{-1}Y_{lm}\beta_{\omega lm;\omega' lm},$$

故

$$\alpha_{\omega lm;\omega' lm}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{v_0}\mathrm{d}v\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega' v}\exp\left[\mathrm{i}4m\omega\ln\frac{v_0-v}{CD}\right],\tag{6.2.16}$$

$$\beta_{\omega lm;\omega' lm}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{v_0}\mathrm{d}v\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' v}\exp\left[\mathrm{i}4m\omega\ln\frac{v_0-v}{CD}\right],\tag{6.2.17}$$

显然

$$\beta_{\omega\omega'}=-\mathrm{i}\alpha_{\omega(-\omega')}\tag{6.2.18}$$

成立,$\alpha_{\omega(-\omega')}$ 可看做是把 $\alpha_{\omega\omega'}$ 延拓到负 ω' 轴上的结果,但

$$\begin{aligned}\alpha_{\omega\omega'} &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{v_0} \mathrm{d}v \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega' v}\left(\frac{v_0 - v}{CD}\right)^{\mathrm{i}\frac{\omega}{\kappa}} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2}\left(\frac{v_0}{CD}\right)^{\mathrm{i}\frac{\omega}{\kappa}}\int_{-\infty}^{v_0} \mathrm{d}v \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega' v}\left(1 - \frac{v}{v_0}\right)^{\mathrm{i}\frac{\omega}{\kappa}} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2}\left(\frac{v_0}{CD}\right)^{\mathrm{i}\frac{\omega}{\kappa}} 2\pi(-\omega')^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{\kappa}-1}\mathrm{e}^{\omega}/\Gamma\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{\kappa}\right). \qquad (6.2.19)\end{aligned}$$

注意,为了使积分收敛,我们进行了代换

$$\omega' \to \omega' \to \mathrm{i}\epsilon.$$

$\omega' = 0$ 是一个奇点,为了把 ω' 从正值解析延拓到负值,我们必须沿下半复 ω' 平面内的半圆周延拓过去(图 23),即

$$\omega' \to \omega' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi},$$

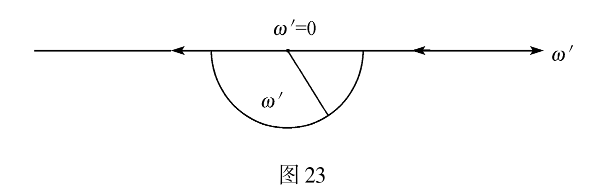


图 23

故

$$\alpha_{\omega(-\omega')} = -\mathrm{i}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi})^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{\kappa}-1}\alpha_{\omega\omega'} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\pi\frac{\omega}{\kappa}}\alpha_{\omega\omega'}, \qquad (6.2.20)$$

$$\beta^*_{\omega\omega'}\beta_{\omega\omega'} = \mathrm{e}^{-2\pi\frac{\omega}{\kappa}}\alpha^*_{\omega\omega'}\alpha_{\omega\omega'}.$$

由

$$(p_\omega p_\omega) = 1$$

得

$$\int \mathrm{d}\omega'[(\alpha\alpha^*)_{\omega\omega'} - (\beta^*\beta)_{\omega\omega'}] = 1.$$

即

$$\langle N_{\omega lm}\rangle = \int \mathrm{d}\omega' |\beta_{\omega\omega'}|^2 = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{\omega}{\kappa T}} - 1}, \qquad (6.2.21)$$

式中

$$T = \frac{\hbar\kappa}{2\pi kc}.$$

此即著名的霍金辐射公式.

在一般情况下,可以证明,任一具有未来视界的静态或稳态时空均具有霍金热辐射.

霍金辐射的发现,不仅解决了黑洞热力学中存在的矛盾,而且揭示了引力理论、热力学和量子理论之间的联系.

当黑洞温度总比周围环境的温度高时,黑洞将不断向外辐射,失去其质量,最后可能“爆炸”消失.下面我们就来讨论黑洞的寿命.

由于霍金公式和普朗克公式相似,故可利用斯特藩-玻尔兹曼公式估算黑洞的放能率和寿命.

根据斯特藩-玻尔兹曼定律,我们有

$$\frac{dE}{dtdA} = \sigma T^4, \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2},$$

$$A = 16\pi G^2 c^{-4} M^2.$$

由此得到放能率

$$\frac{dE}{dt} \approx 10^{46} M^{-2} \cdot \Gamma(\mathrm{erg/s}), \tag{6.2.22}$$

式中 Γ 为势垒穿透率,可近似地取为1.

质量为 M 的黑洞,其寿命为

$$\tau \approx 10^{-27} M^3(\mathrm{s}) \approx 10^{10}\left[\frac{M}{M_\odot}\right]^3(\text{年}). \tag{6.2.23}$$

若设 $M = M_\odot$,则 $T \approx 10^{-6}(\mathrm{K})$,放能率为

$$\frac{dE}{dt} \approx 10^{-20}(\mathrm{erg/s}),$$

寿命为

$$\tau \approx 10^{68}(\text{年}).$$

如果按这样的速度减少质量,这样的恒星在宇宙诞生至今这么长时间里质量只减少 10^{-22} g.这是完全可以忽略不计的.

如果设 $M < 10^{15}$ g(微黑洞),比如设

$$M = 3 \times 10^9 \mathrm{g} \approx 3000(\mathrm{T}),$$

$$T \approx 10^{18}(\mathrm{K}),$$

则放能率为

$$\frac{dE}{dt} \approx 10^{29}(\mathrm{erg/s}) = 10^{22}(\mathrm{W}),$$

寿命

$$\tau \approx 10^{-1}(\mathrm{s}).$$

对于 $M \approx 10^{15}(\mathrm{g})$ 的所谓原初小黑洞,有

$$T \approx 10^{12}(\mathrm{K}),$$

$$\frac{dE}{dt} \approx 10^{16}(\text{erg/s}) = 10^{9}(\text{W}),$$

$$T \approx 10^{10}(\text{年}). \tag{6.2.24}$$

由于宇宙极早期物质密度的涨落,有可能形成原初小黑洞和微黑洞.如果确有许多这类小黑洞,由(6.2.24)式可知,目前应能观测到它们的晚期爆炸(死亡).

6.3 静态和稳态黑洞的量子辐射

1. 静态黎曼时空中狄拉克粒子的辐射

在静态时空中有 $g_{0i}=0$,我们讨论已经通过适当坐标变换使度规对角化了的情况:

$$ds^2 = a_0^2 dt^2 - a_1^2 dx^2 - a_2^2 dy^2 - a_3^2 dz^2. \tag{6.3.1}$$

由此我们构造零标架:

$$l_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_0, -a_1, 0, 0), n_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_0, -a_1, 0, 0),$$

$$m_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, a_2, \mathrm{i}a_3), \bar{m}_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, a_2, -\mathrm{i}a_3). \tag{6.3.2}$$

从而得到 Newman-Penrose 旋系数:

$$\kappa = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{a_0a_2}\frac{\partial}{\partial y}a_0 - \frac{1}{a_1a_2}\frac{\partial}{\partial y}a_1 + \frac{\mathrm{i}}{a_0a_3}\frac{\partial}{\partial z}a_0 - \frac{\mathrm{i}}{a_1a_3}\frac{\partial}{\partial z}a_1\right),$$

$$\pi = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{a_0a_2}\frac{\partial}{\partial y}a_0 + \frac{1}{a_1a_2}\frac{\partial}{\partial y}a_1 - \frac{\mathrm{i}}{a_0a_3}\frac{\partial}{\partial z}a_0 - \frac{\mathrm{i}}{a_1a_3}\frac{\partial}{\partial z}a_1\right),$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{a_0a_1}\frac{\partial}{\partial x}a_0,$$

$$\rho = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{a_1a_2}\frac{\partial}{\partial x}a_2 + \frac{1}{a_1a_3}\frac{\partial}{\partial x}a_3\right),$$

$$\lambda = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{a_1a_2}\frac{\partial}{\partial x}a_2 - \frac{1}{a_1a_3}\frac{\partial}{\partial x}a_3\right),$$

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{a_2a_3}\frac{\partial}{\partial x}a_3 - \frac{\mathrm{i}}{a_2a_3}\frac{\partial}{\partial z}a_2\right),$$

$$\sigma = \lambda, \quad \mu = \rho, \quad \beta = -\bar{\alpha}, \quad \nu = -\bar{\kappa}, \quad \tau = -\bar{\pi}, \quad \gamma = \varepsilon. \tag{6.3.3}$$

旋坐标形式的狄拉克粒子场方程具有形式:

$$\nabla_{AB}P^A + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\mu\bar{Q}_B = 0,$$

$$\nabla_{AB}Q^{A}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\mu\bar{P}_{B}=0. \tag{6.3.4}$$

由(6.3.2)~(6.3.4)式可以得到

$$\left[\frac{1}{a_0}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{a_1}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{2a_1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln a_0a_2a_3\right)\right]F_1+\left[-\frac{1}{a_2}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\mathrm{i}}{a_3}\frac{\partial}{\partial z}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2a_2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln a_0a_1a_3\right)+\frac{\mathrm{i}}{2a_3}\left(\frac{\partial}{\partial z}\ln a_0a_1a_2\right)\right]F_2-\mathrm{i}\mu G_1=0,$$

$$\left[\frac{1}{a_0}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{a_1}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2a_1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln a_0a_2a_3\right)\right]F_2+\left[-\frac{1}{a_2}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\mathrm{i}}{a_3}\frac{\partial}{\partial z}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2a_2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln a_0a_1a_3\right)-\frac{\mathrm{i}}{2a_3}\left(\frac{\partial}{\partial z}\ln a_0a_1a_2\right)\right]F_2-\mathrm{i}\mu G_2=0,$$

$$\left[\frac{1}{a_0}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{a_1}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2a_1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln a_0a_2a_3\right)\right]G_1+\left[\frac{1}{a_2}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\mathrm{i}}{a_3}\frac{\partial}{\partial z}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2a_2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln a_0a_1a_3\right)-\frac{\mathrm{i}}{2a_3}\left(\frac{\partial}{\partial z}\ln a_0a_1a_2\right)\right]G_2-\mathrm{i}\mu F_1=0,$$

$$\left[\frac{1}{a_0}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{a_1}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{2a_1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln a_0a_2a_3\right)\right]G_2+\left[\frac{1}{a_2}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\mathrm{i}}{a_3}\frac{\partial}{\partial z}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2a_2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln a_0a_1a_3\right)+\frac{\mathrm{i}}{2a_3}\left(\frac{\partial}{\partial z}\ln a_0a_1a_2\right)\right]G_1-\mathrm{i}\mu F_2=0, \tag{6.3.5}$$

这一方程可以写成矩阵形式：

$$\left\{\gamma^0\frac{\partial}{\partial t}+\gamma^1\left[\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln a_0a_2a_3\right)\right]+\gamma^2\left[\frac{\partial}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln a_0a_1a_3\right)\right]\right.$$

$$\left.+\gamma^3\left[\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z}\ln a_0a_1a_2\right)\right]-\mathrm{i}\mu I\right\}\psi=0, \tag{6.3.6}$$

$$\gamma^0\equiv\frac{1}{a_0}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\equiv\frac{1}{a_0}\hat{\gamma}^0,$$

$$\gamma^1\equiv\frac{1}{a_1}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\equiv\frac{1}{a_1}\hat{\gamma}^1,$$

$$\gamma^2 \equiv \frac{1}{a_2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{a_2}\hat{\gamma^2},$$

$$\gamma^3 \equiv \frac{1}{a_3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{a_3}\hat{\gamma^3}, \tag{6.3.7}$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}I, \tag{6.3.8}$$

式中 I 为 4 ×4 单位矩阵.

在方程(6.3.6)中,令

$$\psi = \frac{1}{(a_0 a_2 a_3)^{1/2}}\hat{\psi},$$

可以得到

$$\left\{\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + \gamma^1\frac{\partial}{\partial t} + \gamma^2\left[\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\frac{a_1}{a_2}\right)\right] + \gamma^3\left[\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z}\ln\frac{a_1}{a_3}\right) - \mathrm{i}\mu I\right]\right\}\hat{\psi} = 0, \tag{6.3.9}$$

选取坐标,使得 x 轴平行于视界面 $F(x,y,z)=0$ 的法矢量 $\boldsymbol{n}_\mu$,

$$n_\mu = \frac{\partial F}{\partial x^\mu} = \left(0,\frac{\partial F}{\partial x},0,0\right). \tag{6.3.10}$$

由于视界是零曲面

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial F}{\partial x^\mu}\frac{\partial F}{\partial x^\nu} = 0, \tag{6.3.11}$$

因而我们得到

$$g^{11}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 = 0. \tag{6.3.12}$$

这一方向分解为两个方程:

$$g^{11} = 0 \text{ 或 } \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

我们考虑第一个方程. 在视界面附近 g^{11} 可以表示为

$$g^{11} = -p^2(x,y,z)(x-\xi)^m \tag{6.3.13a}$$

或

$$\frac{1}{a_1} = p(x,y,z)(x-\xi)^{\frac{1}{2}m}, \tag{6.3.13b}$$

这里 $x=\xi$ 是视界曲面方程. 假定 $p(x,y,z)$ 是非零的有界实函数. 由于 g^{11} 在视界两边变号,而且度规是实函数,所以 m 必须是正奇数.

进一步假定在视界内外时空坐标互换,g_{00} 也要变号,所以 g_{00} 可以写成

$$g_{00}=q^2(x,y,z)(x-\xi)^n \tag{6.3.14a}$$

或

$$a_0=q(x,y,z)(x-\xi)^{\frac{1}{2}n}. \tag{6.3.14b}$$

表面引力加速度 κ 具有形式:

$$\begin{aligned}\kappa&=\frac{1}{2}(-g^{11}/g_{00})^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x}g_{00}\\&=\frac{p}{2q}(x-\xi)^{\frac{1}{2}(m-n)}\frac{\partial}{\partial x}[q^2(x-\xi)^n]\\&=\frac{1}{2}npq(x-\xi)^{\frac{1}{2}(m+n-2)}\left[1+\frac{2}{n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln|q|\right)(x-\xi)\right],\end{aligned} \tag{6.3.15}$$

κ 在视界面附近应为有界,非零,于是有

$$m+n=2,\quad n\neq 0,$$

$$\kappa=\frac{1}{2}npq\left[1+\frac{2}{n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln|q|\right)(x-\xi)\right]. \tag{6.3.16}$$

在视界面上有

$$\lim_{x\to\xi}\kappa=\frac{1}{2}np(\xi)q(\xi_+). \tag{6.3.17}$$

引入 Tortoise 坐标:

$$\mathrm{d}\hat{x}=2\kappa(x-\xi)\mathrm{d}x \tag{6.3.18a}$$

或者

$$\hat{x}=\int^x\frac{\mathrm{d}x}{2\kappa(x-\xi)}=\frac{1}{2\kappa}\ln(x-\xi). \tag{6.3.18b}$$

在视界面附近,狄拉克方程简化为

$$\begin{aligned}&\left[\hat{\gamma}^0\frac{1}{q(x-\xi)^{\frac{1}{2}n}}\frac{\partial}{\partial t}+\hat{\gamma}^1\frac{1}{nq}(x-\xi)^{\frac{1}{2}m-1}\frac{\partial}{\partial\hat{x}}+\hat{\gamma}^2\frac{1}{a_2}\frac{\partial}{\partial y}\right.\\&\left.-\hat{\gamma}^2\frac{1}{2a_2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln|pa_2|\right)+\hat{\gamma}^3\frac{1}{a_3}\frac{\partial}{\partial z}-\hat{\gamma}^3\frac{1}{2a_3}\left(\frac{\partial}{\partial z}\ln|pa_3|\right)-\mathrm{i}\mu I\right]\hat{\psi}\\&=0,\end{aligned} \tag{6.3.19}$$

每一项乘以 $nq(x-\xi)^{\frac{1}{2}n}$,并代入条件

$$(x-\xi)\ll 1,\quad m+n=2,$$

此方程进一步简化为

$$\left(\hat{\gamma}^0 n\frac{\partial}{\partial t}+\hat{\gamma}^1\frac{\partial}{\partial\hat{x}}\right)\hat{\psi}=0. \tag{6.3.20}$$

令

$$\hat{\psi} = e^{-i\omega t}\phi(x), \tag{6.3.21}$$

则(6.3.20)式成为

$$-i\gamma^{\hat{0}} n\omega\phi(x) + \gamma^{\hat{1}}\frac{d}{dx}\phi(x) = 0. \tag{6.3.22}$$

以 T 表示转置,则此方程的 4 分量解

$$\phi(x) = (f_1, f_2, g_1, g_2)^T \tag{6.3.23}$$

具有形式

$$f_1 = e^{-in\omega \hat{x}}, \quad f_2 = e^{in\omega \hat{x}},$$
$$g_1 = e^{in\omega \hat{x}}, \quad g_2 = e^{-in\omega \hat{x}}. \tag{6.3.24}$$

进入视界的入射波和离开视界的出射波分别为

$$\psi_\omega^{in} \sim e^{-i\omega(t+n\hat{x})}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)^T = e^{-i\omega V}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)^T. \tag{6.3.25}$$

$$\psi_\omega^{out} \sim e^{-i\omega(t-n\hat{x})}\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0)^T = e^{-i\omega V}e^{2i\omega n\hat{x}}\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0)^T$$
$$= e^{-i\omega V}(x-\xi)^{\frac{in\omega}{k}}\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0)^T, \tag{6.3.26}$$

式中 $V = t + n\hat{x}$ 为超前爱丁顿坐标.

度规行列式 g 在视界面上非零有界,则有 $m - n = 0$,于是 $m = n = 1$.

视界面上每一点均为波函数的分支点,通过解析延拓,可以把视界外的波函数延拓至视界内. 视界内的出射波函数为

$$\psi'^{out}_\omega(\xi - x) \sim e^{-i\omega V}[(\xi - x)e^{-i\pi}]^{\frac{i\omega}{\kappa}}\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0)^T$$
$$= e^{-i\omega V}(\xi - x)^{\frac{i\omega}{\kappa}}\left(\exp\frac{\pi\omega}{\kappa}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0)^T$$
$$= \psi_\omega^{out}(\xi - x)\exp\frac{\pi\omega}{\kappa},$$

总的出射波函数为

$$\Phi'^{out}_\omega = N_\omega\left[y(x-\xi)\psi_\omega^{out}(x-\xi) + y(\xi-x)\psi_\omega^{out}(\xi-x)\exp\frac{\pi\omega}{\kappa}\right], \tag{6.3.27}$$

式中 $y(x)$ 是阶跃函数,$\psi_\omega^{out}(x-\xi)$,$\psi_\omega^{out}(\xi-x)$ 是归一化的 4 分量狄拉克波函数. 我们有

$$\langle\psi_\omega^{out}(x-\xi), \psi_\omega^{out}(x-\xi)\rangle$$

$$= \int_{t=\text{const.}} y(x-\xi)\bar{\psi}_\omega^{out}(x-\xi)\gamma^0\psi_\omega^{out}(x-\xi)\sqrt{-g}\,d^3x = 1, \quad (6.3.28a)$$

$$\langle \psi_\omega^{out}(\xi-x), \psi_\omega^{out}(\xi-x)\rangle$$

$$= \int_{t=\text{const.}} y(\xi-x)\bar{\psi}_\omega^{out}(\xi-x)\gamma^0\psi_\omega^{out}(\xi-x)\sqrt{-g}\,d^3x = 1, \quad (6.3.28b)$$

式中 N_ω 是出射波 Φ_ω^{out} 的归一化因子. 在视界外,波函数(6.3.27)表示离开视界,向外传播的正能狄拉克粒子流. 在视界内,(6.3.27)式表示向奇点逆时传播的正能狄拉克粒子流,这等效于向着奇点传播的负能反粒子流;在视界外部领域中有正反粒子对产生.

由 Φ_ω^{out} 的归一化条件,我们得到

$$\langle \Phi_\omega^{out}, \Phi_\omega^{out}\rangle \equiv N_\omega^2\left[\exp\left(\frac{2\pi\omega}{\kappa}\right)+1\right] = 1, \quad (6.3.29)$$

或者

$$N_\omega^2 = \frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi\omega}{\kappa}\right)+1} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\omega}{k_b T}\right)+1}, \quad (6.3.30)$$

式中 $T \equiv \frac{k}{2\pi k_b}$ 是视界的温度,k_b 是玻尔兹曼常数,κ 是视界面上的引力加速度. 式(6.3.30)即为静态时空狄拉克粒子的霍金辐射热谱公式.

2. 克尔-纽曼-德西特时空中的霍金辐射

克尔-纽曼-德西特(Kerr-Newman-de Sitter)时空不是渐近平直的. 这一时空线元在 Boyer-Lindquist 坐标中具有形式

$$\begin{aligned} ds^2 = & \frac{1}{\Sigma\Xi^2}[\Delta_r - \Delta_\theta a^2\sin^2\theta]dt^2 - \frac{\Sigma}{\Delta_r}dr^2 - \frac{\Sigma}{\Delta_\theta}d\theta^2 \\ & - \frac{1}{\Sigma\Xi^2}[\Delta_\theta(r^2+a^2)^2 - \Delta_r a^2\sin^2\theta] \\ & \sin^2\theta d\phi^2 + \frac{2a}{\Sigma\Xi^2}[\Delta_\theta(r^2+a^2) - \Delta_r]\cdot\sin^2\theta dt d\phi, \end{aligned} \quad (6.3.31)$$

式中,

$$\begin{aligned} \Sigma &= r^2 + a^2\cos^2\theta, \\ \Delta_\theta &= 1 + \frac{1}{3}\Lambda a^2\cos^2\theta, \\ \Delta_r &= (r^2+a^2)\left(1-\frac{1}{3}\Lambda r^2\right) - 2Mr + Q^2, \\ \Xi &= 1 + \frac{1}{3}\Lambda a^2. \end{aligned} \quad (6.3.32)$$

由度规(6.3.31),可以得到

$$g = \det(g_{\mu\nu}) = -\frac{1}{\Xi^4}\Sigma^2\sin^2\theta, \tag{6.3.33}$$

$g_{\mu\nu}$的逆为

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} = \frac{\Xi^2}{\Sigma\Delta_r\Delta_\theta}[\Delta_\theta(r^2+a^2)^2 - \Delta_r a^2\sin^2\theta]\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\Delta_r}{\Sigma}\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\Delta_\theta}{\Sigma} \times \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{\Xi^2}{\Delta_r\Delta_\theta\Sigma\sin^2\theta}(\Delta_r - \Delta_\theta a^2\sin^2\theta)\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{2\Xi^2 a}{\Sigma\Delta_r\Delta_\theta} \times [\Delta_\theta(r^2+a^2) - \Delta_r]\frac{\partial^2}{\partial t\partial\phi}. \tag{6.3.34}$$

度规(6.3.31)是含宇宙项的 Einstein-Maxwell 复合场方程的解,其中电磁势为

$$A_\mu = \frac{1}{\Sigma\Xi}Qr(1,0,0,-a\sin^2\theta). \tag{6.3.35}$$

(1) 标量粒子的辐射

将(6.3.31)~(6.3.35)式代入克莱因－戈尔登方程

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \mathrm{ie}A_\mu\right)\left[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} + \mathrm{ie}A_\nu\right)\Phi\right] + \mu^2\Phi = 0, \tag{6.3.36}$$

得到

$$\frac{\Xi^2}{\Sigma\sin\theta}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{ie}\frac{1}{\Sigma\Xi}Qr\right)\left\{\frac{\Sigma}{\Xi^2}\sin\theta\frac{\Xi^2}{\Delta_r\Delta_\theta}[\Delta_\theta(r^2+a^2) - \Delta_r a^2\sin^2\theta]\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{ie}\frac{1}{\Sigma\Xi}Qr\right)\right\} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{ie}\frac{1}{\Sigma\Xi}Qr\right) \times \left\{\frac{\Sigma}{\Xi^2}\sin\theta\frac{\Xi^2 a}{\Sigma\Delta_r\Delta_\theta}[\Delta_\theta(r^2+a^2) - \Delta_r]\left(\frac{\partial}{\partial\phi} - \mathrm{ie}\frac{1}{\Sigma\Xi}Qra\sin^2\theta\right)\right\} + \left(\frac{\partial}{\partial\phi} - \mathrm{ie}\frac{1}{\Sigma\Xi}Qra\sin^2\theta\right)\left\{\frac{\Sigma}{\Xi^2}\sin\theta\frac{\Xi^2 a}{\Sigma\Delta_r\Delta_\theta}[\Delta_\theta(r^2+a^2) - \Delta_r] \times \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{ie}\frac{1}{\Sigma\Xi}Qr\right)\right\} - \left(\frac{\partial}{\partial\phi} - \mathrm{ie}\frac{1}{\Sigma\Xi}Qra\sin^2\theta\right) \times \left[\frac{\Sigma}{\Xi^2}\sin\theta\frac{\Xi^2}{\Sigma\Delta_r\Delta_\theta\sin^2\theta}(\Delta_r - \Delta_\theta a^2\sin^2\theta)\left(\frac{\partial}{\partial\phi} - \mathrm{ie}\frac{1}{\Sigma\Xi} \times Qra\sin^2\theta\right)\right] - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Sigma}{\Xi^2}\sin\theta\frac{\Delta_r}{\Sigma}\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\Sigma}{\Xi^2}\sin\theta\frac{\Delta_\theta}{\Sigma}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]\Phi + \mu^2\Phi = 0. \tag{6.3.37}$$

此方程可分离变量 t 和(r,θ),令

$$\Phi(t,r,\theta,\phi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\hat{\Phi}(r,\theta), \tag{6.3.38}$$

方程化为

$$
\begin{aligned}
&\left\{-\frac{\Xi^2}{\Sigma\Delta_r\Delta_\theta}\left[\Delta_\theta(r^2+a^2)^2-\Delta_r a^2\sin^2\theta\right]\left(\omega-\frac{1}{\Sigma\Xi}\mathrm{e}Qr\right)^2\right.\\
&\qquad+2\frac{\Xi^2 a}{\Sigma\Delta_r\Delta_\theta}\left[\Delta_\theta(r^2+a^2)-\Delta_r\right]\left(\omega-\frac{1}{\Sigma\Xi}\mathrm{e}Qr\right)\left(m-\frac{1}{\Sigma\Xi}\mathrm{e}Qra\sin^2\theta\right)\\
&\qquad\left.+\frac{\Xi^2}{\Sigma\Delta_r\Delta_\theta\sin^2\theta}(\Delta_r-\Delta_\theta a^2\sin^2\theta)\left(m-\frac{1}{\Sigma\Xi}\mathrm{e}Qra\sin^2\theta\right)^2\right\}\hat{\Phi}(r,\theta)\\
&\qquad-\frac{1}{\Sigma}\frac{\partial}{\partial r}\Delta_r\frac{\partial}{\partial r}\hat{\Phi}(r,\theta)-\frac{1}{\Sigma\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Delta_\theta\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\Phi}(r,\theta)\\
&\qquad+\mu^2\hat{\Phi}(r,\theta)\\
&=0.
\end{aligned}
\tag{6.3.39}
$$

引入 Tortoise 坐标$\hat{r}$,其微分形式为

$$
\mathrm{d}\hat{r}=\frac{1}{\Delta_r}(r^2+a^2)\mathrm{d}r \tag{6.3.40a}
$$

或者

$$
\Delta_r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}=(r^2+a^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{r}}. \tag{6.3.40b}
$$

将(6.3.40b)式代入(6.3.39)式,得到

$$
\begin{aligned}
&\left\{-\frac{\Xi^2}{\Sigma\Delta_r\Delta_\theta}\left[\Delta_\theta(r^2+a^2)^2-\Delta_r a^2\sin^2\theta\right]\left(\omega-\frac{1}{\Sigma\Xi}\mathrm{e}Qr\right)^2\right.\\
&\qquad+2\frac{\Xi^2 a}{\Sigma\Delta_r\Delta_\theta}\left[\Delta_\theta(r^2+a^2)-\Delta_r\right]\left(\omega-\frac{1}{\Sigma\Xi}\mathrm{e}Qr\right)\left(m-\frac{1}{\Sigma\Xi}\mathrm{e}Qra\sin^2\theta\right)\\
&\qquad\left.+\frac{\Xi^2}{\Sigma\Delta_r\Delta_\theta\sin^2\theta}(\Delta_r-\Delta_\theta a^2\sin^2\theta)\left(m-\frac{1}{\Sigma\Xi}\mathrm{e}Qra\sin^2\theta\right)^2\right\}\hat{\Phi}(r,\theta)\\
&\qquad-\frac{1}{\Sigma\Delta_t}(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial\hat{r}}(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial\hat{r}}\hat{\Phi}(r,\theta)\\
&\qquad-\frac{1}{\Sigma\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Delta_\theta\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\Phi}(r,\theta)+\mu^2\hat{\Phi}(r,\theta)\\
&=0.
\end{aligned}
\tag{6.3.41}
$$

该时空的视界面方程为

$$
\begin{aligned}
\Delta_r&=(r^2+a^2)\left(1-\frac{1}{3}\Lambda r^2\right)-2Mr+Q^2\\
&=-\frac{1}{3}\Lambda\left[r^4-\left(\frac{3}{\Lambda}-a^2\right)r^2+\frac{6M}{\Lambda}r-\frac{3}{\Lambda}(a^2+Q^2)\right]\\
&=-\frac{1}{3}\Lambda(r-r_{++})(r-r_+)(r-r_-)(r-r_{--})\\
&=0.
\end{aligned}
\tag{6.3.42}
$$

当$\frac{1}{\Lambda}\gg M^2>a^2+Q^2$,方程 $\Delta_r=0$ 有四个实根,r_{++},r_+,r_-和 r_{--},其中 r_{++},r_+,r_-为

正，r_{--}为负. r_{++}，r_{--}与 de Sitter 宇宙的视界对应，r_{+}，r_{-}与 Kerr-Newman 黑洞的视界对应. 换句话说，r_{++}，r_{--}是受 Kerr-Newman 黑洞作用的 de Sitter 宇宙的视界，r_{+}，r_{-}是受宇宙因子 Λ 作用的 Kerr-Newman 黑洞的视界. 下面只讨论视界 r_{+} 和 r_{++}上的辐射.

在视界附近，$\Delta_r \ll 1$，用 Δ_r 乘以(6.3.41)各项，得到方程

$$\left[-\frac{\Xi^2}{\Sigma}(r^2+a^2)^2\left(\omega-\frac{1}{\Sigma\Xi}eQr\right)^2-\frac{\Xi^2}{\Sigma}a^2\left(m-\frac{1}{\Sigma\Xi}eQra\sin^2\theta\right)^2\right.$$
$$\left.+2\frac{\Xi^2 a}{\Sigma}(r^2+a^2)\left(\omega-\frac{1}{\Sigma\Xi}eQr\right)\left(m-\frac{1}{\Sigma\Xi}eQra\sin^2\theta\right)\right]\hat{\Phi}(r,\theta)$$
$$-\frac{1}{\Sigma}(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial\hat{r}}(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial\hat{r}}\hat{\Phi}(r,\theta)$$
$$=0. \tag{6.3.43}$$

由于$\dfrac{dr}{d\hat{r}}=\dfrac{\Delta_r}{r^2+a^2}\ll 1$，再设$\hat{\Phi}(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$，可以得到

$$(r^2+a^2)^2\frac{d^2}{d\hat{r}^2}R+\{\Xi[\omega(r^2+a^2)-am]-eQr\}^2R=0. \tag{6.3.44}$$

令

$$\pi=\Xi[\omega(r_+^2+a^2)-am]-eQr_+, \tag{6.3.45}$$

在 r_+附近，(6.3.44)式简化为

$$\frac{d^2}{d\hat{r}^2}R+\frac{\pi^2}{(r_+^2+a^2)}R=0. \tag{6.3.46}$$

解之得

$$R\sim\exp\left[\pm i\frac{\pi}{(r_+^2+a^2)}\hat{r}\right]=\exp\left[\pm i(\Xi\omega-\Xi m\Omega-eV)\hat{r}\right]$$
$$=\exp[\pm i\Xi(\omega-\omega_0)\hat{r}]=\exp[\pm i\Xi\omega\hat{r}'], \tag{6.3.47}$$

式中 $\Omega=\dfrac{a}{r_+^2+a^2}$是视界 r_+ 的角速度，$V=A_0=\dfrac{Qr_+}{r_+^2+a^2}$是视界 r_+上 $\theta=0$ 处的静电势. $\omega_0\equiv m\Omega+\dfrac{1}{\Xi}eV$，$(\omega-\omega_0)\hat{r}=\omega\hat{r}'$.

计入时间因子，则自视界 r_+向外的出射波

$$\Psi_\omega^{out}\sim e^{-i\omega(t-\Xi\hat{r}')}, \tag{6.3.48}$$

进入视界 r_+的入射波

$$\Psi_\omega^{in}\sim e^{-i\omega(t+\Xi\hat{r}')}. \tag{6.3.49}$$

引入超前爱丁顿坐标

$$V=t+\Xi\hat{r}', \tag{6.3.50}$$

则(6.3.48)和(6.3.49)式可以写为

$$\Psi_\omega^{in} \sim e^{-i\omega V} \tag{6.3.51}$$

$$\Psi_\omega^{out} e \sim {}^{-i\omega V} e^{2i\omega\Xi \hat{r}} = e^{-i\omega V} e^{2i\Xi(\omega-\omega_0)\hat{r}}. \tag{6.3.52}$$

由于$\frac{dr}{\Delta_r}=\frac{d\hat{r}}{r^2+a^2}$,所以在视界面$r_+$附近有

$$\ln(r-r_+) = -\frac{1}{3}\Lambda\frac{1}{r_+^2+a^2}(r_+-r_{++})(r_+-r_-)(r_+-r_{--})\hat{r}$$

$$= 2\kappa_h \Xi \hat{r}, \tag{6.3.53}$$

式中

$$\kappa_h = -\frac{\Lambda}{6\Xi}\frac{1}{r_+^2+a^2}(r_+-r_{++})(r_+-r_-)(r_+-r_{--}), \tag{6.3.54}$$

是视界面r_+上的引力加速度.

由(6.3.53)式可以得到

$$(r-r_+) = \exp(2\kappa_h\Xi\hat{r}),$$

于是出射波可改写为

$$\Psi_\omega^{out} \sim e^{-i\omega V}(r-r_+)^{\frac{i}{\kappa_h}(\omega-\omega_0)}. \tag{6.3.55}$$

这一结果是在视界面外部得到的,用解析延拓的方法可以得到视界面内的波函数:

$$\Psi_\omega^{out} \sim e^{-i\omega V}(r_+-r)^{\frac{i}{\kappa_h}(\omega-\omega_0)} e^{\frac{\pi}{\kappa_h}(\omega-\omega_0)}$$

$$= \Psi_\omega^{out}(r_+-r)e^{\frac{\pi}{\kappa_h}(\omega-\omega_0)}. \tag{6.3.56}$$

这样,由视界面向外的出射波的波函数可以统一写为

$$\Phi_\omega^{out} = N_\omega\left\{y(r-r_+)\Psi_\omega^{out}(r-r_+) + y(r_+-r)\Psi_\omega^{out}(r_+-r)\exp\left[\frac{\pi}{\kappa_h}(\omega-\omega_0)\right]\right\}, \tag{6.3.57}$$

式中$y(x)$是阶跃函数,$\Psi_\omega^{out}(r-r_+)$和$\Psi_\omega^{out}(r_+-r)$是已经归一化了的波函数. N_ω是Ψ_ω^{out}的归一化因子.

在视界外$r>r_+$,(6.3.57)式代表强度为N_ω^2或流密度为$\frac{1}{2\pi}N_\omega^2$从视界向外传播的出射正能粒子流. 在视界内$r<r_+$,r为时间轴. 上式代表在引力场中逆着时间前进的正能粒子流,实际上就是在引力场中顺着时间离开视界传播的负能反粒子流. 这意味着在视界上有正反粒子对产生.

由Φ_ω^{out}的归一化条件

$$\langle\Phi_\omega^{our},\Phi_\omega^{out}\rangle = N_\omega^2\left\{\exp\left[\frac{2\pi(\omega-\omega_0)}{\kappa_h}\right]-1\right\} = 1 \tag{6.3.58}$$

得到

$$N_\omega^2 = \frac{1}{\exp\left[\frac{2\pi(\omega - \omega_0)}{\kappa_h}\right] - 1} = \frac{1}{\exp\left[\frac{\omega - \omega_0}{k_b T_h}\right] - 1}, \tag{6.3.59}$$

式中 k_b 是玻尔兹曼常数,

$$T_h = \frac{\kappa_h}{2\pi k_b}, \tag{6.3.60}$$

是黑洞视界的温度.

对于宇宙视界 r_{++},用相似的方法经过相似的计算过程,可得视界表面引力加速度

$$\kappa_c = \frac{\Lambda}{6\Xi}\frac{1}{r_{++}^2 + a^2}(r_{++} - r_+)(r_{++} - r_-)(r_{++} - r_{--}), \tag{6.3.61}$$

视界 r_{++}的温度为

$$T_c = \frac{\kappa_c}{2\pi k_b}. \tag{6.3.62}$$

当$\frac{1}{\Lambda} \gg M^2$,由(6.3.54)和(6.3.61)式得

$$\kappa_h \sim \frac{1}{2}\frac{r_+ - r_-}{r_+^2 + a^2}, r_\pm \sim M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}, \tag{6.3.63}$$

$$\kappa_c \sim \left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{+}. \tag{6.3.64}$$

(2)狄拉克粒子的辐射

由度规(6.3.31),构造对称零标架:

$$l^\mu = \left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\Xi(r^2 + a^2), \Delta_r, 0, \Xi_a\right],$$

$$n^\mu = \left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\Xi(r^2 + a^2), -\Delta_r, 0, \Xi_a\right],$$

$$m^\mu = \left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\mathrm{i}\Xi a\sin\theta, 0, \Delta_\theta, \frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\right],$$

$$\overline{m}^\mu = \left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left[-\mathrm{i}\Xi a\sin\theta, 0, \Delta_\theta, -\frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\right]. \tag{6.3.65}$$

由此可以得到零标架的协变分量.可以证明上述零标架满足伪正交条件和度规条件.由这些零标架分量,可以得到 Newman-Penrose 旋系数的表示式:

$$\pi = -\left(\frac{\Delta_\theta}{2\Sigma}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\Sigma}(a^2\sin\theta\cos\theta - \mathrm{i}ra\sin\theta),$$

$$\epsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}}\left[-\frac{r}{\Sigma}\Delta_r + \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)r - \frac{1}{3}\Lambda r(r^2 + a^2) - M - \frac{\Delta_r}{\Sigma}\mathrm{i}a\cos\theta\right],$$

$$\rho = -\left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\Delta_r}{\Sigma}(r + \mathrm{i}a\cos\theta),$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{\Sigma}\left[\Delta_\theta(r^2 + a^2) - \frac{1}{3}\Lambda\Sigma a^2\sin^2\theta\right]\cot\theta - \frac{\Delta_\theta}{\Sigma}\mathrm{i}ra\sin\theta\right\},$$

$$\mu = \rho, \beta = -\alpha, \gamma = \epsilon, \tau = -\pi. \tag{6.3.66}$$

各微分算符的表示式为

$$D = l^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\Xi(r^2 + a^2)\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_r\frac{\partial}{\partial r} + \Xi a\frac{\partial}{\partial\phi}\right],$$

$$\Delta = n^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\Xi(r^2 + a^2)\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_r\frac{\partial}{\partial r} + \Xi a\frac{\partial}{\partial\phi}\right],$$

$$\delta = m^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\mathrm{i}\Xi a\sin\theta\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right],$$

$$\bar{\delta} = \bar{m}^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left[-\mathrm{i}\Xi a\sin\theta\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right]. \tag{6.3.67}$$

电磁势的表示式为(6.3.35)式,由(6.3.65)和(6.3.35)式可以得到

$$A_\mu l^\mu = A_\mu n^\mu = \left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}}Qr, \tag{6.3.68}$$

$$A_\mu m^\mu = A_\mu\bar{m}^\mu = 0. \tag{6.3.69}$$

由(6.3.66)式可得

$$\begin{aligned}\epsilon - \rho &= -(\mu - \gamma)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\Delta_r}{\Sigma}(r + \mathrm{i}a\cos\theta) + \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)r - M - \frac{1}{3}\Lambda r(r^2 + a^2)\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi - \alpha &= \beta - \tau\\ &= -\left(\frac{1}{2\Sigma}\right)^{\frac{3}{2}}\Delta_\theta^{\frac{1}{2}}\left[a^2\sin\theta\cos\theta - \Sigma\cot\theta - \mathrm{i}ra\sin\theta + \frac{1}{3}\frac{\Lambda\Sigma}{\Delta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta\right].\end{aligned} \tag{6.3.70}$$

将(6.3.67)~(6.3.70)式代入狄拉克方程(6.3.4),得到

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\Xi(r^2 + a^2)\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_r\frac{\partial}{\partial r} + \Xi a\frac{\partial}{\partial\phi}\right.\\ &\left.+ \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta_r}{\Sigma}(r + \mathrm{i}a\cos\theta) + \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)r - M - \frac{1}{3}\Lambda r(r^2 + a^2)\right] + \mathrm{i}eQr\right\}F_1\\ &+ \left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left[-\mathrm{i}\Xi a\sin\theta\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right.\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2\Sigma}\left(a^2\sin\theta\cos\theta-\Sigma\cot\theta-\mathrm{i}ra\sin\theta+\frac{1}{3}\frac{\Lambda\Sigma}{\Delta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta\right)\Big]F_2-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\mu G_2=0,$$

$$\left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}}\Big\{\Xi(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial t}-\Delta_r\frac{\partial}{\partial r}+\Xi a\frac{\partial}{\partial\phi}$$
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\Delta_r}{\Sigma}(r+\mathrm{i}a\cos\theta)+\left(1-\frac{1}{3}\Lambda^2\right)r-M-\frac{1}{3}\Lambda r(r^2+a^2)\right]+\mathrm{ie}Qr\Big\}F_2$$
$$+\left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\Big[\mathrm{i}\Xi a\sin\theta\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$
$$-\frac{1}{2\Sigma}\left(a^2\sin\theta\cos\theta-\Sigma\cot\theta-\mathrm{i}ra\sin\theta+\frac{1}{3}\frac{\Lambda\Sigma}{\Delta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta\right)\Big]F_1-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\mu G_2=0,$$

$$\left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}}\Big\{\Xi(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_r\frac{\partial}{\partial r}+\Xi a\frac{\partial}{\partial\phi}$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\Delta_r}{\Sigma}(r-\mathrm{i}a\cos\theta)+\left(1-\frac{1}{3}\Lambda r^2\right)r-M-\frac{1}{3}\Lambda r(r^2+a^2)\right]+\mathrm{ie}Qr\Big\}G_2$$
$$-\left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\Big[\mathrm{i}\Xi a\sin\theta\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$
$$-\frac{1}{2\Sigma}\left(a^2\sin\theta\cos\theta-\Sigma\cot\theta+\mathrm{i}ra\sin\theta+\frac{1}{3}\frac{\Lambda\Sigma}{\Delta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta\right)\Big]G_1-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\mu F_2=0,$$

$$\left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}}\Big\{\Xi(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial t}-\Delta_r\frac{\partial}{\partial r}+\Xi a\frac{\partial}{\partial\phi}$$
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\Delta_r}{\Sigma}(r-\mathrm{i}a\cos\theta)+\left(1-\frac{1}{3}\Lambda r^2\right)r-M-\frac{1}{3}\Lambda r(r^2+a^2)\right]+\mathrm{ie}Qr\Big\}G_1$$
$$-\left(\frac{1}{2\Sigma\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\Big[-\mathrm{i}\Xi a\sin\theta\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$
$$-\frac{1}{2\Sigma}\left(a^2\sin\theta\cos\theta-\Sigma\cot\theta+\mathrm{i}ra\sin\theta+\frac{1}{3}\frac{\Lambda\Sigma}{\Delta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta\right)\Big]G_2-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\mu F_1=0.$$
$$(6.3.71)$$

Γ 矩阵形式的狄拉克方程为

$$\left[\gamma^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\Gamma_\mu\right)-\mathrm{i}\mu I\right]\psi=0. \tag{6.3.72}$$

比较(6.3.71)和(6.3.72)式,得到

$$\gamma^0=\left(\frac{1}{\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}}(r^2+a^2)\,\tilde{\gamma}^0+\left(\frac{1}{\Sigma\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\Xi a\sin\theta\,\tilde{\gamma}^3,$$

$$\gamma^1 = \left(\frac{1}{\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta_r \gamma^{\hat{1}},$$

$$\gamma^2 = \left(\frac{1}{\Sigma\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta_\theta \gamma^{\hat{2}},$$

$$\gamma^3 = \left(\frac{1}{\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}} \Xi a \gamma^{\hat{0}} + \left(\frac{1}{\Sigma\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Xi}{\sin\theta} \gamma^{\hat{3}}. \tag{6.3.73}$$

式中右端的$\gamma^{\hat{\mu}}$各分量分别为

$$\gamma^{\hat{0}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\gamma^{\hat{1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\gamma^{\hat{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\gamma^{\hat{3}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.3.74}$$

γ^μ 是克尔-纽曼-德西特时空的狄拉克矩阵,而$\gamma^{\hat{\mu}}$ 是闵可夫斯基时空的狄拉克矩阵. 直接推导可以得到

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I. \tag{6.3.75}$$

令

$$F_i = \Delta_r^{-\frac{1}{4}} \hat{F}_i, G_i = \Delta^{-\frac{1}{4}} \hat{G}_i, i = 1, 2, \tag{6.3.76}$$

我们有

$$\frac{\partial F_1}{\partial r} = -\frac{1}{2}\Delta_r^{-\frac{5}{4}}\left[-\frac{1}{3}\Lambda r(r^2 + a^2) + \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) - M\right]\hat{F}_1 + \Delta_r^{-\frac{1}{4}} \frac{\partial}{\partial r}\hat{F}_1, \cdots \tag{6.3.77}$$

将(6.3.76)和(6.3.77)式代入(6.3.71)式,得到

$$\left(\frac{1}{\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\Xi(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_r\frac{\partial}{\partial r}+\Xi a\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{\Delta_r}{2\Sigma}(r+\mathrm{i}a\cos\theta)+\mathrm{i}eQr\right]\hat{F}_1$$
$$+\left(\frac{1}{\Sigma\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left[-\mathrm{i}\Xi a\sin\theta\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2\Sigma}\left(a^2\sin\theta\cos\theta-\Sigma\cot\theta-\mathrm{i}ra\sin\theta+\frac{1}{3}\frac{\Lambda\Sigma}{\Delta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta\right)\right]\hat{F}_2-\mathrm{i}\mu\hat{G}_1=0,$$
$$\left(\frac{1}{\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\Xi(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial t}-\Delta_r\frac{\partial}{\partial r}+\Xi a\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{\Delta_r}{2\Sigma}(r+\mathrm{i}a\cos\theta)+\mathrm{i}eQr\right]\hat{F}_2$$
$$+\left(\frac{1}{\Sigma\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\mathrm{i}\Xi a\sin\theta\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2\Sigma}\left(a^2\sin\theta\cos\theta-\Sigma\cot\theta-\mathrm{i}ra\sin\theta+\frac{1}{3}\frac{\Lambda\Sigma}{\Delta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta\right)\right]\hat{F}_1-\mathrm{i}\mu\hat{G}_2=0,$$
$$\left(\frac{1}{\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\Xi(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial t}-\Delta_r\frac{\partial}{\partial r}+\Xi a\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{\Delta_r}{2\Sigma}(r-\mathrm{i}a\cos\theta)+\mathrm{i}eQr\right]\hat{G}_1$$
$$-\left(\frac{1}{\Sigma\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left[-\mathrm{i}\Xi a\sin\theta\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2\Sigma}\left(a^2\sin\theta\cos\theta-\Sigma\cot\theta+\mathrm{i}ra\sin\theta+\frac{1}{3}\frac{\Lambda\Sigma}{\Delta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta\right)\right]\hat{G}_2-\mathrm{i}\mu\hat{F}_1=0,$$
$$\left(\frac{1}{\Sigma\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\Xi(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_r\frac{\partial}{\partial r}+\Xi a\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{\Delta_r}{2\Sigma}(r-\mathrm{i}a\cos\theta)+\mathrm{i}eQr\right]\hat{G}_2$$
$$-\left(\frac{1}{\Sigma\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\mathrm{i}\Xi a\sin\theta\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2\Sigma}\left(a^2\sin\theta\cos\theta-\Sigma\cot\theta+\mathrm{i}ra\sin\theta+\frac{1}{3}\frac{\Lambda\Sigma}{\Delta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta\right)\right]\hat{G}_1-\mathrm{i}\mu\hat{F}_2=0.$$

(6.3.78)

引入 Tortoise 坐标 $\hat{r}$,

$$\mathrm{d}\hat{r}=\frac{1}{\Delta_r}(r^2+a^2)\mathrm{d}r,\tag{6.3.79a}$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{r}}=\frac{\Delta_r}{(r^2+a^2)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}.\tag{6.3.79b}$$

将(6.3.79b)式代入(6.3.78)式,得到

$$\left[\Xi(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial t}+(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial\hat{r}}+\Xi a\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{\Delta_r}{2\Sigma}(r+\mathrm{i}a\cos\theta)+\mathrm{i}eQr\right]\hat{F}_1$$

$$+\left(\frac{\Delta_r}{\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left[-\mathrm{i}\Xi a\sin\theta\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\Sigma}\left(a^2\sin\theta\cos\theta-\Sigma\cot\theta-\mathrm{i}ra\sin\theta+\frac{1}{3}\frac{\Lambda\Sigma}{\Delta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta\right)\right]\hat{F}_2-\mathrm{i}\mu(\Sigma\Delta_r)^{\frac{1}{2}}\hat{G}_1=0,$$

$$\left[\Xi(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial t}-(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial\hat{r}}+\Xi a\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{\Delta_r}{2\Sigma}(r+\mathrm{i}a\cos\theta)+\mathrm{i}eQr\right]\hat{F}_2$$

$$+\left(\frac{\Delta_r}{\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\mathrm{i}\Xi a\sin\theta\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\Sigma}\left(a^2\sin\theta\cos\theta-\Sigma\cot\theta-\mathrm{i}ra\sin\theta+\frac{1}{3}\frac{\Lambda\Sigma}{\Delta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta\right)\right]\hat{F}_1-\mathrm{i}\mu(\Sigma\Delta_r)^{\frac{1}{2}}\hat{G}_2=0,$$

$$\left[\Xi(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial t}-(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial\hat{r}}+\Xi a\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{\Delta_r}{2\Sigma}(r-\mathrm{i}a\cos\theta)+\mathrm{i}eQr\right]\hat{G}_1$$

$$-\left(\frac{\Delta_r}{\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left[-\mathrm{i}\Xi a\sin\theta\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\Sigma}\left(a^2\sin\theta\cos\theta-\Sigma\cot\theta+\mathrm{i}ra\sin\theta+\frac{1}{3}\frac{\Lambda\Sigma}{\Delta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta\right)\right]\hat{G}_2-\mathrm{i}\mu(\Sigma\Delta_r)^{\frac{1}{2}}\hat{F}_1=0,$$

$$\left[\Xi(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial t}+(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial\hat{r}}+\Xi a\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{\Delta_r}{2\Sigma}(r-\mathrm{i}a\cos\theta)+\mathrm{i}eQr\right]\hat{G}_2$$

$$-\left(\frac{\Delta_r}{\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\mathrm{i}\Xi a\sin\theta\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\mathrm{i}\Xi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\Sigma}\left(a^2\sin\theta\cos\theta-\Sigma\cot\theta+\mathrm{i}ra\sin\theta+\frac{1}{3}\frac{\Lambda\Sigma}{\Delta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta\right)\right]\hat{G}_1-\mathrm{i}\mu(\Sigma\Delta_r)^{\frac{1}{2}}\hat{F}_2=0.$$

$$(6.3.80)$$

令

$$\begin{aligned}\hat{F}_i&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}f_i,\\ \hat{G}_i&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}g_i,\end{aligned}\qquad i=1,2,\tag{6.3.81}$$

代入(6.3.80)式,得到

$$\left[-\mathrm{i}\Xi\omega(r^2+a^2)+(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial\hat{r}}+\mathrm{i}\Xi ma+\frac{\Delta_r}{2\Sigma}(r+\mathrm{i}a\cos\theta)+\mathrm{i}eQr\right]f_1$$

$$+\left(\frac{\Delta_r}{\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left[-\Xi a\omega\sin\theta+\Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\Xi m}{\sin\theta}-\frac{1}{2\Sigma}(a^2\sin\theta\cos\theta-\mathrm{i}ra\sin\theta)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\cot\theta-\frac{1}{6}\frac{\Lambda}{\Delta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta)\right]f_2-\mathrm{i}\mu(\Sigma\Delta_r)^{\frac{1}{2}}g_1=0,$$

$$\left[-\mathrm{i}\Xi\omega(r^2+a^2)-(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial\hat{r}}+\mathrm{i}\Xi ma-\frac{\Delta_r}{2\Sigma}(r+\mathrm{i}a\cos\theta)+\mathrm{i}eQr\right]f_2$$
$$+\left(\frac{\Delta_r}{\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\Xi a\omega\sin\theta+\Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\Xi m}{\sin\theta}-\frac{1}{2\Sigma}(a^2\sin\theta\cos\theta-\mathrm{i}ra\sin\theta)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\cot\theta-\frac{1}{6}\frac{\Lambda}{\Delta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta)\right]f_1-\mathrm{i}\mu(\Sigma\Delta_r)^{\frac{1}{2}}g_2=0,$$
$$\left[-\mathrm{i}\Xi\omega(r^2+a^2)-(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial\hat{r}}+\mathrm{i}\Xi ma-\frac{\Delta_r}{2\Sigma}(r-\mathrm{i}a\cos\theta)+\mathrm{i}eQr\right]g_1$$
$$-\left(\frac{\Delta_r}{\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left[-\Xi a\omega\sin\theta+\Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\Xi m}{\sin\theta}-\frac{1}{2\Sigma}(a^2\sin\theta\cos\theta+\mathrm{i}ra\sin\theta)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\cot\theta-\frac{1}{6}\frac{\Lambda}{\Delta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta)\right]g_2-\mathrm{i}\mu(\Sigma\Delta_r)^{\frac{1}{2}}f_1=0,$$
$$\left[-\mathrm{i}\Xi\omega(r^2+a^2)+(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial\hat{r}}+\mathrm{i}\Xi ma+\frac{\Delta_r}{2\Sigma}(r-\mathrm{i}a\cos\theta)+\mathrm{i}eQr\right]g_2$$
$$-\left(\frac{\Delta_r}{\Delta_\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\Xi a\omega\sin\theta+\Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\Xi m}{\sin\theta}-\frac{1}{2\Sigma}(a^2\sin\theta\cos\theta+\mathrm{i}ra\sin\theta)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\cot\theta-\frac{1}{6}\frac{\Lambda}{\Delta_\theta}a^2\sin\theta\cos\theta)\right]g_1-\mathrm{i}\mu(\Sigma\Delta_r)^{\frac{1}{2}}f_2=0. \tag{6.3.82}$$

和在(1)中讨论视界面方程(6.3.42)的情况一样,我们只讨论视界面 r_+ 和 r_{++} 处的霍金辐射.

在视界 r_+ 附近,$\Delta_r\to0$,于是(6.3.82)式简化为

$$\left[-\mathrm{i}\Xi\omega(r_+^2+a^2)+(r_+^2+a^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{r}}+\mathrm{i}\Xi ma+\mathrm{i}eQr_+\right]f_1=0,$$
$$\left[-\mathrm{i}\Xi\omega(r_+^2+a^2)-(r_+^2+a^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{r}}+\mathrm{i}\Xi ma+\mathrm{i}eQr_+\right]f_2=0,$$
$$\left[-\mathrm{i}\Xi\omega(r_+^2+a^2)-(r_+^2+a^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{r}}+\mathrm{i}\Xi ma+\mathrm{i}eQr_+\right]g_1=0,$$
$$\left[-\mathrm{i}\Xi\omega(r_+^2+a^2)+(r_+^2+a^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{r}}+\mathrm{i}\Xi ma+\mathrm{i}eQr_+\right]g_2=0. \tag{6.3.83}$$

解之得

$$f_1=\exp\left[\mathrm{i}\left(\Xi\omega-\frac{\Xi ma+eQr_+}{r_+^2+a^2}\right)\hat{r}\right]=\exp\left[\mathrm{i}\Xi(\omega-m\Omega-eV)\hat{r}\right],$$
$$f_2=\exp\left[-\mathrm{i}\left(\Xi\omega-\frac{\Xi ma+eQr_+}{r_+^2+a^2}\right)\hat{r}\right]=\exp\left[-\mathrm{i}\Xi(\omega-m\Omega-eV)\hat{r}\right],$$

$$g_1 = \exp\left[-\mathrm{i}\left(\Xi\omega - \frac{\Xi ma + eQr_+}{r_+^2 + a^2}\right)\hat{r}\right] = \exp\left[\mathrm{i}\Xi(\omega - m\Omega - eV)\hat{r}\right],$$

$$g_2 = \exp\left[\mathrm{i}\left(\Xi\omega - \frac{\Xi ma + eQr_+}{r_+^2 + a^2}\right)\hat{r}\right] = \exp\left[\mathrm{i}\Xi(\omega - m\Omega - eV)\hat{r}\right]. \quad (6.3.84)$$

式中

$$\Omega \equiv \frac{a}{r_+^2 + a^2}, \quad (6.3.85)$$

为黑洞视界 r_+ 的角速度;

$$V = A_0 = \frac{Qr_+}{\Xi(r_+^2 + a^2)}, \quad (6.3.86)$$

为 r_+ 上两极点处的静电势.

令

$$\omega_0 = m\Omega + eV \quad (6.3.87)$$

及

$$\Xi(\omega - \omega_0)\hat{r} = \omega\hat{r'}, \quad (6.3.88)$$

在$\hat{F}_i$,$\hat{G}_i$ 中省写因子 $\exp(\mathrm{i}m\phi)$则

$$\hat{F}_1 \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-\hat{r'})}, \quad \hat{F}_2 \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t+\hat{r'})},$$

$$\hat{G}_1 \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t+\hat{r'})}, \quad \hat{G}_2 \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-\hat{r'})}. \quad (6.3.89)$$

由(6.3.89)式可知,进入视界 r_+ 的入射波为

$$\psi_\omega^{in} \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t+\hat{r'})}\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}, \quad (6.3.90)$$

由视界 r_+ 向外的出射波为

$$\psi_\omega^{out} \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-\hat{r'})}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}, \quad (6.3.91)$$

式中 T 为转置算符. 可见入射波和出射波正交.

引入超前爱丁顿坐标

$$V = t + \hat{r'}, \quad (6.3.92)$$

可将(6.3.90)和(6.3.91)式写为

$$\psi_\omega^{in} \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega V}\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}, \quad (6.3.93)$$

$$\psi_\omega^{out} \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega V}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega\hat{r'}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)^{\mathrm{T}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega V}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\Xi(\omega-\omega_0)\hat{r}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}. \quad (6.3.94)$$

在视界面附近,(6.3.79a)式可写为

$$\mathrm{d}\hat{r} = -\frac{3}{\Lambda}\frac{(r_+^2 + a^2)\mathrm{d}r}{(r_+ - r_{++})(r_+ - r_-)(r_+ - r_{--})(r - r_+)}. \tag{6.3.95}$$

积分,得到

$$\ln(r - r_+) = -\frac{1}{3}\frac{\Lambda}{r_+^2 + a^2}(r_+ - r_{++})(r_+ - r_-)(r_+ - r_{--})\hat{r} \equiv 2\kappa_+ \Xi \hat{r} \tag{6.3.96}$$

式中

$$\kappa_+ = -\frac{1}{6\Xi}\frac{\Lambda}{r_+^2 + a^2}(r_+ - r_{++})(r_+ - r_-)(r_+ - r_{--}) \tag{6.3.97}$$

为视界 r_+ 上的引力加速度.

由(6.3.9)式,可以得到

$$(r - r_+) = \exp(2\kappa_+ \Xi \hat{r}), \tag{6.3.98}$$

代入(6.3.94)式,可将出射波改写成

$$\psi_\omega^{out} \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega V}(r - r_+)^{\mathrm{i}/\kappa_k(\omega - \omega_0)}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}. \tag{6.3.99}$$

上面的出射波是在视界面外边得到的,视界面上任一点都是分支点,即波函数不确定. 可以如前一样地进行解析延拓,得到视界面内的出射波函数.

$$\begin{aligned}\psi_\omega^{out} &\sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega V}(r_+ - r)^{\frac{\mathrm{i}}{\kappa_+}(\omega - \omega_0)}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{\kappa_+}(\omega - \omega_0)}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)^{\mathrm{T}} \\ &= \psi_\omega^{out}(r_+ - r)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{\kappa_+}(\omega - \omega_0)}.\end{aligned} \tag{6.3.100}$$

引入阶跃函数

$$y(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x > 0, \\ 0 & \text{当 } x < 0, \end{cases} \tag{6.3.101}$$

出射波函数可统一表示为

$$\Phi_\omega^{out} = N_\omega\left\{y(r - r_+)\psi_\omega^{out}(r - r_+) + y(r_+ - r)\psi_\omega^{out}(r_+ - r)\exp\left[\frac{\pi}{\kappa_+}(\omega - \omega_0)\right]\right\}, \tag{6.3.102}$$

式中 N_ω 是 Φ_ω^{out} 的归一化因子.

在视界面外,上式表示强度为 N_ω^2 的从视界向外传播的正能粒子流;在视界面内,r 为时间轴,(6.3.102)式表示逆时传播的正能粒子流,等效于顺时离开视界的负能反粒子流. 即在视界面上产生了正反狄拉克粒子对.

由 Φ_ω^{out} 的归一化条件

$$\langle\Phi_\omega^{out}, \Phi_\omega^{out}\rangle = N_\omega^2\left\{\exp\left[\frac{2\pi(\omega - \omega_0)}{\kappa_+}\right] + 1\right\} = 1, \tag{6.3.103}$$

可以确定归一化常数

$$N_{\omega}^{2}=\left\{\exp\left[\frac{2\pi(\omega-\omega_{0})}{\kappa_{+}}\right]+1\right\}^{-1}=\left[\exp\left(\frac{\omega-\omega_{0}}{k_{b}T_{+}}\right)+1\right]^{-1},\quad(6.3.104)$$

式中 k_b 是玻尔兹曼常数，κ_+ 是外视界上的引力加速度，而温度

$$T_{+}\equiv\frac{\kappa_{+}}{2\pi k_{b}}.\quad(6.3.105)$$

用类似的方法可以得到宇宙视界 r_{++} 上的引力加速度

$$\kappa_{++}=\frac{1}{6\Xi}\frac{\Lambda}{r_{+}^{2}+a^{2}}(r_{++}-r_{+})(r_{++}-r_{-})(r_{++}-r_{--})\quad(6.3.106)$$

和视界温度

$$T_{++}=\frac{\kappa_{++}}{2\pi k_{b}}.\quad(6.3.107)$$

当$\frac{1}{\Lambda}\gg M^{2}$，有

$$\kappa_{+}\sim\frac{1}{2}\frac{r_{+}-r_{-}}{r_{+}^{2}+a^{2}},r_{\pm}\sim M\pm\sqrt{M^{2}-a^{2}-Q^{2}},$$

$$\kappa_{++}\sim\left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{\frac{1}{2}}.\quad(6.3.108)$$

本节所得结果相当一般，可退化为克尔-纽曼黑洞等特殊情况.

6.4　黑洞的准正规模

通常认为，黑洞在受到外场扰动后的演化可以分为三个阶段：第一阶段是初始波动阶段，这一阶段波的频率跟初始扰动的性质有关；第二阶段是衰减振荡阶段，

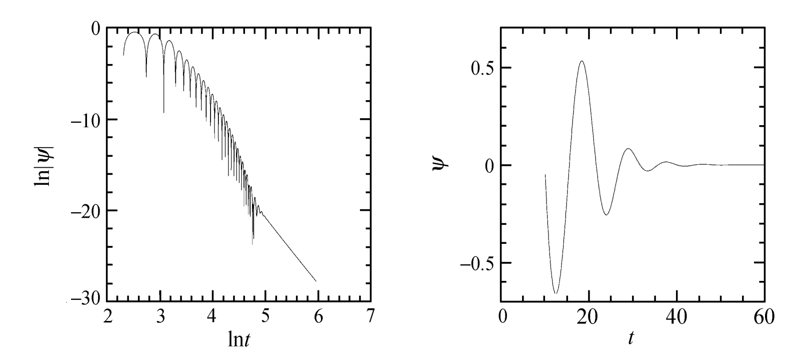


图24　施瓦西(Schwarzschild)黑洞时空中高斯引力波包的演化示意图

(左图采用对数坐标，右图采用通常的时空坐标)两图清晰描述了高斯引力波包演化过程的准正模和幂律拖尾阶段

即准正规模(quasinormal modes)阶段,这一阶段的引力波谱是衰减振荡的,其振荡频率和衰减时标仅仅取决于黑洞时空背景的结构,与初始扰动无关;最后的阶段是晚期的幂律拖尾阶段,此时微扰场的衰减形式不再是指数衰减,而是幂律衰减.该阶段是由于微扰场在渐近无限远处的逆向散射引起的.

准正规模的频率(ω_{QN})为复数,实部代表时空的振荡的快慢,而虚部代表该扰动衰减的快慢.黑洞不会永远稳定地振荡下去,它会随时间发生指数衰减,这表明黑洞在波的传播过程中会损失能量.其实,任何现实物体都存在能量的损失,不过,在处理振荡问题时,人们通常为了方便假设没有能量损失,即不会有衰减的振荡.然而,正因为黑洞跟时空的紧密联系,我们在处理黑洞问题时,不能把能量损失忽略掉,因为任何时空的扰动代表引力波的产生,而引力波会携带能量向无穷远传播,这就不可避免地会有能量损失.

现在,我们来定义什么是准正规模.黑洞时空中各种场源的微扰方程最终可转化为一个二阶的偏微分方程:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}-V\right]\Psi(x,t)=0. \tag{6.4.1}$$

x 为一个空间变量,它的变化范围通常为 $-\infty<x<+\infty$.在黑洞视界处,它的值为 $-\infty$. V 为依赖 x 的势函数.为了定义什么是准正规模,我们通常假设波函数 $\Psi(x,t)$ 可以如下进行分离变量:

$$\Psi(x,t)=e^{-i\omega t}\psi(x). \tag{6.4.2}$$

把它代入(6.4.1)式中,我们可得到一个关于空间变量 x 的微分方程

$$\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}+(\omega^2-V)\psi(x)=0. \tag{6.4.3}$$

对于渐近平直时空,势函数总为正数且满足

$$V\to 0,\quad x\to\pm\infty. \tag{6.4.4}$$

因此,这种类型的势不允许有束缚态的存在,方程的解不可能是正规模的展开形式.然而在边界 $\pm\infty$,方程的解具有平面波的形式:

$$\psi(x)\sim e^{\pm i\omega x},\quad x\to-\infty, \tag{6.4.5}$$

$$\psi(x)\sim e^{\pm i\omega x},\quad x\to+\infty. \tag{6.4.6}$$

我们通常定义准正规模的边界条件为:在无穷远处 $x=+\infty$,方程的解为纯粹的出射波,在黑洞视界处 $x=-\infty$,方程的解应为纯入射波,即

$$\psi(x)\sim e^{-i\omega x},\quad x\to-\infty, \tag{6.4.7}$$

$$\psi(x)\sim e^{+i\omega x},\quad x\to+\infty. \tag{6.4.8}$$

研究表明只有波函数的频谱 ω_{QN} 为离散的复数值时才满足上述的边界条件.我们把具有这样频谱的波函数称为准正规模. Vishveshwara 证明在 Schwarzschild 黑洞时空,频谱 ω_{QN} 必须有一个负的虚部.这个结论也可推广到其他黑洞时空中.这也

意味着准正规模是随时间指数衰减的. 其物理意义为波在黑洞时空中是释放能量的. 另一方面也表明时空是稳定的. 此外,用解析的方法去求方程满足此类边界条件的精确解是 不可能的. 这意味着我们只能求救于数值计算. 尽管虚部为负也可以帮助我们在进行数值计算时对某些根的取舍,但是如何在计算出来的结果中鉴别出正确的准正模仍然并不轻松,有时候这项工作十分繁重. 1975 年, Chandrasekhar 和 Detweiler 用数值计算的方法成功地找到 了 Schwarzschild 黑洞时空的准正规模频谱. 此后,数值计算的技巧也在不断改进. 像 Schutz 和 Will 设计的 WKB 近似法,后来改善到三阶 WKB 近似,近来还发展到六阶 WKB 近似. 此外还有 Pöshl-Teller 势近似法等. 其中相当成功的是 Leaver 的连续分数法.

准正规模频谱只与黑洞的基本参量有关. 例如对旋转的 Kerr 黑洞来说,准正规模频谱只与黑洞质量 M 和角动量 a 有关. 因此,可以根据准正规模的振动频率和衰减时间精确地确定黑洞的参数. 考虑探测器探测到了某一黑洞的一个准正规模(如 $l = m = 2$),那么它显示的将是一条随时间做指数衰减的正弦曲线, 其表达式为

$$h(t) = V^{-1/3} e^{-\pi f \frac{t-T}{Q}} \sin 2\pi f(t-T). \tag{6.4.9}$$

Q, f, V 和 T 为它的四个特征参数. Q 为品质因子:

$$Q = \pi f \tau, \tag{6.4.10}$$

τ 为衰减时间. $V^{-1/3}$为引力波的幅度,它与探测仪到波源的距离,微扰的大小以及探测仪与波源的相对角度有关. T 是微扰开始的时间. 注意 Q 和 f 都与准正规模的实部和虚部有关. 人们发现旋转黑洞的 f 和 Q 可近似表示为

$$f \sim \frac{1}{2\pi M}\left[1 - \frac{63}{100}(1-a)^{3/10}\right], \tag{6.4.11}$$

$$Q = \pi f \tau = 2(1-a)^{-9/20}. \tag{6.4.12}$$

因此,只要观测到了准正规模的振动频率和衰减因子,我们原则上可以根据上式确定电中性旋转黑洞的参量.

准正规模与 AdS/CFT 对应

量子场论是目前大家比较认同的一个理论,因为它对世界从微观的角度上作出了比较系统的阐述. 它认为微观粒子可以当作点来处理,粒子只与附近的其他粒子有相互作用. 量子场论自建立以来,已经取得了许多可喜的成绩. 它能很好地处理电磁作用、弱相互作用和强相互作用. 但是它不能处理引力作用. 假如我们认为粒子不是点状的,而是弦状的,那么我们有可能在统一的框架里对引力进行量子化. 所有的弦理论中都包含有质量为零、自旋为二的粒子. 由于质量为零、自旋为二的粒子之间的相互作用就是引力作用,所以所有的弦理论都能够处理引力作用. 另外,量子色动力学是建立在规范群为 SU(3) 基础上的规范理论,它认为物质是

由夸克、胶子组成的.量子色动力学认为能量增加时,粒子之间 的有效耦合常数就会减小.在低能条件下,由于耦合很强,使得计算很难进行.人们发现当色数 N 很大时,理论计算可以简化.研究强烈地暗示大色数 N 量子色动力学理论与弦耦合常数为 $1/N$ 的弦理论一致.当 $N\to\infty$ 的量子色动力学理论与弦理论之间的对应就是我们常说的 AdS/CFT 对应. AdS/CFT 对应也表明 n 维 AdS 时空中的物理完全可用 $n-1$ 维的共形场论来描述.也就是说,物理信息保存在 n 维 AdS 时空中的共形边界上. 由于弦理论能够处理引力相互作用,因此 AdS/CFT 对应表明引力理论和场论之间存在一种对应.于是 AdS 黑洞时空中的准正规模频谱就有一个 非常直接的解释. 由 AdS/CFT 对应,静态的大质量 AdS 黑洞对应着共形场论中的一个热力学平衡态,给黑洞时空一个微扰就是给这个平衡态一个微扰.微扰的衰减过程也是系统返回平衡态的过程. 通常,在 CFT 中直接计算系统返回平衡态的时间标度是非常困难的,甚至可以说是几乎不可能的.由于准正规模能够描述微扰的衰减,因此如果我们计算出了 AdS 黑洞时空的准正规模频谱,就可直接得到 CFT 中系统返回平衡态的时间标度.

准正规模与黑洞视界面积量子化

早在 20 世纪 40 年代,人们就已经认识到了有必要对引力场进行量子化.然而,至今人们还没有建立完备的引力量子化理论.人们认为黑洞非常像量子力学建立初期的氢原子,将在建立完备的引力量子化理论过程中起非常重要的作用.

黑洞的量子化是建立在非极端黑洞的视界面积是一个经典绝热不变量这一伟大发现之上的. 由 Ehrenfest 原理,任何经典绝热不变量都对应着有分立谱的量子体系.因此 Bekenstein 猜想非极端黑洞的视界面积应该有一个分立的本征谱. Bekenstein 发现非极端黑洞吸收一个有限大小的中性粒子,必然导致黑洞面积的增加,且黑洞面积的增加量有一个下限

$$(\Delta A)_{\min} = 8\pi l_p^2, \tag{6.4.13}$$

其中 $l_p=\left(\frac{G}{c^3}\right)^{1/2}\hbar^{1/2}$ 为普朗克长度.同样,Hod 发现,当黑洞吸收一个有限大小的带电粒子时,黑洞面积的增加量也有一个相似的下限

$$(\Delta A)_{\min} = 4l_p^2. \tag{6.4.14}$$

因此人们猜测黑洞视界面积的量子化形式为

$$A_n = \gamma l_p^2 n, \quad n = 1,2,3,\cdots \tag{6.4.15}$$

γ 为一量纲为一的常数.黑洞视界面积的量子化也表明黑洞视界是由面积为 γl_p^2 的小块补丁拼凑而成的.(关于黑洞视界面积的量子化,我们在 6.8 ~6.11 节中还要讨论.)另外,我们认为无论这些补丁的形状和位置怎么样,每一块补丁都是等同的.假设每一块补丁具有相同的量子态数 k,那么黑洞视界的总的量子态数为

$$N = k^{\frac{A}{\gamma l_p^2}}. \tag{6.4.16}$$

因此,黑洞视界的 Boltzmann 统计熵为

$$S = \lg N = \frac{A}{\gamma l_p^2} \lg k. \tag{6.4.17}$$

与黑洞的 Hawking-Bekenstein 熵公式 $S = \frac{A}{4}$ 进行对比,我们发现

$$\gamma = 4\lg k. \tag{6.4.18}$$

这是统计力学对 γ 的形式所作出的要求. 然而 k 的值为多少一直不能确定. 最近 Hod 从 Schwarzschild 黑洞时空中的高度衰减的准正规模出发,利用 Bohr 的对应原理,确定了 k 的值为 3. 不久,Motl 和 Neitzke 利用解析的方法求出了 Schwarzschild 黑洞时空中标量微扰和引力微扰场的高度衰减的准正规模频谱公式,发现它正好满足 Hod 猜想!

Hod 猜想

Nollert 利用数值方法发现 Schwarzschild 黑洞时空中标量场快速衰减的准正规模的频谱为

$$M\omega_n = 0.0437123 - \frac{\mathrm{i}}{4}\left(n + \frac{1}{2}\right) + O[(n+1)^{-1/2}] \quad n \to \infty, \tag{6.4.19}$$

其中 M 为黑洞的质量. 显然,它与场的角量子数 l 没有关系. 因此快速衰减的准正规模只反映黑洞自身的特征. Hod 通过仔细地研究,天才般地猜测到与快速衰减的准正规模频率的实部有关的 0.0437123 正好等于 $\ln 3/(8\pi)$.

另外,根据玻尔对应原理,在大量子数的情况下,系统的量子跃迁频率应该等于经典的谐振频率. Hod 认为快速衰减的准正规模的虚部很大,说明黑洞返回静止状态的驰豫时间很短. 根据量子力学,量子跃迁是不需要时间的. 因此快速衰减的准正规模所对应的过程可看作一种量子跃迁. 而快速衰减的准正规模的实部可以当作这一量子跃迁所辐射的频率.

当 Schwarzschild 黑洞辐射一个粒子时,它能量的改变量为 $\Delta M = E = \hbar\omega = \hbar \mathrm{Re}(\omega_n)$. 又因为黑洞的视界面积为 $A = 16\pi M^2$,根据黑洞热力学,我们有

$$\Delta A = 32\pi M \Delta M = 4\hbar \ln 3. \tag{6.4.20}$$

Dreyer 由此还确定了圈引力理论中的 Barbero-Immirzi 参数 $\gamma = 4\hbar \ln 3$. 从而也可得出在圈量子引力理论中,基本的规范群应该为 $SO(3)$. 因此,人们希望通过对准正规模频谱的研究能找到通往引力场量子化的途径.

下面讨论准正规模的几种主要研究方法.

Pöshl-Teller 势近似法

黑洞时空中许多微扰场的有效势为一势垒. 从量子力学的观点来看,一束入

射波经过势垒时,一部分波会被反射回去,一部分波会透过势垒.而且对频率为任一实数的波而言,它的反射系数 R 是有限的.如果把这个问题延拓到复数域来进行考虑的话,我们发现准正规模对应着反射系数的奇点,而且这些奇点的分布在复平面上是沿虚轴对称的.研究表明,如果有效势为一势阱的话,则反射系数的奇点对应着这一势阱的束缚态.在这里,我们发现有效势为势垒的准正规模与它的倒置势的束缚态之间有一个对应.令 p 为与有效势有关的参数.我们将有效势表示为 $V(x;p)$,波函数 $\psi(x;p)$ 和准正规模频谱 $\omega(x;p)$ 也都是参数 p 的函数.现在做一个变换:$x\to -\mathrm{i}x$, $p\to p'=\Pi(p)$.假设有效势在这种变换下保持不变:

$$U(-\mathrm{i}x;\ p') = U(x;p). \tag{6.4.21}$$

令

$$\phi(x;p) = \psi(-\mathrm{i}x;p'),\quad \Omega(p) = \omega(p'). \tag{6.4.22}$$

我们发现波函数 ϕ 满足薛定谔方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} + (-\Omega^2 + V)\phi = 0. \tag{6.4.23}$$

且准正规模的边界条件也变为

$$\phi(x;p) \sim \mathrm{e}^{\mp\Omega x},\quad x\to\pm\infty. \tag{6.4.24}$$

显然当 p 为正实数时,方程(6.4.23)和方程(6.4.24)分别对应着势为 $-V$ 的薛定谔方程和束缚态的边界条件.一旦 Ω 的值确定了,我们通过一个逆变换就可以确定准正规模的频谱了.然而,我们很难找到 Ω 的解析表达式.以 Schwarzschild 黑洞时空为例,微扰场的有效势可参数化为

$$V(x) = \lambda\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{l(l+1)}{r^2}+\frac{2\sigma M}{r^3}\right). \tag{6.4.25}$$

我们对该有效势进行如下操作

$$x\to -\mathrm{i}x,\quad p = (M,\lambda)\to(-\mathrm{i}M,\ -\lambda), \tag{6.4.26}$$

才能保持有效势的形式不变.令 $\Omega(M,\lambda)$ 为倒置势所对应的束缚态的频率,则 Schwarzschild 黑洞时空中准正规模的频谱为

$$\omega_R + \mathrm{i}\omega_I = \Omega(\mathrm{i}M,\ -1). \tag{6.4.27}$$

由于很难找到 Ω 的解析表达式,我们只能采用一些形式较简单的势来近似地估算 Ω 的形式.

所谓 Pöshl-Teller 势近似法,就是采用 Pöshl-Teller 势的倒置势的束缚态来近似表示黑洞时空中微扰场的准正规模,从而求出能谱的方法.我们知道 Pöshl-Teller 势为

$$V_{PT} = V_0/\cosh^2\alpha(x-x_0). \tag{6.4.28}$$

其中 $\alpha^2 = -\frac{1}{2V_0}\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\bigg|_{x=x_0}$,$V_0$ 为势垒的最大值.把 V_{PT} 代入方程(6.4.23),我们得到

满足边界条件(6.4.24)的束缚态波函数为

$$\phi = [\xi(1-\xi)]^{i\omega/(2\alpha)} F\left[1+\beta+\frac{i\omega}{\alpha}, -\beta+\frac{i\omega}{\alpha}; 1+\frac{i\omega}{\alpha}; \xi\right]. \quad (6.4.29)$$

其中

$$\xi^{-1} = 1 + e^{-2\alpha(x-x_0)}, \quad (6.4.30)$$

$$\beta = -\frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4} - \frac{V_0}{\alpha^2}\right]^{1/2}. \quad (6.4.31)$$

当 $x \to +\infty$ 时,$\xi \to 1$. 此时波函数为

$$\phi = \frac{R}{T} e^{-i\omega x} + \frac{1}{T} e^{i\omega x}. \quad (6.4.32)$$

其中反射系数 R 和透射系数 T 分别为

$$R = \frac{\Gamma(-i\omega/\alpha)\Gamma(1+\beta+i\omega/\alpha)\Gamma(-\beta+i\omega/\alpha)}{\Gamma(i\omega/\alpha)\Gamma(1+\beta)\Gamma(-\beta)},$$

$$T = \frac{\Gamma(1+\beta+i\omega/\alpha)\Gamma(-\beta+i\omega/\alpha)}{\Gamma(1+i\omega/\alpha)\Gamma(i\omega/\alpha)}. \quad (6.4.33)$$

根据 Γ 函数的性质,我们知道反射系数 R 和透射系数 T 的奇点位于 $1+\beta+i\omega/\alpha = -n$ 或者 $-\beta+i\omega/\alpha = -n$ 处. 黑洞的准正规模频谱为

$$\omega_R = (V_0 - \alpha^2/4)^{1/2}, \quad \omega_I = \alpha\left(n+\frac{1}{2}\right). \quad (6.4.34)$$

因此,采用 Pöshl-Teller 势近似法,只要找出有效势的最大值 V_0,以及它在峰值位置时对 x 的二阶导数,就可利用上式计算出黑洞的准正规模频谱. 由此可见,当有效势的形状与 Pöshl-Teller 势的吻合程度越高,我们计算准正规模频谱的精度就越高. 尽管这种方法计算非常简单,但是并不是所有黑洞中的微扰场的有效势都与 Pöshl-Teller 势吻合得很好.

WKB 近似法

在量子力学中,我们常常用 WKB 近似来处理粒子穿透势垒的问题. 由于黑洞时空中微扰场的有效势为一势垒,且微扰方程的形式与薛定谔方程相似,因此,我们也可以采用 WKB 近似来估算黑洞时空中的准正规模频谱.

引入微扰参数 ϵ,黑洞时空中微扰场的主方程为

$$\epsilon^2 \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + Q(x)\psi(x) = 0. \quad (6.4.35)$$

其中 $Q(x) = \omega^2 - V(x)$. 令波函数

$$\psi(x) = e^{S(x)/\epsilon}. \quad (6.4.36)$$

WKB 近似的主要思想为:把 $S(x)$ 按 ϵ 作幂级数渐近展开,然后逐级近似求解.

令

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n S_n(x), \tag{6.4.37}$$

把它代入主方程(6.4.35),然后比较 ϵ 的同幂次项,可求得

$$S_0(x) = \pm \mathrm{i}\int^x Q(\eta)^{1/2}\mathrm{d}\eta, \quad S_1(x) = -\frac{1}{4}\ln Q(x). \tag{6.4.38}$$

在Ⅰ区,当 $x\to+\infty$ 时,有 $S_0\to\pm\mathrm{i}\omega x$,正号表示朝向 $+\infty$ 出射波,负号表示来自 $+\infty$ 的入射波. 在Ⅲ区, 当 $x\to-\infty$ 时,有 $S_0\to\pm\mathrm{i}\tilde{k}x$,此时正号表示来自 $-\infty$ 的入射波,负号表示朝向 $-\infty$ 的出射波. 因此, Ⅰ区和Ⅲ区中的通解分别为

$$\psi \sim Z_{in}^{\mathrm{I}}\psi_-^{\mathrm{I}} + Z_{out}^{\mathrm{I}}\psi_+^{\mathrm{I}}, \quad \psi \sim Z_{in}^{\mathrm{III}}\psi_+^{\mathrm{III}} + Z_{out}^{\mathrm{III}}\psi_-^{\mathrm{I}}. \tag{6.4.39}$$

我们假设 Z_{in}^{I}, Z_{out}^{I}和 Z_{in}^{III}, Z_{out}^{III}之间存在线性关系:

$$\begin{bmatrix} Z_{out}^{\mathrm{III}} \\ Z_{in}^{\mathrm{III}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{out}^{\mathrm{I}} \\ Z_{in}^{\mathrm{I}} \end{bmatrix}. \tag{6.4.40}$$

下一步工作就是要确定上述线性方程中的系数. 为此,我们必须考虑方程在Ⅱ区中的解. 在量子力学中,我们通常的做法为:尽管在拐点附近 WKB 近似解失效,但我们在拐点的邻域内找出方程的严格解,然后找出它在离拐点较远处的渐近行为,让它与 WKB 近似解衔接起来再确定我们所要求的系数. 然而在讨论黑洞的准正规模时,标准的 WKB 衔接就会失效. 在量子力学中,通常反射波的幅度和入射波的幅度基本差不多,而透射波的幅度很小. 也就是说,反射系数很大而透射系数很小. 应用 WKB 近似所得到的透射系数为 e^{-B},B 为势垒穿透因子,它的大小取决于 $[-Q(x)]^{1/2}$在两个拐点之间的积分. 在黑洞的准正规模中,由于它的边界条件不一样,因而反射波和透射波的幅度在同一数量级上. 即它不满足反射系数很大而透射系数很小这一条件. 此时,我们不得不对标准的 WKB 衔接做一些简单的改进. 在Ⅱ区我们将 $-Q(x)$做一个二阶的泰勒展开. 然后把Ⅱ区求得的解做渐近近似,再与两个 WKB 解衔接,利用边界条件,求出准正规模的频谱.

我们将 $-Q(x)$做一个关于 x_0(有效势的最大值所对应的 x 的值)的二阶泰勒展开:

$$Q(x) = Q_0 + \frac{1}{2}Q_0'' z^2, \tag{6.4.41}$$

这里 $z=x-x_0$. 此时微扰主方程(6.4.35)为

$$\epsilon^2 \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}z^2} + k(-z_0^2 + z^2)\psi = 0. \tag{6.4.42}$$

其中 $k=\frac{1}{2}Q_0''$,$z_0^2 = -2Q_0/Q_0''$.

在Ⅱ区内,有 $|z|<z_0\approx\epsilon^{1/2}$. 为了能够找到Ⅱ区内解的渐近形式, 我们定义一

个新的变量

$$t = (4k)^{1/4} e^{-i\pi/4} z/\epsilon^{1/2}. \tag{6.4.43}$$

令

$$\upsilon + \frac{1}{2} = -ik^{1/2} z_0^2/(2\epsilon), \tag{6.4.44}$$

则方程(6.4.42)变为

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \left[\upsilon + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t^2\right]\psi = 0. \tag{6.4.45}$$

求出方程(6.4.45)的解,然后求出 S_0,S_1 在 $z=\pm z_0$ 附近的表达式. 经过一番冗长而繁琐地计算,我们最终得到

$$\begin{bmatrix} Z_{out}^{\mathrm{III}} \\ Z_{in}^{\mathrm{III}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\pi\upsilon} & iR^2 e^{i\pi\upsilon}(2\pi)^{1/2}/\Gamma(\upsilon+1) \\ R^{-2}(2\pi)^{1/2}/\Gamma(-\upsilon) & e^{-i\pi\upsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{out}^{\mathrm{I}} \\ Z_{in}^{\mathrm{II}} \end{bmatrix}. \tag{6.4.46}$$

对于量子力学中粒子穿过势垒的行为,$Q(x)$为实数,$\upsilon+\frac{1}{2}$为复数. 如果粒子从Ⅰ区穿过势垒到达Ⅲ区,此时边界条件为 $Z_{in}^{\mathrm{III}}=0$. 透射系数和反射系数分别为

$$T = \left[1 + e^{2i\pi\left(\upsilon+\frac{1}{2}\right)}\right]^{-1}, \qquad R = \left[1 + e^{-2i\pi\left(\upsilon+\frac{1}{2}\right)}\right]^{-1}. \tag{6.4.47}$$

对于黑洞的准正规模,由于在黑洞视界为纯入射波,在无限远处为纯出射波,因此边界条件可写为 $Z_{in}^{\mathrm{III}}=0$ 和 $Z_{in}^{\mathrm{I}}=0$. 只有当 $\Gamma(-\upsilon)=\infty$ 时,即 υ 为非负整数时,上述边界条件才能满足. 所以我们有

$$n + \frac{1}{2} = -ik^{1/2} z_0^2/(2\epsilon). \tag{6.4.48}$$

令 $\epsilon=1$,则黑洞时空中的准正规模频谱公式为

$$\omega^2 = V_0 - i\left(n + \frac{1}{2}\right)(-2V''_0)^{1/2}. \tag{6.4.49}$$

与 Pöshl-Teller 势近似法相似,一阶 WKB 近似的精度也比较低. 为了提高结果的精度,人们还采用了高阶 WKB 近似,如三阶 WKB 近似和六阶 WKB 近似等等. 至于三阶 WKB 近似,我们在后面的准正规模频谱的估算中将做进一步的讨论.

连续分数法

前面的这些方法尽管能给出黑洞准正规模频谱,但是计算的精度不是很高. 1985 年,Leaver 发现原先用于确定氢离子能谱的连续分数法,可以推广用来求解黑洞的准正规模频谱. 而且他进一步发现用这种所谓的连续分数法能求出非常精确的黑洞准正规模频谱. 它对旋转黑洞也是成立的. 它是目前为止唯一能够用来研究旋转黑洞准正规模频谱的方法. 因此,连续分数法在研究黑洞准正规模的频谱

中占有非常重要的位置. 下面我们讨论这种数值方法.

在 Schwarzschild 黑洞时空中, 令视界半径 $2M=1$, 微扰场的径向方程可写为

$$r(r-1)\frac{d^2\psi_l}{dr^2}+\frac{d\psi_l}{dr}+\left[\frac{\omega^2r^3}{r-1}-l(l+1)+\frac{s^2-1}{r}\right]\psi_l=0, \quad (6.4.50)$$

其中 s 为物质场的自旋. s 取 0, ±1 和 ±2 表示微扰场分别是标量场、电磁场和引力场.

方程(6.4.50)具有两个规则奇点和一个不规则奇点. 两个规则奇点分别位于原点($r=0$)和黑洞视界($r=1$)处, 不规则奇点位于 $r\to\infty$ 的地方. 令 $\rho=-i\omega$, 方程(6.4.50)可变形为

$$r(r-1)\frac{d^2\psi_l}{dr^2}+\frac{d\psi_l}{dr}-\left[\frac{\rho^2r^3}{r-1}+l(l+1)-\frac{s^2-1}{r}\right]\psi_l=0. \quad (6.4.51)$$

该方程的边界条件为

$$\psi_l\to(r-1)^{\rho},\quad r\to1;\quad \psi_l\to r^{-\rho}e^{-\rho r},\quad r\to\infty. \quad (6.4.52)$$

构造满足视界处边界条件的波函数级数解:

$$\psi_l=(r-1)^{\rho}r^{-2\rho}e^{-\rho(r-1)}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{r-1}{r}\right)^n. \quad (6.4.53)$$

其中展开系数 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$ 由下面的三项递推关系确定:

$$\alpha_0a_1+\beta_0a_0=0, \quad (6.4.54)$$

$$\alpha_na_{n+1}+\beta_na_n+\gamma_na_{n-1}=0(n\geqslant1), \quad (6.4.55)$$

其中: $a_0=1$. 递推系数 α_n, β_n 和 γ_n 为微分方程系数和 n 的函数:

$$\begin{aligned}\alpha_n&=n^2+2(\rho+1)n+2\rho+1,\\ \beta_n&=-[2n^2+(8\rho+2)n+8\rho^2+4\rho+l(l+1)-s^2+1],\\ \gamma_n&=n^2+4\rho n+4\rho^2+s^2.\end{aligned} \quad (6.4.56)$$

只要准正频率 $\omega=\omega_n$ 之值能使级数(6.4.53)收敛, 即 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 存在且有限, 则无穷远处的边界条件(6.4.52)得以满足. Baber 和 Hassé 研究了展开系数 a_n 在 $n\to\infty$ 时的渐进行为

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\to1\pm\frac{(2\rho)^{1/2}}{n^{1/2}}+\frac{2\rho^{-3/4}}{n}+\cdots, \quad (6.4.57)$$

发现只要(6.4.57)式取负号, 级数(6.4.53)就一定收敛, 且此时本征值 ρ 恰好对应准正规模的频谱. 根据(6.4.55)式, 我们可以获得 a_n 连续两项之比是一个无穷

连续分数：

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \cfrac{-\gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} - \cfrac{\alpha_{n+1}\gamma_{n+2}}{\beta_{n+2} - \cfrac{\alpha_{n+2}\gamma_{n+3}}{\beta_{n+3} - \cdots}}} \tag{6.4.58}$$

通常,我们采取如下的记号：

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-\gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} -}\,\frac{\alpha_{n+1}\gamma_{n+2}}{\beta_{n+2} -}\,\frac{\alpha_{n+2}\gamma_{n+3}}{\beta_{n+3} -}\cdots. \tag{6.4.59}$$

方程(6.4.59)可以认为是当 $n\to\infty$ 时 a_n 的边界条件. 如果取 $n=0$,我们得到

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{-\gamma_1}{\beta_1 -}\,\frac{\alpha_1\gamma_2}{\beta_2 -}\,\frac{\alpha_2\gamma_3}{\beta_3 -}\cdots \tag{6.4.60}$$

根据方程(6.4.54)有

$$\frac{a_1}{a_0} = -\frac{\beta_0}{\alpha_0}. \tag{6.4.61}$$

显然两者相等,于是我们得到一个隐含准正规模频谱的特征方程：

$$0 = \beta_0 - \frac{\alpha_0\gamma_1}{\beta_1 -}\,\frac{\alpha_1\gamma_2}{\beta_2 -}\,\frac{\alpha_2\gamma_3}{\beta_3 -}\cdots, \tag{6.4.62}$$

其中的 α_n,β_n 和 γ_n 是频率 $\rho=-i\omega$ 的显函数,它们由(6.4.56)式给出. 当然,该方程可以变形为

$$\beta_n - \left(\frac{\alpha_{n-1}\gamma_n}{\beta_{n-1} -}\,\frac{\alpha_{n-2}\gamma_{n-1}}{\beta_{n-2} -}\cdots - \frac{\alpha_0\gamma_1}{\beta_0}\right) = \frac{\alpha_n\gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} -}\,\frac{\alpha_{n+1}\gamma_{n+2}}{\beta_{n+2} -}\,\frac{\alpha_{n+2}\gamma_{n+3}}{\beta_{n+3} -}\cdots \tag{6.4.63}$$

这里 $n=1,2,\cdots$. 通过对连续分数方程(6.4.62)或(6.4.63)的求解,我们就可得到所求黑洞时空中的准正规模频谱. 该方程可通过计算机编程来求解.

这种连续分数法在推导中未作任何的近似. 这就是为什么众多学者在用其他方法求得准正模后还要用 Leaver 的连续分数法来进行验证的原因.

单值法

导致单值法产生的直接原因有以下两个：一是 Hod 猜想是建立在一个假设之上的,即快速衰减的准正规模的频率的实部为 $\ln 3/(8\pi)$. 能否用解析方法把它推导出来关系到 Barbero-Immiriz 参数的确定,也关系到快速衰减的准正规模是否真的与量子引力有关. 因此,人们对此充满了期待. 二是前面所介绍的求准正规模的方法只适应于缓慢衰减的准正规模(n 较小)频谱. 连续分数法从理论上来讲,可计算到 $n\to\infty$ 的情形. 但在实际中,当 n 取到 20～50 时,计算机运行得非常缓慢,甚至会发生死机. 因此,人们也期望能找到一种能够计算高度衰减的准正规模频谱的方法. 2003 年, L. Motl 和 Andersson 提出了一种能够直接计算静态黑洞时空中高

度衰减的准正规模频谱的方法,即所谓的单值法. 它不需用计算机进行繁琐的数值计算,而且能够给出高度衰减的准正规模频谱的解析表达式. 下面我们以 Schwarzschild 和 Reissner-Nordström 黑洞为例,讨论单值法及其相关的研究结果.

Schwarzschild 黑洞

在四维的 Schwarzschild 黑洞时空中,描述微扰场在黑洞背景中演化的方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(r)}{\mathrm{d}x^2}+[\omega^2-V(r)]\psi(r)=0, \tag{6.4.64}$$

其中, $x=r+\frac{1}{2\kappa}\ln(r-2M)$,

$$V(r)=\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{l(l+1)}{r^2}+\frac{2(1-j^2)M}{r^3}\right). \tag{6.4.65}$$

j 为微扰场的自旋. 当 j 为 0, 1,2,1/2 时,表示微扰场分别为标量场、电磁场、引力场和 Dirac 场. 在通常的方法中,对 Schwarzschild 黑洞,我们所研究的区域为 $2M\leqslant r<\infty$. 在单值法中,我们要把研究区域解析延拓到 r 的整个复平面. 显然,在整个复平面上,方程(6.4.64)有两个规则奇点 $r=0$, $r=2M$ 和一个不规则奇点 $r=\infty$. 因此,方程(6.4.64)的解在 r 的复平面在绕奇点 $r=0$ 和 $r=2M$ 的过程中具有多值性. 为了避免在复平面上处理多值函数,我们在 $r=0$ 和 $r=2M$ 之间引入一个截线,并且要求波函数 $\psi(r)$ 除了在截线之外,都满足方程(6.4.64). 当波函数跨越截线时,相位就增加 2π. 然后我们必修选择一个围道,再比较波函数 $\psi(r)$ 绕围道的整体单值性和局部单值性,我们就可求出快速衰减的准正规模的频谱公式.

在选择围道之前,我们必须找到准正规模在复平面上满足的边界条件. 我们知道,在物理区域 $2M\leqslant r<\infty$ 上,准正规模满足下面的边界条件:

$$\psi(r)\sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x},\quad x\rightarrow+\infty,\qquad \psi(r)\sim \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x},\quad x\rightarrow-\infty. \tag{6.4.66}$$

这里,我们假设 $\mathrm{Im}\omega>0$.

在复平面上,我们很容易确定它在视界 $r=2M$ 处所满足的边界条件. 因为在视界附近,波函数可写为 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\omega x}$,而且我们要求波函数沿逆时针方向绕奇点 $r=2M$ 一周具有单值 $\mathrm{e}^{\pi\omega/\kappa}$. 因此,在边界视界处,我们有

$$\psi(r)\sim \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x},\quad x\rightarrow-\infty. \tag{6.4.67}$$

在视界 $r=\infty$ 处,我们必须通过一个"Wick 旋转"把波函数解析延拓到曲线 $\mathrm{Im}\,\omega x=0$ 上. 由于快速衰减的准正规模的频率 ω 可看作一个纯虚数(因为它的实部太小了),曲线 $\mathrm{Im}\omega x=0$ 与曲线 $\mathrm{Re}\,x=0$ 基本重合,因此在无穷远处,波函数满足的边界条件为

$$\psi(r) \sim e^{-i\omega x}, \quad \omega x \to \infty. \tag{6.4.68}$$

现在我们通过曲线 Re $x=0$ 的形状来选择正确的围道. 在四维的 Schwarzschild 黑洞时空中,曲线 Re $x=0$ 为下图所示,划斜线的区域为 Re $x<0$. 所选的围道为图中的 L. 对比局部单值性和整体单值性,我们可得到四维的 Schwarzschild 黑洞时空中各类微扰场的快速衰减的准正规模的频谱公式

$$e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} = -(1+2\cos j\pi), \tag{6.4.69}$$

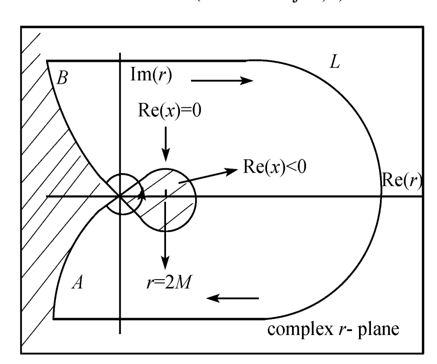


图 25　Schwarzschild 黑洞时空中的曲线 Re $x=0$ 的形状和所选的围道 L

即

$$\frac{2\pi\omega}{\kappa} = \text{In}(1+2\cos j\pi) \pm i(2n+1)\pi, \quad n \to \infty. \tag{6.4.70}$$

对标量场和引力场($j=0,2$)来说,我们发现其快速衰减的准正规模的频谱公式为

$$\frac{2\pi\omega}{\kappa} = \text{In}3 \pm i(2n+1)\pi, \quad n \to \infty. \tag{6.4.71}$$

不难发现它与 Hod 猜想的完全一致.

Reissner-Nordström 黑洞

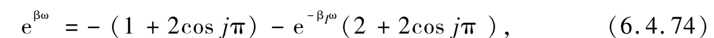
Schwarzschild 黑洞只有一个参数——黑洞质量 M,而 Reissner-Nordström 黑洞除了质量参数 M 外,它还带有电量 Q. 电量 Q 的出现使黑洞拥有内、外两个视界,从而使我们的研究更加复杂. 在 Reissner-Nordström 黑洞度规中, 由于

$$f = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = \frac{(r-r_+)(r-r_-)}{r^2}, \tag{6.4.72}$$

其中 r_+, r_- 为内、外视界的半径,乌龟坐标变为

$$x = r + \frac{1}{2\kappa_+}\ln(r - r_+) - \frac{1}{2\kappa_-}\ln(r - r_-), \qquad (6.4.73)$$

$\kappa_\pm$ 为黑洞内、外视界的表面引力常数. 它比 Schwarzschild 黑洞时空中的乌龟坐标多了一项,因此在复 r 平面上,曲线 Re $x=0$ 的形状比 Schwarzschild 黑洞时空中要复杂得多(见图 26). 同样对比波函数 $\psi(z)$ 的整体单值性和局域单值性,我们得到 Reissner-Nordström 黑洞时空中微扰场的快速衰减的准正规模的频谱公式



$$e^{\beta\omega} = -(1 + 2\cos j\pi) - e^{-\beta_I\omega}(2 + 2\cos j\pi), \qquad (6.4.74)$$

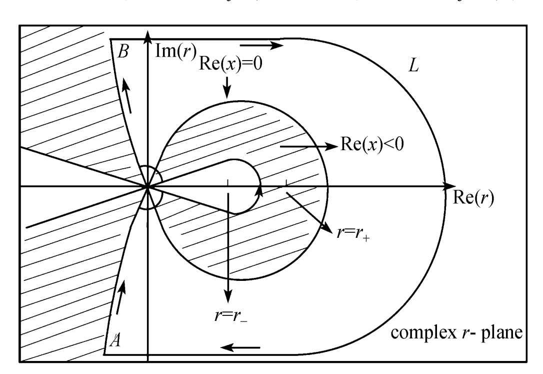


图 26 Reissner-Nordström 黑洞时空中的曲线 Re x =0 的形状和所选的围道 L

这里 β_I 和 β 分别为 Reissner-Nordström 黑洞内、外视界的 Hawking 温度的倒数. 注意,这里 j 不是微扰场的自旋. 对标量场, j 为 1/3 时,对引力场, j 为 5/3. 把 $j=1/3$ 和 5/3 代入式(6.4.74),我们发现标量场和引力场快速衰减的准正规模频谱公式均可写为

$$e^{\beta\omega} = -2 - 3e^{-\beta_I\omega}. \qquad (6.4.75)$$

静态 Gibbons-Maeda dilaton 黑洞

从弦理论的低能有效 Lagrange 作用量所得到的 Gibbons-Maeda dilaton 黑洞度规为

$$ds^2 = -\frac{(r' - r'_+)(r' - r'_-)}{r'^2 - D^2}dt^2 + \frac{r'^2 - D^2}{(r' - r'_+)(r' - r'_-)}dr'^2 + (r'^2 - D^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \qquad (6.4.76)$$

dilaton 荷 $D=(P^2-Q^2)/2M$,黑洞视界位于 $r'_\pm = M \pm \sqrt{M^2+D^2-P^2-Q^2}$. 其中,参数 P 和 Q 分别表示黑洞的磁荷和电荷. 当 dilaton 荷 D 为零, Gibbons-Maeda dila-

ton 黑洞退化为 Reissner-Nordström 黑洞.

我们先引进一个坐标变换

$$r^2 = r'^2 - D^2, \tag{6.4.77}$$

黑洞度规变为

$$ds^2 = -\frac{(\sqrt{r^2+D^2}-r'_+)(\sqrt{r^2+D^2}-r'_-)}{r^2}dt^2 + \frac{r^2}{(r^2+D^2)} \times \frac{r^2}{(\sqrt{r^2+D^2}-r'_+)(\sqrt{r^2+D^2}-r'_-)}dr^2 + r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2). \tag{6.4.78}$$

黑洞的内外视界分别位于 $r_\pm = \sqrt{r'^2_\pm - D^2}$.

Gibbons-Maeda dilaton 黑洞时空中的乌龟坐标为

$$x = \sqrt{r^2+D^2} - D + \frac{r'^2_+ - D^2}{r'_+ - r'_-}\ln\left[\frac{\sqrt{r^2+D^2}-r'_+}{r'_+ - D}\right] - \frac{r'^2_- - D^2}{r'_+ - r'_-}\ln\left[\frac{\sqrt{r^2+D^2}-r'_-}{r'_- - D}\right] \tag{6.4.79}$$

经过一系列代数计算,我们得到 Gibbons-Maeda dilaton 黑洞时空的有效势:

$$V[r(x)] = \frac{(\sqrt{r^2+D^2}-r'_+)(\sqrt{r^2+D^2}-r'_-)}{r^2} \times \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{3D^2(\sqrt{r^2+D^2}-r'_+)(\sqrt{r^2+D^2}-r'_-)}{r^6} - \frac{r^2[\sqrt{r^2+D^2}(r'_+ + r'_-) - 2r'_+r'_-]}{r^6} + \xi R\right], \tag{6.4.80}$$

Ricci 曲率标量 R 为

$$R = \frac{2D^2[D^2 + r^2 - \sqrt{D^2+r^2}(r'_+ + r'_-) + r'_+r'_-]}{r^6}. \tag{6.4.81}$$

在 Gibbons-Maeda dilaton 黑洞时空中,乌龟坐标 x 的形式与 Reissner-Nordström 黑洞的相似. 因此我们所选的围道也与 Reissner-Nordström 黑洞的相似. 在原点 $r=0$ 附近, 乌龟坐标可近似为

$$z \sim \frac{r^4}{4D(r'_+ - D)(r'_- - D)}, \tag{6.4.82}$$

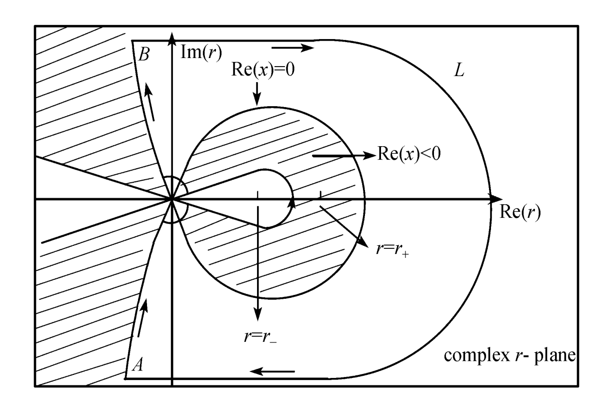


图 27 Gibbons-Maeda dilaton 黑洞时空中的曲线 Re $x=0$ 的形状和所选的围道 L

时空的 Ricci 曲率标量和有效势的渐进形式分别为

$$R\sim\frac{2D^2(r'_+-D)(r'_--D)}{r^6},\tag{6.4.83}$$

和

$$V[r(z)]\sim-\frac{3-2\xi}{16z^2}.\tag{6.4.84}$$

令 $j=\frac{\sqrt{2\xi+1}}{2}$，在原点 $r=0$ 附近的径向方程则近似为

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}+\omega^2+\frac{1-j^2}{4z^2}\right)\psi(z)=0.\tag{6.4.85}$$

但是,由于 Gibbons-Maeda dilaton 黑洞中存在内、外两个视界,因此,我们所选的围道 L 与前面的有一点不同. 如图所示，它有一个圆形突出部位. 这样选的目的是我们让围道所围的区域只包含外视界 $r=r_+$. 因为我们只知道准正规模在外视界 $r=r_+$ 的边界条件. 选好了围道之后,我们就可以分析波函数的整体单值性和局部单值性了.

在 A 点,波函数满足边界条件：

$$A_+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_+}+A_-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_-}=0.\tag{6.4.86}$$

因此,波函数 $\psi(z)$ 在 A 点渐进形式为

$$\psi(z)\sim(A_+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_+}+A_-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_-})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega z}.\tag{6.4.87}$$

如图所示,要从 A 点沿着围道到达 B 点的话,我们首先要在复 r 平面上绕原点转 $\pi/2$ 的角度,也就是说在复 z 平面上绕点 $z=0$ 转 2π 的角度. 根据 Bessel 函数在原点附近的性质,我们发现转 2π 之后,波函数的渐进形式变为

$$\psi(z) \sim (A_+ e^{5i\alpha_+} + A_- e^{5i\alpha_-}) e^{-i\omega z} + (A_+ e^{3i\alpha_+} + A_- e^{3i\alpha_-}) e^{i\omega z}. \tag{6.4.88}$$

然后,我们必须沿着圆形突出部位前进. 在这个过程中,波函数可当作平面波来处理. 走完了整个圆形突出部位之后,我们再一次进入 Bessel 区域. 但是,这一次,对 z 来说, 必须增加一个附加距离:

$$\delta = -\frac{\pi i}{\kappa_-}. \tag{6.4.89}$$

此时,演化方程的通解变为

$$\psi(z) = B_+ c_+ \sqrt{\omega(z-\delta)} J_{+\frac{j}{2}}(\omega(z-\delta)) + B_- c_- \sqrt{\omega(z-\delta)} J_{-\frac{j}{2}}(\omega(z-\delta)). \tag{6.4.90}$$

根据波函数的连续性和渐进性质,我们得到下列约束条件:

$$\begin{aligned} A_+ e^{3i\alpha_+} + A_- e^{3i\alpha_-} &= (B_+ e^{i\alpha_+} + B_- e^{i\alpha_-}) e^{-i\omega\delta}, \\ A_+ e^{5i\alpha_+} + A_- e^{5i\alpha_-} &= (B_+ e^{-i\alpha_+} + B_- e^{-i\alpha_-}) e^{i\omega\delta}. \end{aligned} \tag{6.4.91}$$

为了到达 B 点,我们还必须绕点 $z=\delta$ 转一个 2π 的角. 波函数 $\psi(z)$ 在 B 点附近的渐进形式也变为

$$\psi(z) \sim (B_+ e^{3i\alpha_+} + B_- e^{3i\alpha_-}) e^{i\omega\delta} e^{-i\omega z} + (B_+ e^{5i\alpha_+} + B_- e^{5i\alpha_-}) e^{-i\omega\delta} e^{i\omega z}. \tag{6.4.92}$$

最后,我们沿着右半平面上的大半个圆圈回到 A 点,发现函数 $e^{-i\omega z}$ 必须乘上因子:

$$\frac{(B_+ e^{3i\alpha_+} + B_- e^{3i\alpha_-}) e^{i\omega\delta}}{A_+ e^{i\alpha} + A_- e^{i\alpha_-}} = -(1 + 2\cos\pi j) - e^{2i\omega\delta}(2 + 2\cos\pi j). \tag{6.4.93}$$

对于整体单值性的分析,因为围道里面只包含外视界 $r=r_+$, 所以我们发现函数 $e^{-i\omega z}$ 必须乘上的因子为 $e^{2\pi\omega/\kappa_+}$.

通过对比波函数绕围道的整体单值性和局域单值性,我们可以直接得到 Gibbons-Maeda dilaton 黑洞时空中非最小耦合标量场的快速衰减的准正规模频谱公式

$$e^{\beta\omega} = -\left[1 + 2\cos\left(\frac{\sqrt{2\xi+1}}{2}\pi\right)\right] - e^{-\beta_I\omega}\left[2 + 2\cos\left(\frac{\sqrt{2\xi+1}}{2}\pi\right)\right]. \tag{6.4.94}$$

Gibbons-Maeda dilaton 黑洞时空中非最小耦合标量场的快速衰减的准正规模频谱不仅取决于背景时空的参数,也取决于微扰标量场与时空的耦合常数 ξ. 事实再一次表明物质场与引力场的相互作用会对其快速衰减的准正规模频谱产生影响. 通过对比,我们发现 Gibbons-Maeda dilaton 黑洞时空中非最小耦合标量场的快速衰减的准正规模频谱与 Reissner-Nordström 黑洞时空中的快速衰减的准正规模频谱相似. 两者都有一个来自相移 δ 的修正项. 像 Reissner-Nordström 黑洞时空中的快速衰减的准正规模频谱在 Q 趋向于零时不能返回 Schwarzschild 黑洞时空的准正规模频谱一样,它在 dilaton 荷 D 为零时,也不能返回到 Reissner-Nordström 黑

洞的情况. 数学上的理由是变量 z 和有效势 V 严重地依赖参数 D 和 P. 然而,当耦合因子 ξ 和磁荷 P 均为零时,我们发现 Gibbons-Maeda 黑洞时空中的耦合标量场的快速衰减的准正规模频谱的实部为 $T_H\ln 3$,这与 GHS dilaton 黑洞时空中的最小耦合标量场准正规模频谱一致. 更令人感兴趣的是当耦合因子 $\xi=\dfrac{91}{18}$时,公式(6.4.94) 变为 $e^{\beta\omega}+2+3e^{-\beta/\omega}=0$, 它的形式与 Reissner-Nordström 黑洞时空的完全一致. 这也表明物质场与引力场的相互作用对其快速衰减的准正规模频谱有着十分重要的作用.

6.5 黑洞时空中衰减缓慢的准正规模

由于黑洞时空中的准正规模携带有黑洞的特征信息,因而被誉为黑洞的"特征声音". 这就意味着黑洞时空中的准正规模能为我们提供一种直接鉴定黑洞是否存在的方法. 根据前面的讨论,我们知道黑洞的准正规模频谱为复数,并且虚部为负. 这就意味着黑洞时空中的准正规模是随时间做指数衰减的. 因此,距黑洞非常遥远的天文观测仪器只能接收到那些衰减得比较缓慢的准正规模频谱. 本节我们将以某些特殊的黑洞时空为例,来讨论影响缓慢衰减的准正规模频谱的因素以及它们之间的变化关系.

球对称黑洞 Quintessence 的准正规模

目前大多数科学家认为我们现在所处的宇宙正在加速膨胀. 对很多天文现象的观测(如对 Ia 类超新星、宇宙微波背景辐射的各项异性以及宇宙大尺度结构的观测)结果都支持现在宇宙正在加速膨胀的观点. 然而直到现在,我们还不知道导致宇宙加速膨胀的 真正原因. 在爱因斯坦的引力理论中,人们可以引入暗能量这一理论模型来解释当今宇宙的这种加速膨胀现象. 这一理论模型表明我们当今宇宙中的大部分能量是暗能量. 所谓暗能量,是指压力与能量密度之比为负的能量模型. 现在最主要的暗能量的模型有: 宇宙常数(真空能)模型、quintessence、k-essence 和 phantom 等. 不同的暗能量模型具有不同的状态参数 w(也就是压力与能量密度之比). 例如,在宇宙常数模型中,w 恒为 -1;对 quintessence 模型,w 可以为常数,也可以发生变化,但是它的取值范围为 $-1\leqslant w<0$. 显然, 宇宙常数模型可当作一种特殊的 quintessence 模型. 近来,由于这些理论模型在解释宇宙加速膨胀方面拥有各自的优点,因而受到大家的青睐(详见 6.7 节).

最近 Kiselev 考虑到一静态黑洞的周围充满了一种静态的、球对称的暗能量(quintessence),且其状态参量为常数. 假设 quintessence 的能动张量满足线性叠加性,他最后得到了爱因斯坦场方程的一个依赖态参数 w 的严格解. 在本节,我们将

研究这个黑洞时空中标量场的准正规模,来探讨暗能量的状态参量对微扰场的准正规模的影响.

我们先简单地回顾一下 Kiselev 的工作. 一般球对称静态时空的度规为

$$ds^2 = e^{\upsilon}dt^2 - e^{\lambda}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin\theta^2 d\phi^2), \tag{6.5.1}$$

υ 和 λ 为径向参量 r 的函数. 爱因斯坦的场方程为

$$2T_t^t = -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2}, \tag{6.5.2}$$

$$2T_r^r = -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\nu'}{r}\right) + \frac{1}{r^2}, \tag{6.5.3}$$

$$2T_\theta^\theta = 2T_\phi^\phi = -\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'}{2} - \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2}\right), \tag{6.5.4}$$

其中撇号表示对 r 求导. 假设 quintessence 的能动张量满足线性叠加条件,则它的能动张量的分量满足

$$T_t^t = T_r^r = \rho_q,$$

$$T_\theta^\theta = T_\theta^\phi = -\frac{1}{2}\rho_q(3w+1), \tag{6.5.5}$$

w 是 quintessence 的状态参量. 令 $\lambda = -\ln(1+f)$,于是我们发现变量 f 满足

$$r^2 f'' + 3(w+1)rf' + (3w+1)f = 0. \tag{6.5.6}$$

这是一个二阶微分方程,我们发现它的通解为

$$f = 1 - \frac{r_g}{r} - \frac{c}{r^{3w+1}}, \tag{6.5.7}$$

c 和 r_g 是归一化常数. 令 $r_g = 2M$,我们可得到被 Quintessence 包围的黑洞度规为

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{c}{r^{3w+1}}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{c}{r^{3w+1}}\right)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin\theta^2 d\phi^2), \tag{6.5.8}$$

M 是黑洞质量. 这个度规形式上与 de Sitter/anti-de Sitter 度规相似. 此外, 我们发现大家熟知的 Schwarzschild 度规和 Reissner-Nordström 度规是它的特例. 这也是自然的,因为 Schwarzschild 度规和 Reissner-Nordström 度规分别描述真空(能量为零)和电磁场包围黑洞的情况,而且真空和电磁场的能动张量也满足线性叠加条件.

把度规代入无质量标量场的微扰方程,我们得到径向微扰方程中的有效势为

$$V = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{c}{r^{3w+1}}\right)\left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} + \frac{c(3w+1)}{r^{3w+3}}\right). \tag{6.5.9}$$

显然,有效势与微扰场的角量子数 l 和 quintessence 的状态参量 w 有关. 图 28 描绘了固定 $l=5$ 和 $c=0.001$ 后有效势随态参量 w 的变化关系. 当 w 的绝对值增加时,

势垒的峰值减小,且峰值的位置向右移动.

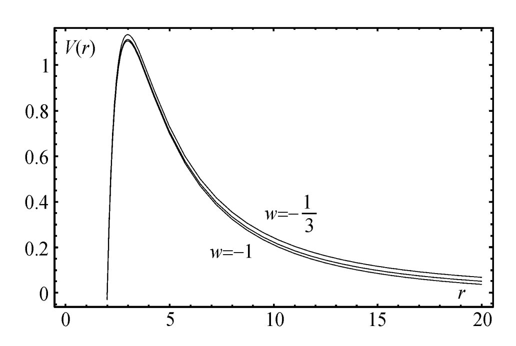


图 28 $l=5$, $c=0.001$ 时, w 分别取 $-1/3$, -0.9, -1 时, quintessence 包围的黑洞时空中无质量标量场的有效势 V 随变量 r 的变化

从(6.5.9)式和图中也可以看出,标量场的准正规模依赖于归一化常数 c 和 quintessence 的态参量 w. 然而,在这里我们只想研究准正规模与态参量 w 的关系. 因此,这里我们令 $M=1$ 和 $c=0.001$. 下面,我们将采用三阶 WKB 近似来估算黑洞时空(6.5.8)式中的标量场的准正规模. 在三阶 WKB 近似中,准正规模的频谱公式为

$$\omega^2=[V_0+(-2V_0'')^{1/2}\Lambda]-\mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)(-2V''_0)^{1/2}(1+\Omega),\tag{6.5.10}$$

其中,

$$\Lambda=\frac{1}{(-2V_0'')^{1/2}}\left\{\frac{1}{8}\left(\frac{V_0^{(4)}}{V_0''}\right)\left(\frac{1}{4}+\alpha^2\right)-\frac{1}{288}\left(\frac{V'''_0}{V_0''}\right)^2(7+60\alpha^2)\right\},\tag{6.5.11}$$

$$\begin{aligned}\Omega=\frac{1}{-2V''_0}\Bigg\{&\frac{5}{6912}\left(\frac{V'''_0}{V''_0}\right)(77+188\alpha^2)\\&-\frac{1}{384}\left(\frac{V'''^2_0V_0^{(4)}}{V''^3_0}\right)(51+100\alpha^2)+\frac{1}{2304}\left(\frac{V_0^{(4)}}{V''_0}\right)^2(67+68\alpha^2)\\&+\frac{1}{288}\left(\frac{V'''_0V_0^{(5)}}{V''^2_0}\right)(19+28\alpha^2)-\frac{1}{288}\left(\frac{V_0^{(6)}}{V''_0}\right)(5+4\alpha^2)\Bigg\},\end{aligned}\tag{6.5.12}$$

$$\alpha=n+\frac{1}{2},\quad V_0^{(n)}=\left.\frac{\mathrm{d}^nV}{\mathrm{d}r_*^n}\right|_{r_*=r_*(r_p)}.$$

把有效势代入上述频谱公式,我们就可以得到 quintessence 包围的黑洞时空中的准正规模频谱. 数值计算表明,暗能量的出现使微扰场的衰减加快.

声学黑洞的准正规模

1981 年,Unruh 提出了声学黑洞的概念并指出有可能在实验室观测到黑洞的 Hawking 辐射. 他们假设有一种流体,它的流速沿流动方向不断的增加. 那么在流体的速度超过声速的地方就形成一个对声波的显视界. 显视界里面的部分就可看作声学黑洞. 此后,人们应用一些不同的流体模型(如超流、凝聚态物质等, 也构造出了声学黑洞.

声学黑洞为人们在实验室研究黑洞的准正规模提供了一条可能的途径. 因此, 近来有许多人 研究声学黑洞时空中的准正规模. 下面我们采用三阶 WKB 近似来研究声学黑洞时空中耦合标量场的准正规模频谱.

首先,我们利用流体力学的有关知识来推导一般声学黑洞时空中耦合标量场的微扰方程. 根据流体力学,流体的连续性方程为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho v)+S=0,\tag{6.5.13}$$

Euler 方程为

$$\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t}+(v\cdot\nabla)v\right]=-\nabla p+F,\tag{6.5.14}$$

F 为作用在流体上的所有外力. S 表示流体由于有源或有漏以及不稳定的漂移对流体密度的影响. 它的形式与源或漏的具体形式有关. 我们假设:(1) 外力 $F=-\rho\nabla\Phi$, 这样我们可以忽略粘性的影响. (2)流体是局部无旋的,因而我们可引进速度势 $v=-\nabla\psi$. (3)流体压强 p 是流体密度 ρ 的函数.

令

$$h(p)=\int_0^{\rho}\frac{\mathrm{d}p'(\rho')}{\rho'\mathrm{d}\rho'}\mathrm{d}\rho',\tag{6.5.15}$$

即

$$\nabla h=\frac{\nabla p(\rho)}{\rho}.\tag{6.5.16}$$

因此,Euler 方程可写为

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+h+\frac{1}{2}(\nabla\psi)^2+\Phi=0.\tag{6.5.17}$$

为了研究声波在流体中传播,我们将对连续性方程和 Euler 方程围绕某一背景做一阶线性微扰. 令 $\rho=\rho_0+\epsilon\rho_1$, $p=p_0+\epsilon p_1$, $\psi=\psi_0+\epsilon\psi_1$. 假设 S 的形式为 $G(v_0)\psi$,且 Φ 为常数. 然后丢掉所有的二阶项和高阶项, 由连续性方程,我们有

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_0v_0)+G(v_0)\psi_0=0,\tag{6.5.18}$$

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_1v_0+\rho_0v_1)+G(v_0)\psi_1=0,\tag{6.5.19}$$

把 h 线性展开 $h(p_0+\epsilon p_1)\sim h(p_0)+\epsilon p_1\left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}p}\right|_{p=p_0}=h(p_0)+\epsilon\frac{p_1}{\rho_0}$. 因此,由 Euler 方程,我们有

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial t}+h_0+\frac{1}{2}(\nabla\psi_0)^2+\Phi=0,\tag{6.5.20}$$

$$p_1=\rho_0\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial t}+v_0\cdot\nabla\psi_1\right).\tag{6.5.21}$$

由于我们假设压强 p 是 ρ 的函数,所以有

$$\rho_1=\frac{\partial\rho}{\partial p}p_1=\frac{\partial\rho}{\partial p}\rho_0\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial t}+v_0\cdot\nabla\psi_1\right).\tag{6.5.22}$$

把(6.5.22)式代入(6.5.18)式,我们得到

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\rho_0\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial t}+v_0\cdot\nabla\psi_1\right)\right)$$

$$+\nabla\cdot\left(\rho_0\nabla\psi_1-\frac{\partial\rho}{\partial p}p_0v_0\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial t}+v_0\cdot\nabla\psi_1\right)\right)-G(v_0)\psi_1=0.\tag{6.5.23}$$

这个方程也可由弯曲时空中的 Klein-Gordon 方程

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu)\psi-\frac{c}{\rho_0^2}G(v_0)\psi=0,\tag{6.5.24}$$

推导得到. 其中度规 $g^{\mu\nu}$ 为

$$g^{\mu\nu}=\frac{1}{\rho_0c}\begin{pmatrix}-1 & -v_0^j\\ -v_0^i & (c^2\delta_{ij}-v_0^iv_0^j)\end{pmatrix},\tag{6.5.25}$$

其协变形式为

$$g^{\mu\nu}=\frac{\rho_0}{c}\begin{pmatrix}-(c^2-v_0^2) & -v_0^j\\ -v_0^i & \delta_{ij}\end{pmatrix},\tag{6.5.26}$$

流体局部的声速 $c^{-2}=\frac{\partial\rho}{\partial p}$. 假设 $G(v_0)=\xi\frac{\rho_0^2}{c}R$, R 为度规(6.5.26)的 Ricci 曲率标量,则声波在这种流体中的传播等价于耦合标量场在弯曲时空(6.5.26)中的传播.

由上面的讨论可知,声学度规中时空的间隔为

$$\mathrm{d}s^2=\frac{\rho_0}{c}[-(c^2-v_0^2)\mathrm{d}t^2-2v_0^i\mathrm{d}t\mathrm{d}x_i+\delta^{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j].\tag{6.5.27}$$

在球坐标系里面,它的形式为

$$\mathrm{d}s^2=-c^2\mathrm{d}t^2+(\mathrm{d}r-v_0\mathrm{d}t)^2+r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2).\tag{6.5.28}$$

做一个坐标变换:

$$\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}t-\frac{v_0}{c^2-v_0^2}\mathrm{d}r,\tag{6.5.29}$$

再假设 $v_0 = c\dfrac{r_0^2}{r^2}$,然后我们得到

$$ds^2 = -c^2\left(1 - \frac{r_0^4}{r^4}\right)d\tau^2 + \left(1 - \frac{r_0^4}{r^4}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{6.5.30}$$

r_0 为归一化常数.这个度规与爱因斯坦引力理论中的标准球对称度规有明显的不同.它描述的是一个声学黑洞.黑洞视界位于 $r = r_0$ 的地方,Hawking 温度为 $1/(\pi r_0)$.这里我们取 $c = r_0 = 1$.

把度规(6.5.30)代入耦合标量场的 Klein-Gordon 方程:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu)\Psi - \xi R\Psi = 0, \tag{6.5.31}$$

我们得到耦合标量微扰场的径向方程:

$$\frac{d^2\phi(r)}{dr_*^2} + (\omega^2 - V)\phi(r) = 0, \tag{6.5.32}$$

其中 ξ 为耦合因子,波函数 $\Psi = \dfrac{e^{-i\omega t}\phi(r)}{r}$,有效势

$$V = \left(1 - \frac{1}{r^4}\right)\left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{4}{r^6} + \xi R\right), \tag{6.5.33}$$

Ricci 曲率标量为

$$R = \frac{6}{r^6}. \tag{6.5.34}$$

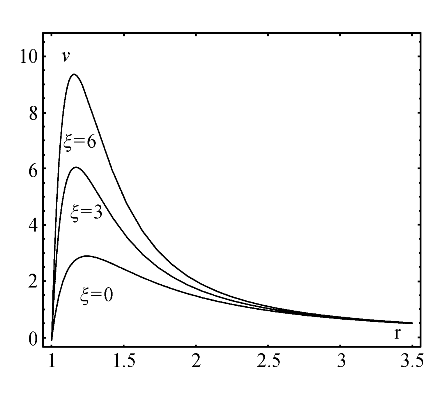


图29　声学黑洞时空背景中耦合标量场的有效势在 $l=2$ 及 $\xi=0, 3, 6$ 时随变量 r 的变化关系

由(6.5.33)式可看出,有效势与角量子数 l 和耦合因子 ξ 有关. 图 29 为 $l=2$ 时的有效势与耦合因子 ξ 的变化关系,当 ξ 越大,势垒的峰值也就越高,但峰值所对应的 r 的值 r_p 却越小.

6.6　黑洞时空中的幂律拖尾

由于微扰场在渐近无限远处存在逆向散射,因此在黑洞时空中微扰场的晚期演化行为表现为幂律拖尾的形式. 并且影响这种幂律拖尾的因素与影响准正规模的因素有很大的差异. 以标量微扰场为例,它的准正规模与黑洞的旋转参数 a 有关,而其幂律拖尾则与旋转参数 a 无关. 为了弄清微扰场在黑洞时空中的演化行为,人们对各类微扰场在各类黑洞时空中的幂律拖尾进行了探讨,并已取得了一系列成果. 在本节, 我们讨论两种研究幂律拖尾的主要方法(代数求根法和 Green 函数法).

代数求根法

代数求根法是一种最直接的研究黑洞外部扰动物质场晚期拖尾的方法. 它的指导思想是先直接求出方程(6.4.1)的解,然后再讨论当 $t\to\infty$ 时其解的渐近行为.

令 $u=t-r_*$, $v=t+r_*$,则方程(6.4.1)变形为

$$4\left[\frac{\partial^2}{\partial v\partial u}+V_l(r)\right]u_l(u,v)=0. \tag{6.6.1}$$

该方程的通解可以表示为延迟时间 u 和超前时间 v 的两个函数 $F(v)$ 和 $G(u)$ 的组合:

$$\begin{aligned}u_l(u,v)=&\sum_{p=0}^{l}A_l^p r^{-p}\left[G^{(l-p)}(u)+(-1)^pF^{(1-p)}(v)\right]\\&+\sum_{p=0}^{\infty}B_l^p(r)\left[G^{(l-p-1)}(u)+(-1)^pF^{(1-p-1)}(v)\right],\end{aligned} \tag{6.6.2}$$

其中 $F(v)$ 和 $G(u)$ 上标的正负具有不同的意义:正表示对函数求导的次数,负表示对函数积分的重数. 第一求和项表示起始的入射波,第二个求和项表示散射波. 系数 A_l^p 是无量纲常数,其值与平直时空时的值相同. 而系数函数 $B_l^p(r)$ 则与时空参量有关. 对其做泰勒展开,去掉高阶项,则可近似表示为

$$B_l^p(r)=a_l^p r^{-(p+2)}\left[1+O(M/r)\right], \tag{6.6.3}$$

其中系数 a_l^p 正比于 M. 可见在 $M\to0$ 时,$B_l^p(r)$ 的值趋向于零. 经过一系列冗长的推导,我们最后得到,在类时无限远 i_+ 处,当 $M\ll r_*\ll t$ 时,有

$$u_l(u,v) = -2k_l^{2l+1}F_0(p+2l)!\,t^{-(p+2l+1)}r_*^{l+1}. \qquad (6.6.4)$$

其中 F_0 为一与时间无关的参量. 如果微扰是在天体发生塌缩之后形成的,则参数 p 取 2,因而微扰场晚期衰减的形式为 $t^{-(2l+2)}$;若塌缩开始前天体外已经存在微扰场(质量为 μ),那么参数 p 取 1,扰动场晚期衰减的形式为 $t^{-(2l+3)}$,它较之前者迅速. 这说明微扰场的晚期拖尾与其初始条件有关.

格林函数法

代数求根法尽管非常直观,然而它具有很大的局限性. 它只能有效地处理静态时空中的微扰场的情况. 对于稍微复杂一点的稳态时空(如 Kerr 黑洞时空)中的无质量扰动物质场的情形,它就无能为力,最主要的原因是来自数学上的困难. 因此,人们希望找到一种更为有效的、适用范围广的方法来研究各类时空中的幂律拖尾行为.

1986 年 Leaver 提出了利用频谱分解技术的黑洞格林(Green)函数法 . 该方法不仅可以用于讨论黑洞的准正模,也可以用于研究扰动场的晚期幂律拖尾. 如图 30 所示,Leaver 指出:黑洞的准正模源于复频面中 Green 函数 $\tilde{G}(r_*, y, \omega)$ 的奇点(图 30 中用 × 表示出部分的奇点);晚期幂律拖尾源于空间无限远处纯出射波 $\tilde{u}_l^{up}$ 中分支切割的存在(图中用沿 ω 虚负轴粗黑线表示),$\tilde{G}(r_*, y, \omega)$ 沿该分支切割的积分将给出黑洞外部扰动场的晚期衰减行为.

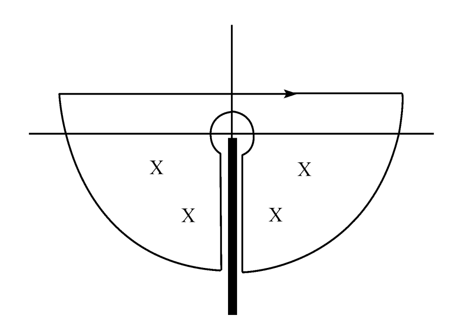


图 30　微扰场在黑洞时空中演化的
复频面示意图

我们知道,波函数 $u_l(r_*, t)$ 随时间的演化如下:

$$u_l(r_*, t) = \int G(r_*, y, t)\partial_t u_l(y,0)\,\mathrm{d}y + \int \partial_t G(r_*, y, t)u_l(y,0)\,\mathrm{d}y, \qquad (6.6.5)$$

其中 $G(r_*, y, t)$ 为 Green 函数,它满足

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}-V_l(r)\right]G(r_*,y,t)=\delta(t)\delta(r_*-y). \tag{6.6.6}$$

根据因果关系,Green 函数 $G(r_*,y,t)$ 必须满足以下初始条件:$t\leqslant 0$ 时,$G(r_*,y,t)=0$.

在 Leaver 的格林函数法中,不是直接去计算波函数 $u_l(r_*,t)$,而是通过研究微扰场的传播函数——Green 函数 $G(r_*,y,t)$ 去探讨微扰场在黑洞时空中的晚期演化.

为了求出 Green 函数 $G(r_*,y,t)$,我们引入傅里叶变换

$$\tilde{G}(r_*,y,\omega)=\int_{0-}^{+\infty}G(r_*,y,t)e^{i\omega t}dt, \tag{6.6.7}$$

及其逆变换为

$$G(r_*,y,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+ic}^{+\infty+ic}\tilde{G}(r_*,y,\omega)e^{-i\omega t}d\omega, \tag{6.6.8}$$

c 为某个正的常数.

显然傅里叶变换在 ω 复平面的上半面是解析的,而且 Green 函数 $\tilde{G}(r_*,y,\omega)$ 满足方程

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}+\omega^2-V_l(r)\right]\tilde{G}(r_*,y,\omega)=\delta(r_*-y). \tag{6.6.9}$$

设方程

$$\left[\frac{d^2}{dr_*^2}+\omega^2-V_l(r)\right]\tilde{u}_l(r_*,\omega)=0 \tag{6.6.10}$$

两个线性无关的解分别为 $\tilde{u}_l^{in}(r_*,\omega)$ 和 $\tilde{u}_l^{up}(r_*,\omega)$. 为了构造 Green 函数,我们要求其中一个解 $\tilde{u}_l^{in}(r_*,\omega)$ 满足边界条件

$$\tilde{u}_l^{in}(r_*,\omega)\sim\begin{cases}e^{-i\omega r_*}, & r_*\to-\infty;\\ A_{out}(\omega)e^{i\omega r_*}+A_{in}(\omega)e^{-i\omega r_*}, & r_*\to+\infty.\end{cases} \tag{6.6.11}$$

即在事件视界处表现为纯入射波;另一个解 $u_l^{up}(r_*,\omega)$ 在空间无限远处表现为纯出射波,即

$$\tilde{u}_l^{up}(r_*,\omega)\sim\begin{cases}B_{out}(\omega)e^{i\omega r_*}+B_{in}(\omega)e^{-i\omega r_*}, & r_*\to-\infty;\\ e^{+i\omega r_*}, & r_*\to+\infty.\end{cases} \tag{6.6.12}$$

利用这两个解和朗斯基关系

$$W(\omega)\equiv\tilde{u}_l^{in}\frac{d\tilde{u}_l^{up}}{dr_*}-\tilde{u}_l^{up}\frac{d\tilde{u}_l^{in}}{dr_*}=2i\omega A_{in}(\omega), \tag{6.6.13}$$

我们可以构造出黑洞 Green 函数 $\tilde{G}(r_*,y,\omega)$:

$$\tilde{G}(r_*, y, \omega) = -\frac{1}{2\mathrm{i}\omega A_{in}(\omega)}\begin{cases} \tilde{u}_l^{in}(r_*, \omega)\tilde{u}_l^{up}(y, \omega), & r_* < y; \\ \tilde{u}_l^{in}(y, \omega)\tilde{u}_l^{up}(r_*, \omega), & r_* > y. \end{cases} \tag{6.6.14}$$

研究表明,黑洞外部扰动物质场的晚期拖尾源于复频率 Green 函数中存在分支切割,而且 $\tilde{G}(r_*,y,\omega)$ 沿该分支切割的积分(用 $G^c(r_*,y,t)$ 表示)将主宰这种晚期渐近行为. 此外由于在渐近无限远区只有低频才能被很小的时空曲率或电磁相互作用逆向散射,因此我们可进一步确定微扰场的晚期拖尾又是由黑洞 Green 函数中的低频部分主导的. 所以我们可以采用低频近似来处理微扰场的晚期拖尾问题.

在 Schwarzschild 黑洞时空中,我们可引入变量 $\tilde{u}_l = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2}\varphi$,然后采用低频近似,可得到无质量标量微扰场的径向方程

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \omega^2 + \frac{4M\omega^2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\varphi = 0. \tag{6.6.15}$$

令 $z = -2\mathrm{i}\omega r$,可得到构造黑洞 Green 函数所必需的两根($r \gg 2M$)

$$\tilde{u}_l^{in} = A\left(\frac{r}{M}\right)^{l+1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega r} M(l + 1 - 2\mathrm{i}\omega M, 2l + 2, -2\mathrm{i}\omega r), \tag{6.6.16}$$

$$\tilde{u}_l^{up} = B\left(\frac{r}{M}\right)^{l+1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega r} U(l + 1 - 2\mathrm{i}\omega M, 2l + 2, -2\mathrm{i}\omega r), \tag{6.6.17}$$

其中 A 和 B 是正交归一化常数,$M(a,b,z)$ 和 $U(a,b,z)$ 是合流超几何方程的两个根. 由于 $U(a,b,z)$ 是一个多值函数, 因此 $\tilde{u}_l^{up}$ 存在分支切割,且分支切割对 Green 函数中的贡献为

$$G^c(r_*, y, t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{-\mathrm{i}\infty} \tilde{u}_l^{in}(y, \omega)\left[\frac{\tilde{u}_l^{up}(r_*, \omega\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})}{W(\omega\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})} - \frac{\tilde{u}_l^{up}(r_*, \omega)}{W(\omega)}\right] \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega. \tag{6.6.18}$$

利用低频近似条件,我们有

$$W(\omega) = (-1)^{-l-1}\mathrm{i}AB\frac{(2l+1)!(2\omega)^{2l-1}}{\Gamma(l + 1 - 2\mathrm{i}\omega M)}, \tag{6.6.19}$$

且

$$W(\omega\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}) = W(\omega), \tag{6.6.20}$$

$$W[\tilde{u}_l^{up}(r_*, \omega), \tilde{u}_l^{up}(r_*, \omega\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})] = B^2\frac{(-1)^{-l-1}2\pi(2\omega)^{-2-1}}{\Gamma(-l - 2\mathrm{i}\omega M)\Gamma(l + 1 - 2\mathrm{i}\omega M)}. \tag{6.6.21}$$

此时,波函数也可近似表示为

$$\tilde{u}_l^{in} = A(2l+1)!!(\omega M)^{-l}\left(\frac{r}{M}\right)J_l(\omega r),\tag{6.6.22}$$

其中，$(2l+1)!! = 2^l l!$；$J_n(z)$为 Bessel 函数. 最后我们得到 Green 函数

$$G^c(r_*, y, t) = (-1)^{l+1}\frac{(2l+2)!}{[(2l+1)!!]^2}\frac{4M(r_* y)^{l+1}}{t^{2l+3}}.\tag{6.6.23}$$

这一结果与 Price 和 Ching 等用其他方法所得到的结果完全一致.

整体单极子黑洞时空中的幂律拖尾

下面我们以整体单极子黑洞时空中的耦合标量场为例,来探讨耦合因子 ξ 对幂律拖尾的影响.

我们先介绍一下什么是整体单极子黑洞时空. 早期宇宙的相变会引起多种拓扑缺陷. 而缺陷的类型取决于真空流形的拓扑. 当真空流形包含有不能连续收缩成一个点的曲面时,则有单极子形成. 与基本粒子的形成相似, 单极子的形成也是对称性破缺的结果. 单极子的能量大部分集中在单极子核附近的小区域内. 大统一理论预言宇宙早期有很多这样的单极子存在. 后来人们采用暴胀理论才解决宇宙中单极子问题.

当整体对称性破缺时,就会形成整体单极子. 整体单极子周围 Goldstone 场具有巨大的能量,能够产生很强的引力场. 能够产生整体单极子的最简单的模型可用下面的 Lagrangian 描述：

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi^a\partial^\mu\phi^a - \frac{\lambda}{4}(\phi^a\phi^a - \eta^2)^2.\tag{6.6.24}$$

其中 ϕ^a 为标量场. 这个模型具有整体 $O(3)$ 对称性,但是它会自发地发生对称性破缺,最终只具有 $U(1)$ 对称性. 通过求解爱因斯坦场方程,得到一个描述整体单极子黑洞的静态球对称度规

$$\begin{aligned}ds^2 = &-\left(1 - 8\pi G\eta_0^2 - \frac{2Gm}{R}\right)d\tau^2\\ &+\left(1 - 8\pi G\eta_0^2 - \frac{2Gm}{R}\right)^{-1}d\overline{R}^2 + \overline{R}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),\end{aligned}\tag{6.6.25}$$

m 是黑洞的质量,η_0 为整体单极子形成时的对称性破缺标度. 我们做一个坐标变换

$$t = (1 - 8\pi G\eta_0^2)^{\frac{1}{2}}\tau,\quad r\to(1 - 8\pi G\eta_0^2)^{-\frac{1}{2}}\overline{R},\tag{6.6.26}$$

然后对黑洞质量和对称性破缺标度进行重新标度

$$M = (1 - 8\pi G\eta_0^2)^{-\frac{3}{2}}m,\quad b = (1 - 8\pi G\eta_0^2),\tag{6.6.27}$$

就可以把度规变为

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + br^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{6.6.28}$$

这个度规依然是静态的球队称度规,它具有一个附加的亏损立体角 $\Delta = 4\pi b = 32\pi G\eta_0^2$.

在弯曲时空中质量为 μ 的耦合标量场的 Klein-Gordon 方程为

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu)\phi - (\mu^2 + \xi R)\psi = 0. \tag{6.6.29}$$

把度规(6.6.28) 代入(6.6.29)式中,我们有

$$\psi_{,tt} - \psi_{,r_*r_*} + V\psi = 0, \tag{6.6.30}$$

其中有效势和 Ricci 曲率标量为

$$V = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[\frac{l(l+1)}{br^2} + \frac{2M}{r^3} + \mu^2 + \xi R\right], \tag{6.6.31}$$

和

$$R = \frac{2(l-b)}{br^2}. \tag{6.6.32}$$

由谱分解方法知,方程(6.6.30)中标量场 $\Psi(r_*, t)$随时间的演化方程为

$$\Psi(r_*, t) = \int[G(r_*, r_*'; t)\partial_t\Psi(r_*', 0) + \partial_t G(r_*, r_*'; t)\Psi(r_*', 0)]dr_*'. \tag{6.6.33}$$

$G(r_*, r_*'; t)$ 为延迟 Green 函数,它的定义为

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} + V(r)\right]G(r_*, r_*'; t) = \delta(t)\delta(r_* - r_*'). \tag{6.6.34}$$

由因果性条件,我们知道当 $t<0$ 时,有 $G(r_*, r_*'; t) = 0$. 对函数 $G(r_*, r_*'; t)$进行 Fourier 变换:

$$\tilde{G}(r_*, r_*'; \omega) = \int_{0-}^{\infty}G(r_*, r_*'; t)e^{i\omega t}dt. \tag{6.6.35}$$

在 ω 的上半复平面, Fourier 变换是解析的. 它的逆变换为

$$G(r_*, r_*'; t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+ic}^{\infty+ic}\tilde{G}(r_*, r_*'; \omega)e^{-i\omega t}d\omega, \tag{6.6.36}$$

c 为某一正数. 我们定义辅助函数 $\tilde{\Psi}_1(r_*, \omega)$和 $\tilde{\Psi}_2(r_*, \omega)$为齐次方程:

$$\left[\frac{d^2}{dr_*^2} + \omega^2 - V[r(x)]\right]\tilde{\Psi}_i(r_*, \omega) = 0, \quad i = 1,2, \tag{6.6.37}$$

的两个线性无关的特解. 利用 Wronskian 关系式:

$$W(\omega) = W(\tilde{\Psi}_1, \tilde{\Psi}_2) = \tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_{2,r_*} - \tilde{\Psi}_2\tilde{\Psi}_{1,r_*}, \tag{6.6.38}$$

可以构造出黑洞的 Green 函数:

$$\tilde{G}(r_*, r_*'; \omega) = -\frac{1}{W(\omega)}\begin{cases} \tilde{\Psi}_1(r_*, \omega)\tilde{\Psi}_2(r_*', \omega), & r_* < r_*'; \\ \tilde{\Psi}_1(r_*, \omega)\tilde{\Psi}_2(r_*', \omega), & r_* > r_*'. \end{cases} \tag{6.6.39}$$

为了能够利用(6.6.39)式计算出 Green 函数 $G(r_*, r_*'; t)$,我们必须在 ω 的下半复平面沿一条闭合的积分围道对 $\tilde{G}(r_*, r_*'; \omega)$ 进行积分. 众所周知,函数 $\tilde{\Psi}_2$ 在 ω 的下半复平面存在一条分支切割线—负虚轴,且 $\tilde{G}(r_*, r_*'; \omega)$沿该分支切割线的积分(用 $G^C(r_*, r_*'; t)$表示)将主导这种幂律拖尾行为. 因此,我们下面的工作主要着手于 $G^C(r_*, r_*'; t)$的计算.

首先考虑无质量耦合标量场在整体单极子黑洞时空中的幂律拖尾行为. 我们知道无质量微扰场的幂律拖尾行为取决于时空渐进无限远区的逆散射,而在渐进无限远区只有低频部分才能被很小的时空曲率或电磁相互作用逆散射. 因此, 对 Green 函数的主导贡献来自低频部分. 所以我们可以采用低频近似来研究微扰场的幂律拖尾行为. 按 M/r 的级数将方程(6.6.37)展开并忽略 $O\left(\frac{M}{r^2}\right)$ 项后得到

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \omega^2 + \frac{4M\omega^2}{r} - \frac{l(l+1) + 2\xi(1-b)}{br^2}\right]\zeta(r, \omega) = 0, \tag{6.6.40}$$

这里 $\zeta = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}\tilde{\Psi}$. 令

$$\zeta = r^{\rho+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\Phi(z), \quad z = -2\mathrm{i}\omega r, \quad \rho = \sqrt{\frac{l(l+1) + 2\xi(1-b)}{b} + \frac{1}{4}}, \tag{6.6.41}$$

则方程(6.6.40)变为复合超几何方程:

$$z\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}z^2} + (1 + 2\rho - z)\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z} - \left(\frac{1}{2} + \rho - 2\mathrm{i}M\omega\right)\Phi = 0. \tag{6.6.42}$$

这个方程的两个用来构造黑洞 Green 函数的解为

$$\tilde{\Psi}_1 = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega r}r^{\frac{1}{2}+\rho}M\left(\frac{1}{2} + \rho - 2\mathrm{i}M\omega, 1 + 2\rho, -2\mathrm{i}\omega r\right), \tag{6.6.43}$$

$$\tilde{\Psi}_2 = B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega r}r^{\frac{1}{2}+\rho}U\left(\frac{1}{2} + \rho - 2\mathrm{i}M\omega, 1 + 2\rho, 2\omega r\right), \tag{6.6.44}$$

其中 A 和 B 为归一化常数. $M(a, b, z)$和 $U(a, b, z)$是复合超几何方程的两个解.

因为 $U(a, b, z)$ 是一个多值函数,所以函数 $\tilde{\Psi}_2$ 存在分支切割. 根据(6.6.36)式,我们发现分支切割对 Green 函数的贡献为

$$G^C(r_*, r'_*; t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{-i\infty} \tilde{\Psi}_1(r'_*, \omega)\left[\frac{\tilde{\Psi}_2(r_*, \omega e^{2\pi i})}{W(\omega e^{2\pi i})} - \frac{\tilde{\Psi}_2(r_*, \omega)}{W(\omega)}\right] \times e^{-i\omega t} d\omega. \tag{6.6.45}$$

应用关系式

$$\tilde{\Psi}_1(r_*, \omega e^{2\pi i}) = \tilde{\Psi}_1(r_*, \omega),$$

$$\tilde{\Psi}_2(r_*, \omega e^{2\pi i}) = \frac{2\pi i e^{-\pi(2\rho+1)i}}{\Gamma(2\rho+1)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \rho - 2i\omega M\right)}\tilde{\Psi}_1(r_*, \omega) + e^{-2\pi(2\rho+1)i}\tilde{\Psi}_2(r_*, \omega), \tag{6.6.46}$$

我们有

$$W(\omega) = \frac{AB(2\rho)!(-i)^{-(2\rho-2)}(2\omega)^{-2\rho}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \rho - 2i\omega M\right)}, \tag{6.6.47}$$

和

$$W(\omega e^{2\pi i}) = e^{-2\pi i(2\rho+1)} W(\omega). \tag{6.6.48}$$

在低频近似下,Green 函数可近似为

$$G^C(r_*, r'_*; t) = \sum_l^{\infty} \frac{e^{\pi i(2\rho+1)} 2^{2\rho} M\left[\left(\rho - \frac{1}{2}\right)!\right]^2 (-i)^{4\rho+1}}{\pi A^2[(2\rho+1)!]^2} \times \int_0^{-i\infty} \tilde{\Psi}_1(r_*, \omega)\tilde{\Psi}_1(r'_*, \omega)\omega^{2\rho+1} e^{-i\omega t} d\omega. \tag{6.6.49}$$

下面我们研究标量场在类光无穷远处 i_+ 的幂律拖尾行为. 正如前面所述,由于对 Green 函数的主导贡献来自微扰场的低频部分,因此,微扰场的这种晚期演化行为也将取决于低频部分. 因而对(6.6.49)式的积分的主要贡献应该来自 $|\omega| = O(1/t)$. 在满足 $|\omega| = O(1/t)$ 的条件下, 我们有

$$\tilde{\Psi}_1(r_*, \omega) \approx A r_*^{\rho+1/2}, \quad \tilde{\Psi}_1(r'_*, \omega) \approx A {r'}_*^{\rho+1/2}. \tag{6.6.50}$$

把(6.6.50)式代入(6.6.49)式,然后对其积分,我们发现描述标量场的幂律拖尾的 Green 函数 $G^C(r_*, r'_*; t)$ 为

$$C^C(r_*, r'_*; t) = \sum_l^{\infty} \frac{e^{\pi i(2\rho+1)} M\left[\left(\rho - \frac{1}{2}\right)!\right]^2 (-2i)^{2\rho}(2\rho+1)!}{i\pi[(2\rho+1)!]^2} \times (r'_*, r_*)^{\rho+\frac{1}{2}} t^{-2\rho-2}. \tag{6.6.51}$$

因此,在整体单极子黑洞时空中,非最小耦合的无质量标量场的幂律拖尾不仅取决于角量子数 l 和对称破缺标度 η_0,而且取决于标量场和引力场之间的耦合因子 ξ.

此外,标量场和引力场之间的耦合使标量场衰减得更快.

像无质量的标量场一样,在研究有质量的标量场幂律拖尾的时候,我们也只考虑 Green 函数 $G^C(r_*,r'_*;t)$. 但此时,对 Green 函数 $G^C(r_*,r'_*;t)$ 的贡献来自对 $\widetilde{\Psi}_2$ 的积分区间为 $-\mu\leqslant\omega\leqslant\mu$ 的分支切割,而不是整个负虚轴. 假设观察者和初始的微扰源离黑洞都很远,即有 $r\gg M$,则方程(6.6.37)就可以展开为一个 M/r 的级数,忽略高阶项 $O\left(\left(\frac{M}{r}\right)^2\right)$ 后,有

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+\omega^2-\mu^2+\frac{4M\omega^2-2M\mu^2}{r}-\frac{l(l+1)+2\xi(1-b)}{br^2}\right]\zeta(r,\omega)=0, \tag{6.6.52}$$

其中 ζ 等于 $\sqrt{1-\frac{2M}{r}}\widetilde{\Psi}$. 令

$$z=2\sqrt{\mu^2-\omega^2}r=2\varpi r,\qquad \zeta=z^{\rho+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\Phi(z),$$
$$\lambda=\frac{M\mu^2}{\varpi}-2M\varpi,\qquad \rho\sqrt{\frac{l(l+1)+2\xi(1-b)}{b}+\frac{1}{4}}, \tag{6.6.53}$$

则方程(6.6.52)可以化为复合超几何方程

$$z\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}z^2}+(1+2\rho-z)\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z}-\left(\frac{1}{2}+\rho-\lambda\right)\Phi=0. \tag{6.6.54}$$

当条件 $|\omega|\ll\mu$ 得到满足时,复合超几何方程的用来构造 Green 函数的两个解为

$$\widetilde{\Psi}_1=A'M_{\lambda,\rho}(2\varpi r)=A'\mathrm{e}^{-\varpi r}(2\varpi r)^{\frac{1}{2}+\rho}M\left(\frac{1}{2}+\rho-\lambda,1+2\rho,2\varpi r\right), \tag{6.6.55}$$

$$\widetilde{\Psi}_2=B'W_{\lambda,\rho}(2\varpi r)=B'\mathrm{e}^{-\varpi r}(2\varpi r)^{\frac{1}{2}+\rho}U\left(\frac{1}{2}+\rho-\lambda,1+2\rho,2\varpi r\right), \tag{6.6.56}$$

A' 和 B' 为归一化常数. 利用(6.6.36)式,我们发现分支切割对 Green 函数的贡献为

$$\begin{aligned}G^C(r_*,r'_*;t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\mu}^{\mu}\left[\frac{\widetilde{\Psi}_1(r'_*,\omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi})\widetilde{\Psi}_2(r_*,\omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi})}{W(\omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi})}\right.\\&\qquad\left.-\frac{\widetilde{\Psi}_1(r'_*,\omega)\widetilde{\Psi}_2(r_*,\omega)}{W(\omega)}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\mu}^{\mu}F(\varpi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.\end{aligned} \tag{6.6.57}$$

应用关系式

$$W_{\lambda,\rho}(2\varpi r)=\frac{\Gamma(-2\rho)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\rho-\lambda\right)}M_{\lambda,\rho}(2\varpi r)+\frac{\Gamma(2\rho)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\rho-\lambda\right)}M_{\lambda,-\rho}(2\varpi r),\tag{6.6.58}$$

$$M_{\lambda,\rho}(e^{i\pi}2\varpi r)=e^{\left(\frac{1}{2}+\rho\right)i\pi}M_{-\lambda,\rho}(2\varpi r),\tag{6.6.59}$$

我们发现有

$$W(\varpi e^{i\pi})=-W(\varpi)=A'B'\frac{\Gamma(2\rho)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\rho-\lambda\right)}4\rho\varpi,\tag{6.6.60}$$

和

$$\begin{aligned}F(\varpi)&=\frac{1}{4\rho\varpi}[M_{\lambda,\rho}(2\varpi r_*')M_{\lambda,-\rho}(2\varpi r_*)-M_{-\lambda,\rho}(2\varpi r_*')M_{-\lambda,-\rho}(2\varpi r_*)]\\&+\frac{1}{4\rho\varpi}\frac{\Gamma(-2\rho)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\rho-\lambda\right)}{\Gamma(2\rho)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\rho-\lambda\right)}[M_{\lambda,\rho}(2\varpi r_*')M_{\lambda,\rho}(2\varpi r_*')\\&-e^{(2\rho+1)i\pi}M_{-\lambda,\rho}(2\varpi r_*')M_{-\lambda,\rho}(2\varpi r_*)].\end{aligned}\tag{6.6.61}$$

下面,我们讨论整体单极子黑洞时空中有质量的耦合标量场的两种幂律拖尾行为:中晚期拖尾和极晚期拖尾.

中晚期拖尾行为出现在区间 $M\ll r\ll t\ll M/(\mu M)^2$ 内.在该时间区域内,频率$\varpi=O(\sqrt{\mu/t})$的范围暗示 $\lambda\ll 1$. 而 λ 来源于有质量标量场波动方程中的 $1/r$,因此,它描述在渐进无限远区时空曲率的逆散射效应. 因为 $\lambda\ll 1$,所以渐进无限远区时空曲率的逆散射效应在研究中晚期拖尾行为时可以忽略不计. 因此,我们有

$$F(\varpi)\approx\frac{1+e^{(2\rho+1)i\pi}}{4\rho\varpi}\frac{\Gamma(-2\rho)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\rho\right)}{\Gamma(2\rho)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\rho\right)}M_{0,\rho}(2\varpi r_*')M_{0,\rho}(2\varpi r_*).\tag{6.6.62}$$

为了计算有质量标量场在某一固定远处(r_*', $r_*\ll t$)的中晚期拖尾行为, 我们应用条件 $\bar{\omega}r\ll 1$ 和函数 $M(a,b,z)$ 在 z 趋向于零时约等于 1 的性质. 注意到方程(6.6.62)可近似为

$$F(\varpi)\approx\frac{1+e^{(2\rho+1)i\pi}}{4\rho 2^{-2\rho-1}}\frac{\Gamma(-2\rho)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\rho\right)}{\Gamma(2\rho)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\rho\right)}(r_*'r_*)^{\frac{1}{2}+\rho}\varpi^{2\rho}.\tag{6.6.63}$$

因此,在 $t >> \mu^{-1}$ 的极限下,Green 函数 $G^{C}(r_*, r'_*; t)$ 可化为

$$G^{C}(r_*, r'_*; t) = \frac{(1 + e^{(2\rho+1)i\pi})}{\pi\rho 2^{-3\rho-2}} \frac{\Gamma(-2\rho)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\rho\right)\Gamma(1+\rho)\mu^{\rho}}{\Gamma(2\rho)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\rho\right)}$$

$$\times (r'_* r_*)^{\frac{1}{2}+\rho} t^{-\rho-1} \cos\left[\mu t - \frac{\pi(\rho+1)}{2}\right]. \qquad (6.6.64)$$

因此,整体单极子时空中有质量耦合标量场的中晚期拖尾行为由振荡负幂律拖尾 $t^{-\rho-1}\cos\left[\mu t - \frac{\pi(\rho+1)}{2}\right]$ 主导. 与无质量耦合标量场在类光无穷远处的晚期拖尾行为一样,中晚期拖尾行为同样依赖于标量场的角量子数和对称破缺标度,而且还依赖于标量场与引力场之间的耦合. 耦合标量场比最小耦合标量场衰减得快. 此外,耦合标量场的衰减随耦合因子 ξ 的增加而变快.

有质量标量场的极晚期的幂律拖尾,它的激励机制与中晚期拖尾行为是不同的. 因为在 极晚期 $\mu >> 1/(\mu M)^2$,渐进无限远区的时空曲率的逆散射效应不能再忽略不计,此时这种时空曲率的逆散射效应将对极晚期的幂律拖尾起十分重要的作用. 由此我们可以预计到 极晚期的幂律拖尾将呈现出另一种衰减形式. 此时 $\lambda >> 1$,所以有

$$M_{\pm\lambda,\pm\rho}(2\varpi r) \approx \Gamma(1 \pm 2\rho)(2\varpi r)^{\frac{1}{2}}(\pm\lambda)^{\pm\rho} J_{\pm 2\rho}(\sqrt{\pm\alpha r}), \qquad (6.6.65)$$

这里我们令 $\alpha = 8\lambda\varpi$. 因此方程(6.6.61)可化为

$$f(\varpi) = \frac{\Gamma(1+2\rho)^2\Gamma(-2\rho)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\rho-\lambda\right) r'_* r_*}{2\rho\Gamma(2\rho)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\rho-\lambda\right)}$$

$$\times \lambda^{-2\rho}[J_{2\rho}(\sqrt{\pm\alpha r'_*})J_{2\rho}(\sqrt{\pm\alpha r_*})$$

$$+ I_{2\rho}(\sqrt{\pm\alpha r'_*})I_{2\rho}(\sqrt{\pm\alpha r_*})] + \frac{\Gamma(1+2\rho)\Gamma(1-2\rho)r'_* r_*}{2\rho}$$

$$\times [J_{2\rho}(\sqrt{\pm\alpha r'_*})J_{-2\rho}(\sqrt{\pm\alpha r_*}) - I_{2\rho}(\sqrt{\pm\alpha r'_*})I_{2\rho}(\sqrt{\pm\alpha r_*})], \qquad (6.6.66)$$

$I_{\pm 2\rho}$ 是所谓的修正 Bessel 函数. 由于 $\alpha = 8\lambda\varpi \approx 8M\mu^2$ 独立于 ω,因此由第二项引起的晚期拖尾的形式将为 t^{-1}. 在取极限 $\mu t \to \infty$ 及 $|\omega| \to \mu$ 时,我们来讨论由第一项引起的幂律拖尾行为. 为了表述方便,我们令

$$L = \frac{\Gamma(1+2\rho)^2\Gamma(-2\rho)r'_* r_*}{2\rho\Gamma(2\rho)}$$

$$\times\left[J_{2\rho}(\sqrt{\pm\alpha r'_*})J_{2\rho}(\sqrt{\pm\alpha r_*})+I_{2\rho}(\sqrt{\pm\alpha r'_*})I_{2\rho}(\sqrt{\pm\alpha r_*})\right]. \tag{6.6.67}$$

由于 $\lambda\gg1$,(6.6.66)式中第一项对 Green 函数 $G_1^C(r_*,r'_*;t)$的贡献可近似为

$$G_1^C(r_*,r'_*;t)=\frac{L}{2\pi}\int_{-\mu}^{\mu}\frac{1+(-1)^{2\rho}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\lambda}}{1+(-1)^{2\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\lambda}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi\lambda-\omega t)}\mathrm{d}\omega. \tag{6.6.68}$$

应用鞍点积分法,我们发现由第一项引起的幂律拖尾行为所具有的形式为 $\sim t^{-5/6}\sin\mu t$,它把源自第二项引起的幂律拖尾行为淹没了. 因此,整体单极子黑洞时空中的有质量的耦合标量场的极晚期幂律拖尾的形式为 $t^{-5/6}\sin\mu t$. 这与最小耦合标量场的极晚期幂律拖尾完全一致. 最近的研究表明这可能是标量场在渐进平直时空中幂律拖尾的一个普适的性质. 当 $b=1$ 时,我们的结果与 Schwarzschild 时空的一致. 因为在 Schwarzschild 时空,由于 Ricci 曲率标量为零,从而使耦合项不能起作用. 当 $b=0$ 时,由于背景时空不能用 Barriola-Vilenkin 度规(6.6.25)来描述,所以,此时微扰场的晚期幂律拖尾行为还有待进一步的研究.

6.7　暗物质和暗能量

宇宙动力学方程和临界密度

宇宙学原理告诉我们,在宇宙学尺度上宇宙是均匀各向同性的. 其 4 维时空为 Robertson-Walker 度规所描述:

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}t^2-a^2(t)\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2}+r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right), \tag{6.7.1}$$

式中 $a(t)$为宇宙标度因子,k 为一常数. 适当选择 r 的单位,可以使 $k=+1,0,-1$,分别对应于正曲率空间、零曲率空间和负曲率空间,即分别对应于闭合的、平直的和开放的宇宙.

宇宙物质的能量动量张量通常写成理想流体的形式:

$$T_{\mu\nu}=(\rho+p)U_\mu U_\nu+pg_{\mu\nu}, \tag{6.7.2}$$

式中 ρ 和 p 分别为宇宙物质密度和压强,U_μ 为 4 维速度,

$$U^0=1, \tag{6.7.3}$$

$$U^i=0. \tag{6.7.4}$$

守恒定律表述为

$$T^{\mu\nu}_{;\nu}=0. \tag{6.7.5}$$

当 $\mu=i$,(6.7.5)式显然成立;当 $\mu=0$,(6.7.5)式成为

$$\mathrm{d}[a^3(\rho+p)]=a^3\mathrm{d}p, \tag{6.7.6}$$

或者

$$d(\rho a^3) = -p d(a^3). \tag{6.7.7}$$

对于最简单的物态方程

$$p = w\rho, \tag{6.7.8}$$

能量密度和宇宙标度因子的关系是

$$\rho \sim a^{-3(1+w)}. \tag{6.7.9}$$

对于辐射、物质和真空分别有

$$\text{辐射} \quad p = \frac{1}{3}\rho, \qquad \rho \sim a^{-4}; \tag{6.7.10}$$

$$\text{物质} \quad p = 0, \qquad \rho \sim a^{-3}; \tag{6.7.11}$$

$$\text{真空} \quad p = -\rho, \qquad \rho = \text{常数}.$$

由 Robertson-Walker 度规出发,根据广义相对论,我们可以得到 Ricci 张量的非零分量

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad R_{ij} = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2}\right)g_{ij}. \tag{6.7.12}$$

Ricci 标量为

$$R = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right). \tag{6.7.13}$$

爱因斯坦场方程

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{6.7.14}$$

的 0-0 分量就是弗里德曼(Friedmann)方程

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3}, \tag{6.7.15}$$

场方程的 i-i 分量是

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi G\rho. \tag{6.7.16}$$

方程(6.7.7),(6.7.15),(6.7.16)由 Bianchi 恒等式相联系,这三个方程中只有两个是独立的,由(6.7.15)和(6.7.16)式可以得到一个能直观表示宇宙膨胀加速度的方程

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \tag{6.7.17}$$

我们知道现在宇宙在加速膨胀,即 $\ddot{a} > 0$,这就要求 $\rho + 3p < 0$,从而我们知道,宇宙加速膨胀的条件是物态方程参数 $w < -1/3$.

宇宙膨胀的速度由哈勃常数描述,它是这样定义的:

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \tag{6.7.18}$$

哈勃常数其实并非常数,而是随时间变化的. 哈勃常数 H_0 是哈勃常数的当前值.

弗里德曼方程可以写成下面的形式:

$$\frac{k}{H^2 a^2} = \frac{\rho}{\rho_c} - 1 \tag{6.7.19}$$

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G} \tag{6.7.20}$$

由(6.7.19)式可见,宇宙空间的曲率完全决定于密度. 若密度大于临界密度 ρ_c,则 k 是正的,宇宙空间是弯曲且有限的;若密度小于 ρ_c,则 k 是负的,宇宙空间是弯曲且无限的;若密度等于 ρ_c,k 等于零,宇宙空间是平直的、无限的.

我们定义一个量纲为一的密度参数:

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}, \tag{6.7.21}$$

则弗里德量方程可写为

$$\frac{k}{H^2 a^2} = \Omega - 1, \tag{6.7.22}$$

显然,$\Omega > 1$, $\Omega = 1$ 和 $\Omega < 1$ 分别对应于 $k > 0$, $k = 0$ 和 $k < 0$.

暗物质

1937 年,弗里兹· 札维奇(Fritz Zwicky)发现大星系团中的星系具有极高的运动速度. 要束缚住这些星系,星系团的实际质量应该是观测到的恒量总质量的 100 多倍. 即有大量的暗物质存在. 为了简化,下面我们用牛顿引力理论讨论旋涡星系的质量计算. 假定星系质量分布是球对称的,设半径为 r 的球面以内的质量为 $M(r)$,则距中心 r 处的恒星的轨道速率为

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}. \tag{6.7.23}$$

随着距离球心的距离 r 的增大, 发光物质变得很稀少了,这时应该可以认为 M 近于一个常量,速度 v 就应该随半径 $r^{-\frac{1}{2}}$下降. 然而实际的观测与此恰恰相反,转动曲线在距星系中心很远处并不下降,而是维持一个恒定的速度(图 31). 据此我们可以推知,一定有我们所看不见的暗物质晕在贡献其引力,维持旋转速度.

根据天文观测数据,经过简单的计算得到,发光物质对密度参数的现在值 Ω_0 的贡献

$$\Omega_{0L} \approx 0.5\% \tag{6.7.24}$$

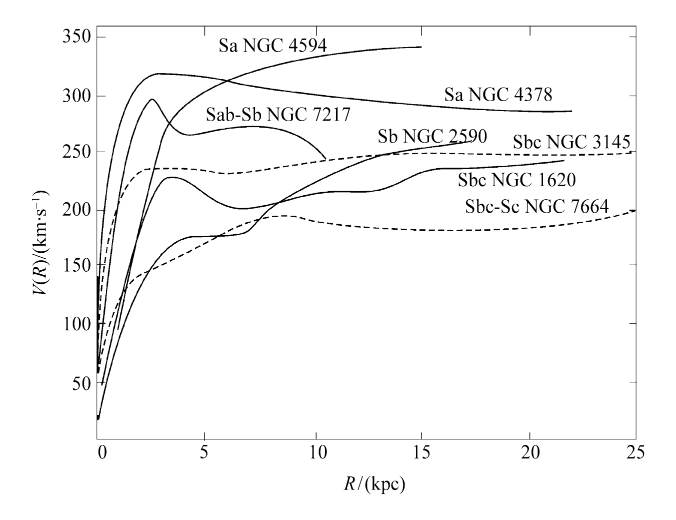


图 31　七个漩涡星系的旋转曲线,它们在距离星系中心很远的地方依然维持恒定的速度,说明星系被一个巨大的暗物质晕所包围

人们用类似的牛顿动力学方法,对星系团进行观测,假定维里定理成立,应用(6.7.23)式,得到星系团对 Ω_0 的贡献为

$$10\% < \Omega_{0G} < 30\%. \tag{6.7.25}$$

(6.7.25)式与(6.7.24)式比较,表明星系团中除发光物质以外还有大量暗物质.

20 世纪 80 年代提出的宇宙暴胀理论认为 $\Omega_0 \approx 1$. 后来的测量和计算都支持这一结论,宇宙暴胀理论已得到公认. (6.7.25)式表明星系团中的发光物质和暗物质的总和对 Ω_0 的贡献也只有 20% 左右,与 $\Omega_0 \approx 1$ 比较,人们认为除了星系团之类的成团物质之外,还有 80% 的物质不成团,甚至均匀分布于宇宙中. 这问题我们在下面一小节再继续讨论.

正是暗物质促成了宇宙结构的形成. 如果没有暗物质就不会形成星系、恒星和行星,也就更谈不上今天的人类了. 宇宙尽管在大尺度上表现出均匀和各向同性,但是在小一些的尺度上则存在着恒星、星系、星系团、巨洞以及星系长城. 在大尺度上主宰物质运动的力只有引力. 但是均匀分布的物质不会产生引力,因此今天所有的宇宙结构必然源自于宇宙极早期物质分布的微小涨落,这些涨落会在宇宙微波背景辐射(CMB)中留下痕迹. 然而普通物质不可能通过其自身的涨落形成实质上的结构而又不在宇宙微波背景辐射中留下痕迹,因为在宇宙极早期普通物质还没有从辐射中退耦出来. 而暗物质不与辐射耦合,其微小的涨落在普通物质退耦之前就放大了许多倍. 在普通物质退耦之后,已经成团的暗物质就开始吸引普通物质,

进而形成了我们现在观测到的结构. 这一初始涨落的振幅非常非常地小. 这样的物质就是冷暗物质,它是无热(低速)运动的非相对论性粒子,因此称为冷暗物质.

对于先前提到的小扰动(涨落),为了预言其在不同波长上的引力效应,小扰动谱必须具有特殊的形态. 为此,最初的密度涨落应该是标度无关的. 也就是说,如果我们把能量分布分解成一系列不同波长的正弦波之和,那么所有正弦波的振幅都应该是相同的. 暴涨理论的成功之处就在于它提供了很好的动力学机制来形成这样一个标度无关的小扰动谱(其谱指数 $n=1$). WMAP 的观测结果证实了这一预言,其观测到的结果为 $n=0.99\pm0.04$.

现在已经知道了两种暗物质——中微子和黑洞. 但是它们对暗物质总量的贡献是非常微小的. 最被看好的暗物质是低温无碰撞暗物质(CCDM),其粒子具有寿命长、温度低、无碰撞的特性. 寿命长意味着它的寿命必须与现今宇宙年龄相当. 温度低意味着在退耦时它们是非相对论性粒子,只有这样它们才能在引力作用下迅速成团. 由于成团过程发生在比哈勃视界(宇宙年龄与光速的乘积)小的范围内,而且这一视界相对现在的宇宙而言非常的小,因此最先形成的暗物质团块或者暗物质晕比银河系的尺度要小得多,质量也要小得多. 随着宇宙的膨胀和哈勃视界的增大,这些最先形成的小暗物质晕会合并形成较大尺度的结构,而这些较大尺度的结构之后又会合并形成更大尺度的结构. 其结果就是形成不同体积和质量的结构体系,这是与观测相一致的. 相反地,对于相对论性粒子,例如中微子,在物质引力成团的时期由于其运动速度过快而无法形成我们观测到的结构. 因此中微子对暗物质质量密度的贡献是可以忽略的. 在太阳中微子实验中对中微子质量的测量结果也支持了这一点. 无碰撞指的是暗物质粒子(与暗物质和普通物质)的相互作用截面在暗物质晕中小到可以忽略不计. 这些粒子仅仅依靠引力束缚住对方,并且在暗物质晕中以一个较宽的轨道偏心率谱无阻碍地作轨道运动.

低温无碰撞暗物质(CCDM)被看好有几方面的原因. 第一,CCDM 的结构形成数值模拟结果与观测相一致;第二,作为一个特殊的亚类,弱相互作用大质量粒子(WIMP)可以很好地解释其在宇宙中的丰度. 如果粒子间相互作用很弱,那么在宇宙最初的万亿分之一秒它们是处于热平衡的. 之后,由于湮灭它们开始脱离平衡. 根据其相互作用截面估计,这些物质的能量密度大约占了宇宙总能量密度的 20%～30%. 这与观测相符.

暗能量

自从 1929 年哈勃发现宇宙膨胀以来,人们一直以为宇宙是减速膨胀的. 因为主宰宇宙物质运动的力是引力,在引力作用下膨胀只能减速. 如同地面上一个竖直上抛的物体,在重力作用下只能减速. 然而 1997 年 12 月,作为大红移超新星搜索小组成员的哈佛大学天文学家 R. 基尔希纳的观测结果显示,宇宙膨胀不是减速

而是在加速. 1998 年, S. 玻尔穆特和 B. 史密特两个小组利用 Ia 型超新星作标准烛光,精确测量距离-红移关系,发现宇宙在加速膨胀. 这一事实告诉我们,宇宙中除了普通物质之外,还有一种一直未被人们发现的能量,这种能量会产生斥力,从而推动宇宙加速膨胀. 芝加哥大学的 M. 特纳给这种能量起了个名字,叫暗能量. 后来更多的天文观测,如新的超新星探测,斯隆数字巡天得到的宇宙大尺度结构,威尔金森宇宙微波背景辐射各向异性探测器 WMAP(Wilkinson microwave anisotrope probe)的观测,都证实了暗能量的存在,并且使它成为了标准宇宙模型的一部分.

因为观测到宇宙微波背景辐射的各向异性和黑体谱,进一步支持了标准宇宙模型,这一项目获得了 2006 年诺贝尔物理学奖.

暗能量是一种不可见的巨大的能量,在宇宙总物质中约占 73%,足以主宰宇宙的运动. 它与普通物质和暗物质都有本质的不同,它产生负压强而且均匀分布于宇宙中. 普通物质和暗物质的压强都是非负的.

暗能量是近年来宇宙学研究中一个具有里程碑意义的重大成果. 支持暗能量的主要证据有二,一是观测发现宇宙在加速膨胀,按照爱因斯坦场方程(6.7.17),加速膨胀要求 $p/\rho<0$,导致具有负压强的暗能量;二是由 WMAP 给出的宇宙中物质总密度的精确测定结果,普通物质和暗物质加起来只占 27%,仍有 73% 的短缺,这一短缺的物质就是暗能量.

由于 WMAP 的精密数据和超新量 Ia 的观测数据,人们确认以下观测结果:

(1) 宇宙总密度参数 $\Omega_0=1.02\pm0.02$,即宇宙几近平直.

(2) 宇宙年令是 137 ± 2 亿年.

(3) 哈勃常数 $H_0\approx0.71\pm0.01$ km/s/Mpc.

(4) 宇宙总质量(100%) ≈ 重子 + 轻子(4.4%) + 热暗物质(≤2%) + 冷暗物质(≈20%) + 暗能量(73%).

暗能量的一个很重要的参数,就是它的物态方程参数 w,由(6.7.17)式可知,只有当 $p+3p<0$ 时,才会得到加速膨胀,即 $\ddot{a}>0$,此时对于物态方程 $p=w\rho$,其参数 $w<-1/3$. 因而各种暗能量模型都必须满足 $w<-1/3$ 的条件,同时由观测确定的 w 的值又成为检验各种暗能量模型的标准. 例如利用 WMAP 和 SNLS(supernova legacy survey)可以给暗能量的物态方程参数一个很强的限制: $w=-0.967^{+0.073}_{-0.072}$.

下面讨论一些主要的暗能量候选者.

1. 宇宙学常数

爱因斯坦根据广义相对论构建第一个宇宙模型时,人们尚不知道宇宙膨胀这一事实,因而爱因斯坦引入了宇宙学常数, 试图构建一个静态的宇宙模型. 引入宇宙学常数后,场方程变为如下形式:

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R-\Lambda g_{\mu\nu}=8\pi GT_{\mu\nu}.$$

将 $\Lambda g_{\mu\nu}$项移到方程的右边,可以看出,宇宙学常数其实提供了一个等效的能量-动量张量.它的能量密度和压强分别是

$$p_c=\frac{\Lambda}{8\pi G}, \tag{6.7.26}$$

$$p_c=-\frac{\Lambda}{8\pi G}. \tag{6.7.27}$$

由此可知,相应的物态方程参数 $w=-1$.实际上用宇宙常数构造的静态宇宙是不稳定的,只要变大一点就会导致斥力增大和引力减小,从而使膨胀加速.这恰好符合现在观测到的宇宙加速膨胀的事实.

然而,用宇宙学常数解释宇宙的加速膨胀尚有两个疑难问题.第一个问题是宇宙常数问题,第二个问题称为巧合(coincidence)问题.由量子场论可以计算真空能,所得到的形式与宇宙学常数给出的能量-动量张量相同,因此可以把两者作为等效的宇宙学常数或等效真空能处理.但是由 WMAP 给出的等效真空能为

$$p_c^{obs}=10^{-47}GeV^4, \tag{6.7.28}$$

理论预言值为

$$p_c^{th}=10^{74}GeV^4, \tag{6.7.29}$$

两者相差上百个数量级.

所谓巧合问题,是指的今天的物质密度与真空能密度恰好处在同一个量级.由于两者随宇宙膨胀的演化规律不同,所以需要在极早期对宇宙的初始条件进行精细的微调(fine-tuning).

2. Quintessence

Quintessence 是通过引入一个标量场来构造的暗能量模型.它的拉氏量为

$$\mathscr{L}=\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-V(\phi)\right], \tag{6.7.30}$$

式中 $V(\phi)$是势.度规取平直的 R-W 度规.由拉氏量变分就可得到 Quintessence 的运动方程

$$\ddot{\phi}+3H\dot{\phi}+V'(\phi)=0, \tag{6.7.31}$$

上面的撇号表示对 ϕ 求导.由理想流体的能量-动量张量形式,得到 Quintessence 的能量密度和压强分别是

$$\rho_Q=\frac{1}{2}\dot{\phi}^2+V, \tag{6.7.32}$$

$$p_Q=\frac{1}{2}\dot{\phi}^2-V, \tag{6.7.33}$$

由此我们可以得到它的物态方程参数

$$w = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V}. \tag{6.7.34}$$

势函数 $V(\phi)$取不同形式,则 w 可在 0 到 -1 之间变化. 并且一般来说,w 不再是一个常数,而是变化的. 作为一个动力学模型,Quintessence 可以解决巧合问题. 这是一个几被公认的候选者,可意为继夸克、轻子、中间破色子和非重子暗物质之后的第五原质.

除了 Quintessence 以外,还有一些不同的暗能量候选者,下面介绍两种.

3. Phantom

Quintessence 虽然能够实现 $w < -1/3$,从而解释宇宙加速膨胀,但是实测表明,w 也很有可能是小于 -1 的. 因此 Caidwell 于 2002 年提出 Phantom. Phantom 也引入了一个标量场,但与 Quintessence 不同的是,它的动能项是负的. Phantom 的拉氏量是

$$\mathscr{L} = \sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)\right], \tag{6.7.35}$$

它的能量密度和压强分别是

$$\rho_Q = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V, \tag{6.7.36}$$

$$p_Q = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V, \tag{6.7.37}$$

因而它的物态方程参数为

$$w = \frac{-\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V}{-\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V}. \tag{6.7.38}$$

很明显地,与 Quintessence 相比, Phantom 可以实现 $w < -1$. 由于$w < -1$, Phantom 具有很有趣的性质,例如 Phantom 的能量密度是随着宇宙膨胀而增加的. 还有一种新的宇宙结局的可能性“Big Rip”. 哈勃膨胀只是星系退行,作为引力束缚体的星系本身是并不膨胀的. 然而 Phantom 导致的“Big Rip”却可以将星系、恒星、行星等引力束缚体全部撕裂.

4. Quintom

Quintessence 和 Phantom 虽然可以分别实现 $w > -1$ 和 $w < -1$,但是却不能实现 w 穿越 -1. 为了解决这个问题 Quintom 被提了出来.

Quintom 实际是由 Quintessence 和 Phantom 两场构成的. 它的拉氏量是

$$\mathscr{L} = \sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 - V(\phi_1,\phi_2)\right], \tag{6.7.39}$$

它的物态方程参数

$$w = \frac{-\frac{1}{2}\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{\phi}_2^2 - V(\phi_1,\phi_2)}{-\frac{1}{2}\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{\phi}_2^2 + V(\phi_1,\phi_2)}, \tag{6.7.40}$$

可见 Quintom 可以实现物态方程参数 w 穿过 -1.

6.8　RNΛ 黑洞的量子化

引力场的正则量子化方法首先由 Arnowitt, Deser 和 Misner(ADM)提出,由 Dirac 所发展. 正则量子化的步骤是:首先对时空做(3+1)分解,即 $M=R\otimes\Sigma^3$,Σ^3 为某个类空超曲面. 然后把经典理论改写成哈密顿形式,找出正则共轭量. 选择一个类空超曲面,把正则共轭量当做算符,它们满足基本的对易(反对易)关系——量子化条件. 对经典作用量变分时,可得到两个约束,哈密顿约束和动量约束,量子化后,可得到 Wheeler-De Witt 方程和动量约束方程.

在半经典近似下,哈密顿约束方程或 WD 方程是量子几何动力学中的基本方程,它的地位就像量子力学中的 Schrödinger 方程. WD 方程是一个在超空间上具有 De Witt 超度规的二阶泛函双曲方程,一般情况下很难求解. 对于一些具有特殊对称性的时空,我们可以将 WD 方程由无穷维化成有限维,从而变得易于求解. 这种方法称为小超空间近似或小超空间模型. 至今,人们已经对球对称时空情况下的 WD 方程进行了广泛的研究.

Kuchar 研究了史瓦西黑洞的几何动力学,发现黑洞的质量应被看成相空间的动力学变量. Nakamura 等应用正则量子化方法于史瓦西黑洞的视界内部,并且引入 Kuchar 提出的作为动力学变量的黑洞质量函数,得到了 WD 方程的严格解. 随后,de Broglie-Bohm 解释被引入了史瓦西黑洞和 Reissner-Nordström 黑洞的研究.

在量子理论中,有两种著名的对波函数的解释. 一种是 Copenhagen 解释,另一种就是 de Broglie-Bohm(dBB)解释. Copenhagen 解释就是人们最为熟悉的波函数概率解释. dBB 解释则引入一个非常类似于 WKB 方案的时间,用波函数"经典化"地定义一个量子轨道或称 dBB 轨道. 在量子效应可以忽略的地方,量子轨道自然与经典轨道一致. 通过这样的处理,对于一个量子动力学系统,我们能够得到它的量子演化情况. 在 dBB 解释中,量子效应是由一个叫量子势的物理量来描述的,它定义为波函数振幅的 2 阶微分. 当量子势很小可以忽略时,量子演化就回到了经典情形. dBB 解释在量子宇宙学的研究中也得到了广泛的应用.

在本节和下一节,我们将对三类黑洞时空,进行正则量子化,并给出 dBB 解释.

具有电荷和宇宙常数(RNΛ)黑洞的度规为

$$ds^2 = -A\mathrm{d}t^2 + A^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\psi^2),$$
$$A = \left(-\frac{1}{3}\lambda r^2 - \frac{2m}{\pi r} + \frac{4Q^2}{\pi r^2}\right), \tag{6.8.1}$$

其中 m, Q 和 λ 分别是黑洞的质量、电荷和宇宙常数. 这里我们把 $\varphi=0$ 和 $\varphi=2\pi$ 及 $\psi=0$ 和 $\psi=2\pi$ 认同. 因此度规(6.8.1)描写一个具有环拓扑的时空.

在事件视界以内,度规分量 g_{tt}成为正的而 g_{rr}成为负的,时空坐标发生互换. 为明显起见,作变量替换:

$$t\to R,\qquad r\to T. \tag{6.8.2}$$

这样黑洞内部的度规可表示为

$$\begin{aligned}ds^2 =& \left(-\frac{1}{3}\lambda T^2 - \frac{2m}{\pi T} + \frac{4Q^2}{\pi T^2}\right)^{-1}\mathrm{d}T^2\\ &- \left(-\frac{1}{3}\lambda T^2 - \frac{2m}{\pi T} + \frac{4Q^2}{\pi T^2}\right)\mathrm{d}R^2 + T^2(\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\psi^2).\end{aligned} \tag{6.8.3}$$

假定量子化后的度规具有如下形式:

$$ds^2 = -\frac{\alpha^2(T)}{U(T)}\mathrm{d}T^2 + U(T)\mathrm{d}R^2 + V(T)(\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\psi^2), \tag{6.8.4}$$

其中变量 T 和 R 的范围为 $T>0$, $-\infty<R<\infty$. 相应的引力场作用量为

$$\begin{aligned}S_g &= \frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,{}^{(4)}R\\ &= \frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}T\mathrm{d}R\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\psi\sqrt{-g}\,\frac{1}{2\alpha^3V^2}(2V^2\ddot{U}\alpha - 2V^2\dot{U}\dot{\alpha}\\ &\quad + 4\dot{V}\dot{U}\alpha V - 4\dot{V}\dot{\alpha}UV + 4\ddot{V}UV\alpha - \dot{V}^2U\alpha)\\ &= \frac{\pi v_0}{4}\int \mathrm{d}T\left[-\frac{1}{\alpha}\left(\dot{U}\dot{V} + \frac{U\dot{V}^2}{2V}\right)\right],\end{aligned} \tag{6.8.5}$$

其中"·"表示对 T 求导. 系统的"体积"$v_0=\int_0^\infty \mathrm{d}R$ 视为有限的. ${}^{(4)}R$ 是 4 维的标量曲率.

物质场的作用量为

$$S_m = \frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - 2\lambda] = \frac{\pi v_0}{4}\int \mathrm{d}T\left[-\frac{8\alpha Q^2}{\pi V^2} - 2\alpha\lambda V\right], \tag{6.8.6}$$

其中 $F_{\mu\nu}$是电磁场张量. 由方程(6.8.5)和(6.8.6)可得系统的拉氏量为

$$L = \frac{\pi v_0}{4}\left[-\frac{1}{\alpha}\left(\dot{U}\dot{V} + \frac{U\dot{V}^2}{2V}\right) - \frac{8\alpha Q^2}{\pi V} - 2\alpha\lambda V\right]. \tag{6.8.7}$$

容易验证度规的经典解

$$\alpha = 1, \quad U = -\left(-\frac{1}{3}\lambda T^2 - \frac{2m}{\pi T} + \frac{4Q^2}{\pi T^2}\right), \quad V = T^2 \tag{6.8.8}$$

满足拉氏方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{U}}\right) - \frac{\partial L}{\partial U} = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{V}}\right) - \frac{\partial L}{\partial V} = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0. \tag{6.8.9}$$

这说明我们的拉氏量是合理的.

对作用量做如下变量代换从变量 U,V 到变量 z_+,z_-

$$z_+ = U\sqrt{V}, \quad z_- = \sqrt{V}, \tag{6.8.10}$$

拉氏量变为如下简单对称的形式:

$$L = \frac{\pi v_0}{4}\left[-\frac{2}{\alpha}\dot{z}_+\dot{z}_- - 2\alpha\lambda z_-^2 - \frac{8\alpha Q^2}{\pi z_-^2}\right], \tag{6.8.11}$$

其中 z_+,z_- 作为循环坐标出现. 由拉氏量可得与 z_+,z_- 和 α 共轭的正则动量

$$\pi_+ \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_+} = -\frac{\pi v_0}{2\alpha}\dot{z}_-,$$

$$\pi_- \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_-} = -\frac{\pi v_0}{2\alpha}\dot{z}_+,$$

$$\pi_\alpha \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = 0. \tag{6.8.12}$$

很明显,变量 α 起到时移函数的作用,因此它的正则共轭动量为零,这给出一个初级约束,于是有

$$H = -\alpha\left(\frac{2}{\pi v_0}\pi_+\pi_- - \frac{\pi v_0}{2}\lambda z^2 - \frac{2v_0 Q^2}{z_-^2}\right). \tag{6.8.13}$$

从初级约束($\pi_\alpha = 0$)可得 Hamiltonian 约束 $H = 0$. 引入质量函数

$$M = \frac{2}{\pi^2 v_0^2}\pi_+ z_+ \pi_+ - \frac{1}{6}\lambda z_-^3 + \frac{2Q^2}{\pi z_-}, \tag{6.8.14}$$

对应的 Poisson 括号弱等于零:

$$[H,M] = -\frac{2}{\pi^2 v_0^2}\pi + H \approx 0. \tag{6.8.15}$$

因此,哈密顿 H 和质量函数算符 M 具有相同的本征态.

在 Schrödinger 表象中,正则动量量子化为

$$\hat{\pi}_+ = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial z_+},\hat{\pi}_- = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial z_-}. \tag{6.8.16}$$

这样哈密顿约束给出 WD 方程,质量函数给出另一个本征态方程

$$\hat{H}\Psi(z_+,z_-) = -\alpha\left(\frac{2}{\pi v_0}\hat{\pi}_+\hat{\pi}_- - \frac{\pi v_0}{2}\lambda z_-^2 - \frac{2v_0Q^2}{z_-^2}\right)\Psi = 0, \tag{6.8.17}$$

$$\hat{M}\Psi = \left(\frac{2}{\pi^2 v_0^2}\hat{\pi}_+ z_+ \hat{\pi}_+ - \frac{1}{6}\lambda z_-^3 + \frac{2Q^2}{\pi z_-}\right)\Psi = \frac{m}{\pi}\Psi. \tag{6.8.18}$$

其中 m/π 是质量函数本征值. 这与史瓦西情况不同.

直接求解 WD 方程和质量本征方程非常困难,为此我们首先考虑哈密顿算符和质量算符的线性组合

$$\begin{aligned}\hat{L} &= -2\mathrm{i}\left[\frac{1}{\pi v_0\alpha}\hat{\pi}_+ z_+\hat{H} + \hat{\pi}_-\left(\hat{M} - \frac{m}{\pi}\right)\right] \\ &= \mathrm{i}\left(-\frac{4Q^2}{\pi z_-^2} - \lambda z_-^2\right)z_+\hat{\pi}_+ - \mathrm{i}\left(-\frac{2m}{\pi} + \frac{4Q^2}{\pi z_-} - \frac{1}{3}\lambda z_-^3\right)\hat{\pi}_-.\end{aligned} \tag{6.8.19}$$

很明显 $\hat{H}$,$\hat{M}-m$ 和 $\hat{L}$ 具有相同的本征态. 为了求解波动方程,进一步做变量代换

$$\begin{aligned}x &= \pi v_0\sqrt{-z_+\Big/\left(-\frac{2m}{\pi} + \frac{4Q^2}{\pi z_-} - \frac{1}{3}\lambda z_-^3\right)}, \\ y &= \pi v_0\sqrt{-z_+\left(-\frac{2m}{\pi} + \frac{4Q^2}{\pi z_-} - \frac{1}{3}\lambda z_-^3\right)},\end{aligned} \tag{6.8.20}$$

从本征方程 $\hat{L}\Psi(x,y)=0$ 可知本征波函数可写为

$$\Psi(x,y) = \Psi(y). \tag{6.8.21}$$

这样方程(6.8.17)和(6.8.18)都被简化为

$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi(y)}{\mathrm{d}y^2} + \frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}y} + \Psi = 0. \tag{6.8.22}$$

这是零阶 Bessel 微分方程. 由此我们得到哈密顿和质量算符的本征函数

$$\Psi(y) = cH_0^{(2)}(y), \tag{6.8.23}$$

其中 c 是一个积分常数,$H_0^{(2)}$ 是零阶第二类 Hankel 函数. 第一类 Hankel 函数或第一类 Hankel 函数与第二类 Hankel 函数的组合不满足经典解. 故只取第二类 Hankel 函数 $H_0^{(2)}$.

根据 de Broglie-Bohm(dBB)解释,把波函数分解为

$$\Psi(z_+,z_-) = R(z_+,z_-)\mathrm{e}^{\mathrm{i}S(z_+,z_-)} \tag{6.8.24}$$

把方程(6.8.24)代入方程(6.8.17)和(6.8.18),得

$$\frac{2}{\pi v_0}\frac{\partial S}{\partial z_+}\cdot\frac{\partial S}{\partial z_-} - \frac{\pi v_0\lambda}{2}\lambda z_-^2 - \frac{2v_0Q^2}{z_-^2} + V_q = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z_-}\left(R^2\frac{\partial S}{\partial z_+}\right)+\frac{\partial}{\partial z_+}\left(R^2\frac{\partial S}{\partial z_-}\right)=0,$$

$$\frac{2}{\pi^2 v_0^2}z_+\left(\frac{\partial S}{\partial z_+}\right)^2+\left(-\frac{m}{\pi}+\frac{2Q^2}{\pi z_-}-\frac{1}{6}\lambda z_-^3\right)+M_q=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z_+}\left(R^2 z_+\frac{\partial S}{\partial z_+}\right)=0, \tag{6.8.25}$$

其中 V_q 表示量子势,M_q 表示对质量函数的量子效应,它们定义为

$$V_q=-\frac{2}{\pi v_0 R}\frac{\partial^2 R}{\partial z_+\partial z_-},\quad M_q=-\frac{2}{\pi^2 v_0^2 R}\frac{\partial}{\partial z_+}\left(z_+\frac{\partial R}{\partial z_+}\right). \tag{6.8.26}$$

同样,算符 $\hat{L}$ 的本征态方程可以写为

$$\left(-\frac{4Q^2}{\pi z_-^2}-\lambda z_-^2\right)z_+\frac{\partial R}{\partial z_+}-\left(-\frac{2m}{\pi}+\frac{4Q^2}{\pi z_-}-\frac{1}{3}\lambda z_-^3\right)\frac{\partial R}{\partial z_-}=0,$$

$$\left(-\frac{4Q^2}{\pi z_-^2}-\lambda z_-^2\right)z_+\frac{\partial S}{\partial z_+}-\left(-\frac{2m}{\pi}+\frac{4Q^2}{\pi z_-}-\frac{1}{3}\lambda z_-^3\right)\frac{\partial S}{\partial z_-}=0. \tag{6.8.27}$$

dBB 解释假定量子轨道由 $Z_+(T)=z_+(T)$ 和 $Z_-(T)=z_-(T)$ 决定. 黑洞量子几何的动量假定为

$$\pi_+=-\frac{\pi v_0}{2\alpha}\dot{Z}_-=\frac{\partial S}{\partial z_+}\bigg|\ z_+=Z_+,\quad z_-=Z_-,$$

$$\pi_-=-\frac{\pi v_0}{2\alpha}\dot{Z}_+=\frac{\partial S}{\partial z_-}\bigg|\ z_+=Z_+,\quad z_-=Z_-, \tag{6.8.28}$$

把方程(6.8.27)代入方程(6.8.25),得

$$\dot{Z}_-=\frac{\pi v_0\alpha}{x}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y},$$

$$Z_+=-\frac{2\alpha}{\pi v_0}\left(-\frac{4Q^2}{\pi z_-^2}-\lambda z_-^2\right)\frac{x}{2}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y},$$

$$V_q=-\left(-\frac{\pi v_0}{2}\lambda z_-^2-\frac{2v_0Q^2}{z_-^2}\right)\left[1-\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}\right)^2\right],$$

$$M_q=-\left(-\frac{m}{\pi}+\frac{2Q^2}{\pi z_-}-\frac{1}{6}\lambda z_-^3\right)\left[1-\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}\right)^2\right]. \tag{6.8.29}$$

从方程组(6.8.27)的最后一个方程可得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}=\frac{2}{\pi y\,|H_0^{(2)}(y)|^2} \tag{6.8.30}$$

进一步得到 U-V 的关系:

$$U=-\left(-\frac{2m}{\pi\sqrt{V}}+\frac{4Q^2}{\pi V}-\frac{1}{3}\lambda V\right) \tag{6.8.31}$$

现在我们得到该时空的量子解

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 = & -\left(-\frac{2m}{\pi\sqrt{V}}+\frac{4Q^2}{\pi V}-\frac{1}{3}\lambda V\right)^{-1}\mathrm{d}T^2 \\
& +\left(-\frac{2m}{\pi\sqrt{V}}+\frac{4Q^2}{\pi V}-\frac{1}{3}\lambda V\right)\mathrm{d}R^2+V(T)(\mathrm{d}\varphi^2+\mathrm{d}\psi^2). \quad (6.8.32)
\end{aligned}
$$

换回到原来的变量,即 $T\to r, R\to t$,我们有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 = & -\left(-\frac{2m}{\pi\sqrt{V(r)}}+\frac{4Q^2}{\pi V(r)}-\frac{1}{3}\lambda V(r)\right)\mathrm{d}t^2 \\
& +\left(-\frac{2m}{\pi\sqrt{V(r)}}+\frac{4Q^2}{\pi V(r)}-\frac{1}{3}\lambda V(r)\right)^{-1}\mathrm{d}r^2+V(r)(\mathrm{d}\varphi^2+\mathrm{d}\psi^2),
\end{aligned}
$$

(6.8.33)

其中 $V(r)$ 和 r 的关系为

$$
r=\int\frac{\pi}{2}Z\,|\,H_0^{(2)}(Z)\,|^2\mathrm{d}\sqrt{V}, \quad (6.8.34)
$$

这里 Z 定义为

$$
Z=\pi v_0\left(\frac{2m}{\pi}-\frac{4Q^2}{\pi\sqrt{V}}+\frac{1}{3}\lambda V^{3/2}\right). \quad (6.8.35)
$$

需要指出的是,为了使方程(6.8.33)在经典情况 $Z\to\infty$,即 $V(r)=r^2$ 下,回到方程(6.8.1),我们必须有关系 $\alpha=1$. 因此 dBB 轨迹不依赖于规范的选择. 当 $Z\to 0$,即在事件视界附近的时候,我们有 $V_q\to\infty$ 和 $\frac{\mathrm{d}\sqrt{V}}{\mathrm{d}r}\to\infty$. 这说明视界附近的量子效应是非常显著的. 当 $Z\to\infty$ 时,方程(6.8.32)回到方程(6.8.1).

下面讨论热效应.

我们从一般球对称时空的度规

$$
\mathrm{d}s^2=-u(r)\mathrm{d}t^2+u(r)^{-1}\mathrm{d}r^2+v(r)\mathrm{d}\Omega_2^2 \quad (6.8.36)
$$

出发,考虑该背景时空的 Klein-Gordon 方程

$$
-\frac{1}{u}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial r}\left(vu\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\psi^2}=0. \quad (6.8.37)
$$

引入乌龟坐标

$$
r_*=r+\frac{1}{2\kappa}\ln(r-r_H), \quad (6.8.38)
$$

其中 κ 和 r_H 分别是黑洞的表面重力和视界半径,r_H 由事件视界方程 $u(r)=0$ 确定. 对波函数分离变量 $\Phi=F(t,r)G(\psi,\phi)$,方程(6.8.37)在视界附近应化为标准的波动方程

$$
\frac{\partial^2 F}{\partial r_*^2}-\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=0, \quad (6.8.39)
$$

因此,我们有

$$\lim_{r\to r_H} u^2\left[1+\frac{1}{2\kappa(r-r_H)}\right]=1. \tag{6.8.40}$$

从方程(6.8.40)可得表面重力

$$\kappa=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r\to r_H} \tag{6.8.41}$$

进一步得到 Hawking 温度

$$T=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r\to r_H} \tag{6.8.42}$$

对于经典情况,即当 $Z\to\infty$ 时,我们有

$$\begin{aligned}T_c&=\frac{1}{2\pi}\cdot\left[\frac{m}{\pi V_H}-\frac{4Q^2}{\pi V_H^{3/2}}-\frac{1}{3}\lambda V_H^{1/2}\right]\cdot\frac{\pi}{2}\cdot Z\left|H_0^{(2)}(Z)\right|^2\bigg|_{Z\to\infty}\\&=\frac{1}{2\pi}\cdot\left[\frac{m}{\pi V_H}-\frac{4Q^2}{\pi V_H^{3/2}}-\frac{1}{3}\lambda V_H^{1/2}\right].\end{aligned} \tag{6.8.43}$$

对于量子情况,我们有

$$\begin{aligned}T_q&=\frac{1}{2\pi}\cdot\left[\frac{m}{\pi V_H}-\frac{4Q^2}{\pi V_H^{3/2}}-\frac{1}{3}\lambda V_H^{1/2}\right]\cdot\frac{\pi}{2}\cdot Z\left|H_0^{(2)}(Z)\right|^2\bigg|_{Z\to\pi/4}\\&=\frac{1}{2\pi}\cdot\left[\frac{m}{\pi V_H}-\frac{4Q^2}{\pi V_H^{3/2}}-\frac{1}{3}\lambda V_H^{1/2}\right],\end{aligned} \tag{6.8.44}$$

其中 V_H 由视界方程 $Z=\pi v_0[2m/(\pi\sqrt{V_H})-4Q^2/(\pi V_H)+\lambda V_H/3]=0$ 确定. 值得指出,由于当 $Z=0$ 时,Hawking 温度趋于发散,可以在视界附近取一个截断因子 $\varepsilon=\pi/(4v_0)$. 这里 $v_0\equiv\int_0^\infty \mathrm{d}R$ 是系统的“体积”,它被视为是有限的. 如果体积 v_0 足够大,那么截断因子 ε 将具有 Plank 尺度的量级. 特别是当 $v_0=\pi/4$ 时,截断因子只有一个 Plank 尺度.

总之,通过解拉氏方程的办法我们首先验证了所取拉氏量的合理性. 对波函数运用 dBB 解释,我们得到了类环黑洞的量子解形式. 通过对量子势的分析,我们知道视界附近的量子效应是非常显著的. 为了避免 Hawking 温度的发散,我们建议在视界附近引入一个截断因子. 我们认为,对于经典黑洞,视界稳定地处于 $z=0$ 处. 对于量子黑洞,由于视界附近的真空涨落,视界位置变得不确定;如果仍然认为视界在 $z=0$ 处,那么与之对应的某一个物理量必然是发散的.

6.9　宇宙弦黑洞的量子化

众所周知,早期宇宙的相变会产生许多拓扑缺陷. 例如,宇宙弦、整体单极子、畴壁和纹理. 拓扑缺陷的类型依赖于真空流形 μ 的拓扑. Barriola 和 Vilenkin 得到了 Einstein 方程的一个近似解,该解描写一个具有整体单极子的黑洞. 这样一个黑

洞可以在宇宙早期由一个施瓦西黑洞吞并一个单极子形成. 另外, Mukunda 和 Vilenkin 得到了一个包含宇宙弦的真空解. 该时空具有一个锥形的拓扑. 本节我们对具有整体单极子和宇宙弦这两类拓扑缺陷的时空同时进行量子化, 并用 dBB 解释求得其量子化解.

包含一个整体单极子的黑洞解为

$$ds^2 = -\left(1 - 8\pi\eta^2 - \frac{2M'}{r'}\right)dt'^2 + \left(1 - 8\pi\eta^2 - \frac{2M'}{r'}\right)^{-1}dr'^2 + r'^2 d\Omega_2^2, \quad (6.9.1)$$

其中 M' 是黑洞的质量, η 是对称破缺的尺度. 对典型的大统一尺度 $\eta \sim 10^{16}$ GeV, 我们有 $8\pi\eta^2 \ll 1$. 如果我们进行变量代换

$$t' = (1 - 8\pi\eta^2)^{-\frac{1}{2}}t, r' = (1 - 8\pi\eta^2)^{\frac{1}{2}}r, M' = (1 - 8\pi\eta^2)^{\frac{3}{2}}m', \quad (6.9.2)$$

则方程(6.9.1)成为

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2 + (1 - 8\pi\eta^2)r^2 d\Omega_2^2. \quad (6.9.3)$$

从方程(6.9.3)很明显看出, 围绕整体单极子的空间少了一部分立体角, 换言之, 该时空具有了拓扑缺陷.

另一方面, 包含宇宙弦的黑洞解为

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + b^2\sin^2\theta d\varphi^2). \quad (6.9.4)$$

这是一个具有宇宙弦的质量为 m 的黑洞解. 该解具有锥形的空间. 其中 $b = 1 - 4\mu$, μ 是单位弦场的质量.

现在我们把方程(6.9.3)和方程(6.9.4)改写为如下形式:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2 + a^2r^2(d\theta^2 + b^2\sin\theta d\varphi^2). \quad (6.9.5)$$

其中 $a = \sqrt{1 - 8\pi\eta^2}$, $b = 1$ 和 $a = 1$, $b = 1 - 4\mu$ 分别对应于方程(6.9.3)和方程(6.9.4).

为了进行时空量子化, 作变量替换

$$t \to R, \quad r \to T. \quad (6.9.6)$$

则方程(6.9.5)成为

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{T}\right)dR^2 + \left(1 - \frac{2m}{T}\right)^{-1}dT^2 + a^2T^2(d\theta^2$$

$$+ b^2\sin\theta \mathrm{d}\varphi^2). \tag{6.9.7}$$

假定量子化后的度规具有如下形式：

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{\alpha^2(T)}{U(T)}\mathrm{d}T^2 + U(T)\mathrm{d}R^2 + V(T)(\mathrm{d}\theta^2 + b^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2), \tag{6.9.8}$$

则相应的引力场作用量为

$$\begin{aligned} S_g &= \frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g}^{(4)}R \\ &= \frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}T\mathrm{d}R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \sqrt{-g}\frac{1}{2\alpha^3V^2}(2V^2\ddot{U}\alpha - 2V^2\dot{U}\dot{\alpha} \\ &\quad + 4\ddot{V}U\alpha V - 4\dot{V}\dot{\alpha}UV + 4\dot{V}\dot{U}V\alpha - \dot{V}^2U\alpha + 4\alpha^3V) \\ &= \frac{v_0}{4}\int \mathrm{d}T\left[-\frac{1}{\alpha}\left(\dot{U}\dot{V} + \frac{U\dot{V}^2}{2V}\right) + 2\alpha\right], \end{aligned} \tag{6.9.9}$$

其中“·”表示对 T 求导. 系统的“体积”$v_0 = \int_0^\infty \mathrm{d}R$ 被视为是有限的.

能产生整体单极子的最简单的作用量模型为

$$S_m = \frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi^a\partial^\mu\phi^a - \frac{1}{4}\lambda(\phi^a\phi^a - \eta^2)^2\right], \tag{6.9.10}$$

其中 ϕ^a 是三分量标量场, $a=1,2,3$. 该模型具有整体 $O(3)$ 对称性, 它可以自发破缺为 $U(1)$ 对称性. 描写单极子的场位形为 $\phi^a = \eta f(r')x^a/r'$. 这里 $x^ax^a = r'^2$. x^a 是 Cartesian 坐标. 同样, 进行变量代换 $r'\to r\to T, t\to R$, 方程成为

$$S_m = \frac{v_0}{4}\int \mathrm{d}T\alpha V\left[\frac{1}{2U}\dot{f}^2 + \frac{4f^2}{V} - \frac{1}{4}\lambda(f^2 - 1)^2\eta^2\right]\eta^2. \tag{6.9.11}$$

由方程(6.9.9)和方程(6.9.11)我们得到该时空的拉氏量

$$L = \frac{v_0}{4}\left[-\frac{1}{\alpha}\left(\dot{U}\dot{V} + \frac{U\dot{V}^2}{2V}\right) + 2\alpha + 4\alpha\dot{f}^2\eta^2 + \frac{\alpha V}{2U}f^2\eta^2 - \frac{\alpha V}{4}\lambda(f^2 - 1)^2\eta^4\right]. \tag{6.9.12}$$

考虑到 $8\pi\eta^2 \ll 1$, 可以证明经典解

$$\alpha = 1, \quad U = -\left(1 - \frac{2m}{T}\right), \quad V = aT^2, \quad f \approx 1 \tag{6.9.13}$$

满足拉格朗日方程组：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{U}}\right) - \frac{\partial L}{\partial U} = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{V}}\right) - \frac{\partial L}{\partial V} = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{f}}\right) - \frac{\partial L}{\partial f} = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\alpha}=0,\tag{6.9.14}$$

这说明所求拉氏量是合理的.

方程(6.9.13)表明单极子的场位形为 $\phi^a=\eta x^a/r$. 所以系统的拉氏量为下面简单的形式：

$$L=\frac{v_0}{4}\left[-\frac{1}{\alpha}\left(\dot{U}\dot{V}+\frac{U\dot{V}^2}{2V}\right)+2\alpha\right].\tag{6.9.15}$$

在方程(6.9.12)中我们考虑了关系 $4\eta^2\ll 2$. 把变量从 U,V 变到 z_+,z_-

$$z_+=U\sqrt{V},\quad z_-=\sqrt{V},\tag{6.9.16}$$

拉氏量可写为对称的形式：

$$L=\frac{v_0}{4}\left[-\frac{2}{\alpha}\dot{z}_+\dot{z}_-+2\alpha\right],\tag{6.9.17}$$

其中 z_+,z_- 做为循环坐标出现,与 z_+,z_- 和 α 共轭的正则动量为

$$\pi_+\equiv\frac{\partial L}{\partial\dot{z}_+}=-\frac{v_0}{2\alpha}\dot{z}_-,$$

$$\pi_-\equiv\frac{\partial L}{\partial\dot{z}_-}=-\frac{v_0}{2\alpha}\dot{z}_+,$$

$$\pi_\alpha\equiv\frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}}=0.\tag{6.9.18}$$

系统的哈密顿可写为

$$H=-\alpha\left(\frac{2}{v_0}\pi_+\pi_-+\frac{v_0}{2}\right).\tag{6.9.19}$$

从初级约束($\pi_\alpha=0$)我们可得哈密顿约束 $H=0$. 同样引入质量函数

$$M=\frac{2}{v_0^2}\pi_+z_+\pi_++\frac{z_-}{2},\tag{6.9.20}$$

质量函数与哈密顿的 Poisson 括号弱等于零：

$$[H,M]=-\mathrm{i}\frac{2}{v_0^2}\pi_+H\approx 0.\tag{6.9.21}$$

因此 H 和 M 具有相同的本征态.

在 Schrödinger 表象中,正则动量被量子化为

$$\hat{\pi}_+=-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial_{z_+}},\hat{\pi}_-=-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial_{z_-}}.\tag{6.9.22}$$

这样哈密顿约束给出 WD 方程,质量函数给出另一个方程

$$\hat{H}\psi(z_+,z_-)=\left(-\frac{2}{v_0}\hat{\pi}_+\hat{\pi}_--\frac{v_0}{2}\right)\psi=0,\tag{6.9.23}$$

$$\hat{M}\psi(z_+,z_-)=\left(\frac{2}{v_0^2}\hat{\pi}_+z_+\hat{\pi}_++\frac{z_-}{2}\right)\psi=am\psi. \tag{6.9.24}$$

值得指出,这里质量的本征值是 am.

直接求解 WD 方程和质量本征方程较复杂,为此,我们首先考虑哈密顿算符和质量算符的线性组合

$$\begin{aligned}\hat{L}&=-2\mathrm{i}\left[\frac{1}{v_0}\hat{\pi}_+z_+\hat{H}+\hat{\pi}_-(\hat{M}-am)\right]\\&=\mathrm{i}[z_+\hat{\pi}_+-(z_--2am)\hat{\pi}_-].\end{aligned} \tag{6.9.25}$$

很明显,$\hat{H}$,$\hat{M}-am$ 和 $\hat{L}$ 具有相同的本征态. 进一步做变量代换

$$x=v_0\sqrt{-z_+/(z_--2am)},\quad y=v_0\sqrt{-z_+(z_--2am)}, \tag{6.9.26}$$

可从本征方程 $\hat{L}\psi(x,y)=0$,得到本征波函数

$$\psi(x,y)=\psi(y). \tag{6.9.27}$$

这样方程(6.9.23)和方程(6.9.24)都化为相同的形式

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(y)}{\mathrm{d}y^2}+\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}y}+\psi=0. \tag{6.9.28}$$

这是零阶 Bessel 微分方程. 由此可得哈密顿和质量算符的共同本征态

$$\psi(y)=cH_0^{(2)}(y), \tag{6.9.29}$$

其中 c 是一个积分常数,$H_0^{(2)}$ 是零阶第二类 Hankel 函数.

根据 de Broglie-Bohm(dBB)解释,波函数被分解为

$$\psi(z_+,z_-)=R(z_+,z_-)\mathrm{e}^{\mathrm{i}S(z_+,z_-)}. \tag{6.9.30}$$

容易得到

$$\begin{aligned}&\frac{2}{v_0}\frac{\partial S}{\partial z_+}\cdot\frac{\partial S}{\partial z_-}+\frac{v_0}{2}+V_q=0,\\&\frac{\partial}{\partial z_-}\left(R^2\frac{\partial S}{\partial z_+}\right)+\frac{\partial}{\partial z_+}\left(R^2\frac{\partial S}{\partial z_-}\right)=0,\\&\frac{2}{v_0^2}z_+\left(\frac{\partial S}{\partial z_+}\right)^2+\frac{1}{2}(z_--2am)+M_q=0,\\&\frac{\partial}{\partial z_+}\left(R^2z_+\frac{\partial S}{\partial z_+}\right)=0,\end{aligned} \tag{6.9.31}$$

其中, V_q 表示量子势,M_q 表示对质量函数的量子修正. 它们定义为

$$V_q=-\frac{2}{v_0R}\frac{\partial^2R}{\partial z_+\partial z_-},M_q=-\frac{2}{v_0^2R}\frac{\partial}{\partial z_+}\left(z_+\frac{\partial R}{\partial z_+}\right). \tag{6.9.32}$$

同样,$\hat{L}$的本征方程可写为

$$z_+\frac{\partial R}{\partial z_+}-(z_--2am)\frac{\partial R}{\partial z_-}=0,$$

$$z_+ \frac{\partial R}{\partial z_+} - (z_- - 2am)\frac{\partial S}{\partial z_-} = 0. \tag{6.9.33}$$

dBB 解释假定量子轨迹由 $Z_+(T) = z_+(T)$ 和 $Z_-(T) = z_-(T)$ 确定. 黑洞量子几何的动量假定为

$$\pi_+ = -\frac{v_0}{2}\dot{Z}_- = \frac{\partial S}{\partial z_+}\Big|_{z_+ = Z_+, z_- = Z_-},$$

$$\pi_- = -\frac{v_0}{2}\dot{Z}_+ = \frac{\partial S}{\partial z_-}\Big|_{z_+ = Z_+, z_- = Z_-}, \tag{6.9.34}$$

其中速度由经典条件 $\alpha = 1$ 决定. 经过简单的代换, 我们得到

$$\dot{Z}_- = \frac{2}{\pi v_0} \cdot \frac{a}{Z_+ \left| H_0^{(2)}(y) \right|^2},$$

$$\dot{Z}_+ = \frac{2}{\pi v_0} \cdot \frac{a}{(Z_- - 2am) Z_+ \left| H_0^{(2)}(y) \right|^2},$$

$$V_q = -\frac{v_0}{2}\left[1 - \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{a^2}{y^2 \left| H_0^{(2)}(y) \right|^4}\right],$$

$$M_q = \frac{1}{v_0}(Z_- - 2am) V_q. \tag{6.9.35}$$

从方程组(6.9.35)的前两个方程可得

$$U = -\left(1 - \frac{2am}{\sqrt{V}}\right). \tag{6.9.36}$$

这样我们就得到了该时空的量子化解:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2am}{\sqrt{V(T)}}\right)^{-1} dT^2 + \left(1 - \frac{2am}{\sqrt{V(T)}}\right) dR^2 + V(T)(d\theta^2 + b^2 \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{6.9.37}$$

回到以前的变量, 即 $T \to r, R \to t$, 我们有

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2am}{\sqrt{V(r)}}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2am}{\sqrt{V(r)}}\right)^{-1} dr^2 + V(r)(d\theta^2 + b^2 \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{6.9.38}$$

其中 $V(r)$ 和 r 的关系为

$$r = \int \frac{\pi}{2a} Z \left| H_0^{(2)}(Z) \right|^2 d\sqrt{V}, \tag{6.9.39}$$

其中 Z 定义为 $Z = v_0(\sqrt{V} - 2am)$.

当 $Z \to 0$, 即事件视界附近时, 我们有 $V_q \to \infty$, $\frac{d\sqrt{V}}{dr} \to \infty$. 可见视界附近的量子效应是非常显著的. 当 $Z \to \infty$, 即平直区域, 我们有 $V_q = -\frac{v_0}{2}(1 - a^2) \neq 0$ 和 $\frac{d\sqrt{V}}{dr} =$

$a \neq 1$,这与史瓦西情况不同.之所以出现这种不同,这是因为黑洞携带单极子,空间出现了拓扑缺陷的缘故.

采用与上一节完全类似的方法,可得经典黑洞的温度为

$$T_c = \frac{1}{8\pi m}. \tag{6.9.40}$$

量子黑洞的温度为

$$T_q = \frac{1}{8\pi m} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{Z\left|H_0^{(2)}(Z)\right|^2}\Big|_{Z\to\pi/4} = \frac{1}{8\pi m}. \tag{6.9.41}$$

对于量子黑洞,为避免发散,我们同样在视界附近引入了截断因子 $\varepsilon = \frac{\pi}{4v_0}$.

6.10　Quintessence 黑洞的量子化

Quintessence 黑洞的度规

本节利用约化相空间量子化方法讨论被 Quintessence 所包围的静态球对称黑洞的视界面积量子化,得到面积谱.

Quintessence 是讨论得最多的暗能量候选者,它的状态方程参数 $-1 < w < -1/3$.在静态球对称情况下,可将能量动量张量的各分量写为如下形式:

$$\begin{aligned} T_t^t &= A(r), \\ T_t^j &= 0, \\ T_i^j &= C(T)T_iT^j + B(r)\delta_i^j, \end{aligned} \tag{6.10.1}$$

对角度进行平均后可得

$$\begin{aligned} \langle T_i^j \rangle &= D(r)\delta_i^j, \\ D(r) &= -\frac{1}{3}C(r)r^2 + B(r). \end{aligned} \tag{6.10.2}$$

球对称静态时空的度规可以写为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{\nu}\mathrm{d}t^2 - \mathrm{e}^{\lambda}\mathrm{d}r^2 - r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2), \tag{6.10.3}$$

其中 $\nu = \nu(r)$ 和 $\lambda = \lambda(r)$ 都是 r 的函数.爱因斯坦场方程具体化为

$$2T_t^t = -\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2}, \tag{6.10.4}$$

$$2T_r^r = -\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) + \frac{1}{r^2}, \tag{6.10.5}$$

$$2T_\theta^\theta = 2T_\phi^\phi = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2}\right), \tag{6.10.6}$$

这里撇号表示对 r 求导.Quintessence 能动张量的一般表达式可以写为

$$T_t^{\ t} = \rho_q(r), \tag{6.10.7}$$

$$T_i^{\ j} = \rho_q(r)\alpha\left[-(1+3B)\frac{r_i r^j}{r_n r^n} + B\delta_i^{\ j}\right], \tag{6.10.8}$$

从上式可以看出,空间部分和时间部分是成比例的,比例系数与一个参数 B 有关.

空间是各向同性的,对角度求平均可得

$$\langle T_i^{\ j}\rangle = -\rho_q(r)\frac{\alpha}{3}\delta_i^{\ j} = -p_q(r)\delta_i^{\ j}. \tag{6.10.9}$$

由此可以得到

$$p_q = w_q\rho_q,$$

$$w_q = \frac{1}{3}\alpha. \tag{6.10.10}$$

假设 Quintessence 的能动张量满足线性叠加条件,则

$$T_t^{\ t} = T_r^{\ r} \Rightarrow \lambda + \nu = 0, \tag{6.10.11}$$

做一个替换

$$\lambda = -\ln(1+f),$$

即可得到 f 的线性微分方程组:

$$T_t^{\ t} = T_r^{\ r} = -\frac{1}{2r^2}(f + rf'), \tag{6.10.12}$$

$$T_\theta^{\ \theta} = T_\Phi^{\ \Phi} = -\frac{1}{4r}(2f' + rf''). \tag{6.10.13}$$

上述两式告诉我们 f 的解的线性叠加对应于物质场能动张量相应分量的叠加:

$$\sum_n c_n f_n(r) \Rightarrow \sum_n c_n T_\mu^\nu[f_n(r)]. \tag{6.10.14}$$

线性叠加条件可以给出物质场能动张量的自由参数:

$$B = \frac{3w_q + 1}{6w_q}, \tag{6.10.15}$$

由此可得

$$T_t^{\ t} = T_r^{\ r} = \rho_q, \tag{6.10.16}$$

$$T_\theta^{\ \theta} = T_\phi^{\ \phi} = -\frac{1}{2}\rho_q(3w_q + q). \tag{6.10.17}$$

由(6.10.12)~(6.10.13),(6.10.16)~(6.10.17)式可知

$$(3w_q + 1)f + 3(1 + w_q)rf' + r^2 f'' = 0, \tag{6.10.18}$$

它的通解为

$$f = 1 - \frac{r_g}{r} - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{3w+1} \tag{6.10.19}$$

这里 r_0 和 r_g 是归一化常数. 令 $r_g = 2M$ 我们得到被 Quintessence 包围的黑洞的度规

为

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2M}{r} - \left(\frac{r^0}{r}\right)^{3w+1}\right]dt^2 - \frac{dr^2}{\left[1 - \frac{r_g}{r} - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{3w+1}\right]} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \tag{6.10.20}$$

约化相空间量子化

我们将黑洞的一些参量,例如质量 M,电荷 Q 作为系统的广义坐标,相空间即由这些变量和它们的共轭动量构成. 约化作用量具有如下形式:

$$I^{\text{red}} = \int dt\left[\sum_i P_{Z_i}\dot{Z}_i - H(Z_i)\right]. \tag{6.10.21}$$

例如对施瓦西黑洞来说,M 和 P_M 就分别被视为广义坐标及它的共轭动量. 在这里,哈密顿量 $H(Z_i)$的具体表达式并不重要. 接下来需要找到一个变换$(M, P_M) \to (X, \Pi_X)$,并将视界面积表为 $A_h \sim \frac{1}{2}(X^2 + \Pi_X^2)$. 运用标准的量子化方法我们就可得到面积谱 $A_h = \alpha\left(n + \frac{1}{2}\right)$, 这里 α 的单位是普朗克长度的平方 l_p^2.

下面我们利用约化相空间量子化方法来求得(6.50.20)式所描述的黑洞的视界面积谱. 该黑洞的视界半径 r_h 由下式决定:

$$1 - \frac{2M}{T_h} - \left(\frac{T_0}{T_h}\right)^{3w+1} = 0. \tag{6.10.22}$$

在视界处,黑洞的质量 M 可表示为

$$M = \frac{1}{2}\left[-r_0\left(\frac{r_0}{r_h}\right)^{3w} + r_h\right], \tag{6.10.23}$$

视界处的表面引力为

$$\kappa = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2M}{r_h^2}\right) + \frac{r_0\left(\frac{r_0}{r_h}\right)^{3w}(1+3w)}{r_h^2}\right]. \tag{6.10.24}$$

该黑洞的视界面积为

$$A_h = 4\pi(r_h)^2, \tag{6.10.25}$$

因此有

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi}dA_h. \tag{6.10.26}$$

下面我们做一个变换:

$$X = \sqrt{B(M)}\cos(\kappa P_M), \tag{6.10.27}$$

$$\Pi_x = \sqrt{B(M)}\sin(\kappa P_M), \tag{6.10.28}$$

这里 $B(M)$ 是 M 的一个函数.

对 X 变分得

$$\delta X = \frac{1}{2\sqrt{B(M)}}\cos(\kappa P_M)B'\delta M - \sqrt{B(M)}\sin(\kappa P_M)(\kappa\delta P_M + P_M\kappa'\delta M), \tag{6.10.29}$$

这里,

$$B' = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}M}, \tag{6.10.30}$$

$$\kappa' = \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}M}. \tag{6.10.31}$$

通过上面的计算,我们可以得到

$$P_M\delta M - \Pi_X\delta X = \eta_1\delta P_M + \eta_2\delta M, \tag{6.10.32}$$

其中,

$$\eta_1 = B\sin^2(\kappa P_M)\kappa, \tag{6.10.33}$$

$$\eta_2 = P_M - \frac{1}{2}B'\sin(\kappa P_M)\cos(\kappa P_M) + B\sin^2(\kappa P_M)\kappa P_M\kappa'. \tag{6.10.34}$$

而 $(M, P_M)\to(X, \Pi_X)$ 的变换为正则变换的条件是

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial M} = \frac{\partial\eta_2}{\partial P_M}. \tag{6.10.35}$$

直接计算可得

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial M} = B'\sin^2(\kappa P_M)\kappa + B\sin^2(\kappa P_M)\kappa' + 2B\sin(\kappa P_M)\cos(\kappa P_M)P_M\kappa\kappa', \tag{6.10.36}$$

$$\frac{\partial\eta_2}{\partial P_M} = 1 - \frac{1}{2}B'\cos^2(\kappa P_M)\kappa + \frac{1}{2}B'\sin^2(\kappa P_M)\kappa + B\sin^2(\kappa P_M)\kappa' + 2B\sin(\kappa P_M)\cos(\kappa P_M)P_M\kappa\kappa'. \tag{6.10.37}$$

比较(6.10.35),(6.10.36),(6.10.37)式可得

$$1 - \frac{1}{2}B'\kappa = 0, \tag{6.10.38}$$

将(6.10.38)与(6.10.26)式比较又可得到

$$\frac{A_h}{4\pi} = B = X^2 + \Pi_X^2. \tag{6.10.39}$$

我们注意到,(6.10.39)式与简谐振子的哈密顿量非常相似,按照标准的量子化手续,就可得到视界面积的分立谱.

首先将 X, Π_X 算符化:

$$X \to \hat{X}, \tag{6.10.40}$$

$$\Pi_X \to \hat{\Pi}_X = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial X}. \tag{6.10.41}$$

定义升算符

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - \mathrm{i}\Pi_X), \tag{6.10.42}$$

降算符

$$\hat{a}^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + \mathrm{i}\Pi_X), \tag{6.10.43}$$

粒子数算符

$$\hat{N} = \hat{a}^+ \hat{a}, \tag{6.10.44}$$

$B(M)$可分解为

$$B(M) = 2\hat{N} + 1. \tag{6.10.45}$$

N的本征值为n,因而可 知B的本征值为$2n+1$.将其代入(6.10.39)即可得

$$A_h = 8\pi\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0,1,2, \cdots,$$

恢复自然常数有

$$A_h = 8\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)l_p^2, \quad n = 0,1,2,\cdots. \tag{6.10.46}$$

此即Quintessence黑洞的视界面积谱.

暗能量的影响体现在引力半径不同[见(6.10.22)式].

对于Schwarzschild黑洞,除了(6.10.46)式以外,我们可以得到黑洞的质量谱:

$$m^2 = \frac{A}{16\pi} = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)m_p^2, \tag{6.10.47}$$

式中$m_p = (G^{-1}\hbar c)^{1/2}$,$l_p^2 = G\hbar c^{-3}$,在自然单位制中有$m_p^2 = l_p^2$.

刘辽采用Sommerfeld量子化方法得到

$$m^2 = \frac{1}{6}\left(n + \frac{1}{2}\right)m_p^2. \tag{6.10.48}$$

(6.10.48)式表明$n=0$对应于量子SBH的基态质量

$$m_c = \frac{1}{2\sqrt{3}}m_p, \tag{6.10.49}$$

Hawking辐射不会把量子SBH化为乌有.

6.11　Kerr-Newman黑洞的量子化

本节讨论Kerr-Newman黑洞的一种量子力学模型,它主要基于黑洞的无毛定

理. 由这个定理知道稳态时空中的黑洞只由三个经典自由度描述,它们是黑洞的质量 M,电荷 Q 和角动量 J. 因此,只由这三个变量表示的 Kerr-Newman 解成为满足爱因斯坦方程的最一般的稳态黑洞解. 我们的模型讨论稳态黑洞时空的哈密顿量,其中相空间由变量 M, Q, J 和它们的正则动量 P_M, P_Q, P_J 构成,但不足的是这些相空间变量只描述黑洞时空的静态方面. 而黑洞视界之间没有类时 Killing 矢量场,从这个意义上说,Kerr-Newman 时空有动力学性质. 所以我们设法找到一组能自然描述 Kerr-Newman 时空动力学性质的新的相空间坐标,将它们用对应的量子力学算符代替就得到了对应的哈密顿算符,这样便可和 ADM 质量一起构成本征方程. 从某种意义上讲,这些本征方程可看作黑洞的薛定谔方程. 由此便可得到黑洞的 ADM 质量谱、面积谱、电荷谱和角动量谱,它们都是分立的(Makela, 2001).

Einstein-Maxwell 场的哈密顿量一般可以写成

$$S = \frac{1}{16\pi}\int d^4x \sqrt{-g}\left({}^{(4)}R - F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) + (\text{边界项}) \tag{6.11.1}$$

这个积分遍及整个四维时空,g 是时空度规 $g_{\mu\nu}$的行列式,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{6.11.2}$$

是电磁场张量,A_μ 是电磁场的矢势,${}^{(4)}R$ 是四维曲率标量.

众所周知,作用量(6.11.1)式可以写成

$$S = S_\Sigma^{\text{grav}} + S_\Sigma^{\text{em}} + S_{\partial\Sigma}^{\text{grav}} + S_{\partial\Sigma}^{\text{em}}, \tag{6.11.3}$$

其中

$$S_\Sigma^{\text{grav}} = -\frac{1}{16\pi}\int dt\int_\Sigma d^3x \sqrt{q}N(K_{ab}K^{ab} - K^2 + R), \tag{6.11.4a}$$

$$S_\Sigma^{\text{em}} = \frac{1}{16\pi}\int dt\int_\Sigma d^3x \sqrt{q}NF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{6.11.4b}$$

$S_{\partial\Sigma}^{\text{grav}}$ 和 $S_{\partial\Sigma}^{\text{em}}$是渐近平直时空类空渐近无限远处的边界项. (6.11.4a)式和(6.11.4b)式中空间积分遍及 t 为常数的类空超曲面 Σ,K_{ab}是超曲面上外部曲率张量,K 是它的迹,N 是时移函数,q 是类空超曲面 Σ 上的度规 q_{ab}行列式.

作用量 S_Σ^{grav} 的性质我们已经知道了,现在研究(6.11.4b)式的作用量 S_Σ^{em}. 时空度规可以写成如下形式:

$$ds^2 = -dt^2 + q_{ab}dx^a dx^b, \tag{6.11.5}$$

即我们选择的是时轴正交坐标系,$N\equiv 1$,N^a 为零. 将 S_Σ^{em} 写成

$$S_\Sigma^{\text{em}} = \int dt\int_\Sigma d^3x L^{\text{em}}, \tag{6.11.6}$$

$$L^{\text{em}} = \frac{1}{16\pi}\sqrt{q}\{2q^{ab}[\dot{A}_a\dot{A}_b - 2\dot{A}_a(\partial_b A_0) + (\partial_a A_0)(\partial_b A_0)] - {}^{(3)}F_{ab}{}^{(3)}F^{ab}\}. \tag{6.11.7}$$

L^{em}是弯曲时空中电磁场的拉氏量,点表示对时间求导,

$$ {}^{(3)}F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a , \tag{6.11.8a}$$

$$ {}^{(3)}F^{ab} = q^{am} q^{bn\,(3)} F_{mn} . \tag{6.11.8b}$$

A_a 的共轭正则动量是

$$p^a = \frac{\partial L^{\mathrm{em}}}{\partial \dot{A}_a} = \frac{\sqrt{q}}{4\pi} q^{as} (\dot{A}_s - \partial_s A_0) = \frac{\sqrt{q}}{4\pi} q^{as} F_{0s} , \tag{6.11.9}$$

反过来,我们有

$$\dot{A}_b \frac{4\pi}{\sqrt{q}} p_b + \partial_b A_0 , \tag{6.11.10}$$

其中

$$p_b = q_{ab} p^a . \tag{6.11.11}$$

将电磁场的拉氏量写成 P^a 的形式:

$$L^{\mathrm{em}} = p^a \dot{A}_a \left[\frac{\sqrt{q}}{2\pi} q_{ab} p^a q^b + p^a (\partial_a A_0) + \frac{\sqrt{q}}{16\pi} {}^{(3)}F_{ab}{}^{(3)}F^{ab} \right] , \tag{6.11.12}$$

就得到

$$S_{\Sigma}^{\mathrm{em}} = \int \mathrm{d}t \int_{\Sigma} \mathrm{d}^3 x [p^a \dot{A}_a - H^{\mathrm{em}} + A_0 (\partial_a p^a)] , \tag{6.11.13}$$

$$H^{\mathrm{em}} = \frac{2\pi}{\sqrt{q}} q_{ab} p^a p^b + \frac{\sqrt{q}}{16\pi} {}^{(3)}F_{ab}{}^{(3)}F^{ab} . \tag{6.11.14}$$

在(6.11.13)式中,我们去掉了$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}t \int_{\Sigma} \mathrm{d}^3 x \partial_a (A_0 p^a)$这项,它转化成一个边界项.

现在我们将时移和位移包含到我们的哈密顿量中来,将 $\mathrm{d}t$ 根据下式变换,

$$\mathrm{d}t' = N \mathrm{d}t . \tag{6.11.15}$$

由于 A_0 有变换

$$A_0' = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^0} A_{\mu} , \tag{6.11.16}$$

我们发现当位移为零而时移为一般值时,电磁场的作用量是

$$S_{\Sigma}^{\mathrm{em}} = \int \mathrm{d}t \int_{\Sigma} \mathrm{d}^3 x [p^a \dot{A}_a - N H^{\mathrm{em}} + A_0 (\partial_a p^a)] . \tag{6.11.17}$$

要包含不为零的位移,需要一些技巧. 将 $\mathrm{d}x^a$ 根据下式变换

$$\mathrm{d}x'^a = \mathrm{d}x^a + N^a \mathrm{d}t , \tag{6.11.18}$$

于是,A_0 根据下式变换

$$A'_0 = A_0 - N^s A_s , \tag{6.11.19}$$

同时类空超曲面上 $x^0 = t + \mathrm{d}t$ 处 A_a 根据下式变换

$$A'_a = \frac{\partial x^s}{\partial x'^a} A_s(t + \mathrm{d}t, x^b - N^b \mathrm{d}t) = A_a + \dot{A}_a \mathrm{d}t - (\partial_s A_a) N^s \mathrm{d}t - (\partial_a N^s) A_s \mathrm{d}t. \tag{6.11.20}$$

$\dot{A}_a$ 必然根据下式变换

$$\dot{A}'_a = \dot{A}_a - (\partial_s A_a) N^s - (\partial_a N^s) A_s. \tag{6.11.21}$$

将方程(6.11.19)和(6.11.21)代入(6.11.17)式,我们得到位移不为零的电磁场作用量的表达式:

$$S_\Sigma^{\mathrm{em}} = \int \mathrm{d}t \int_\Sigma \mathrm{d}^3 x [p^a \dot{A}_a - NH^{\mathrm{em}} - N^s H_s^{\mathrm{em}} + A_0(\partial_a p^a)], \tag{6.11.22}$$

其中,我们定义了

$$H_s^{\mathrm{em}} = p^{a(3)} F_{sa}, \tag{6.11.23}$$

并忽略了$\int \mathrm{d}t \int_\Sigma \mathrm{d}^3 x \partial_a (A_s N^s p^a)$项.

现在写出不含边界项的整个 Einstein-Maxwell 作用量,引力部分的 S_Σ^{grav} 只是 ADM 作用量:

$$S_\Sigma^{\mathrm{grav}} = \int \mathrm{d}t \int_\Sigma \mathrm{d}^3 x (p^{ab} \dot{q}_{ab} - NH^{\mathrm{grav}} - N^s H_s^{\mathrm{grav}}), \tag{6.11.24}$$

其中

$$H^{\mathrm{grav}} = \frac{1}{2}(16\pi) G_{abcd} p^{ab} p^{cd} + \frac{1}{16\pi} \sqrt{q} R \tag{6.11.25a}$$

$$H_s^{\mathrm{grav}} = -2 p_{s|a}^{a}. \tag{6.11.25b}$$

$$p^{ab} = -\frac{1}{16\pi} \sqrt{q}(K^{ab} - q^{ab} K) \tag{6.11.26}$$

是与 q_{ab} 共轭的正则动量.

$$G_{abcd} = -\frac{1}{\sqrt{q}} (q_{ab} q_{cd} - q_{ac} q_{bd} - q_{ad} q_{bc}), \tag{6.11.27}$$

是 Wheeler-Dewit 度规. 将作用量(6.11.22)和(6.11.24)加起来,就得到 Einstein-Maxwell 作用量:

$$S_\Sigma^{\mathrm{grav}} = \int \mathrm{d}t \int_\Sigma \mathrm{d}^3 x (p^{ab} \dot{q}_{ab} + p^a \dot{A}_a - NH - N^s H_s - A_0 \ell), \tag{6.11.28}$$

其中

$$H = H^{\mathrm{grav}} + H^{\mathrm{em}} \tag{6.11.29}$$

是哈密顿约束,

$$H_s = H_s^{\mathrm{grav}} + H_s^{\mathrm{em}} \tag{6.11.30}$$

是微分约束,

$$\ell = -\partial_a p^a \tag{6.11.31}$$

是高斯约束.

现在考虑渐近平直时空. 对于这种时空,我们必须引入某种边界项,因为不能假设那些动力学变量和它们的正则动量在渐近无限远处为零. 以下,我们将取空间无限远处的渐近坐标为笛卡尔坐标.

首先,我们有 ADM 边界项

$$S_{\partial\Sigma}^{\mathrm{ADM}} = -\int \mathrm{d}t N^{+}(t) E_{\mathrm{ADM}}(t), \tag{6.11.32}$$

其中

$$N^{+}(t) = \lim_{r\to\infty} N(t, x^{a}), \tag{6.11.33}$$

是渐近空间无限远处的时移函数.

$$E_{\mathrm{ADM}} = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{16\pi}\oint\left(\frac{\partial h_{mn}}{\partial x^{n}} - \frac{\partial h_{nn}}{\partial x^{m}}\right)\mathrm{d}S^{m} \tag{6.11.34}$$

是时空的 ADM 能量. (6.11.34)式中 h_{mn} 表示在渐近笛卡尔坐标中线性化引力场的空间部分. 更明确地说,我们假设了渐近类空无限远处的空间坐标为笛卡尔坐标. 在这个坐标系中,时空度规可以写成 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ 是平直时空度规.

ADM 边界项是与渐近无限远处随时间演化相关的. 除了这个边界项之外,还有与空间无限远处渐近空间变换相关的位移不为零的边界项. 作用量(6.11.28)对 q_{ab} 的共轭动量 p^{ab} 变分得到

$$2\int \mathrm{d}t \int_{\Sigma} \mathrm{d}^{3}x (N_{a}\delta p^{ab})\Big|_{b},$$

这项必须在无限远处去掉,所以我们需要以下的边界项

$$S_{\partial\Sigma}^{\mathrm{trans}} = -\int \mathrm{d}t N_{a}^{+}(t) p_{\mathrm{ADM}}^{a}(t), \tag{6.11.35}$$

其中

$$N_{a}^{+}(t) = \lim_{r\to\infty} N_{a}(t, x^{a}), \tag{6.11.36}$$

是无限远处的位移.

$$P_{\mathrm{ADM}}^{a} = -\lim_{r\to\infty} 2\oint P^{ab}\mathrm{d}s_{b} \tag{6.11.37}$$

是时空的 ADM 动量.

到现在为止,我们讨论了与纯引力相关的项,包括边界项. 下面我们引入与电磁场相关的边界项. 首先将作用量对 A_a 的共轭动量 P^{a} 变分得到

$$\int \mathrm{d}t \int_{\Sigma} \mathrm{d}^{3}x \partial_{a}(A_{0}\delta p^{a}),$$

它必须在无限远处去掉,所以我们需要的电磁场边界项为

$$S_{\partial\Sigma}^{\mathrm{em}} = -\int \mathrm{d}t A_{0}^{+}(t) Q(t), \tag{6.11.38}$$

其中

$$A_0^+(t) = \lim_{r\to\infty} A_0(t, x^a), \tag{6.11.39}$$

是无限远处的电势,

$$Q = -\lim_{r\to\infty}\oint p_a \mathrm{d}S^a \tag{6.11.40}$$

是时空电荷.

这样,选取适当的边界项,我们得到整个 Einstein-Maxwell 作用量

$$S_\Sigma = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3x(p^{ab}\dot{q}_{ab} + p^a\dot{A}_a - NH - N^sH_s - A_0\ell)$$
$$- \int \mathrm{d}t[N_a^+(t)E_{\mathrm{ADM}}(t) + N_a^+(t)p^a_{\mathrm{ADM}}(t) + A_0^+(t)Q(t)] \tag{6.11.41}$$

于是,Einstein-Maxwell 场的哈密顿量就可以写出

$$H = \int_\Sigma \mathrm{d}^3x(NH + N^sH_s + A_0\ell) + N^+(t)E_{\mathrm{ADM}}(t) + N_a^+(t)p^a_{\mathrm{ADM}}(t) + A_0^+(t)Q(t). \tag{6.11.42}$$

只有当满足经典约束

$$H = 0, \tag{6.11.43a}$$

$$H_s = 0, \tag{6.11.43b}$$

$$\ell = 0 \tag{6.11.43c}$$

时哈密顿量才只剩最后三项.

前面我们看到,在渐近平直时空中,根据变分原理的要求,我们必须引入某种边界项. 作为一般黑洞时空的 Kerr-Newman 时空中的边界项尤其有趣,下面我们计算这个边界项.

在 Boyer-Lindquist 坐标中写出 Kerr-Newman 时空的线元:

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{\Sigma}\mathrm{d}t^2 - \frac{2a\sin^2\theta(r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma}\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi$$
$$+ \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2\sin^2\theta}{\Sigma}\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}\mathrm{d}r^2 + \Sigma\mathrm{d}\theta^2, \tag{6.11.44}$$

其中,

$$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta, \tag{6.11.45}$$

$$\Delta = r^2 + a^2 + Q^2 - 2Mr. \tag{6.11.46}$$

在此式中,M 是黑洞的 ADM 质量,Q 是它的电荷,a 是单位质量的角动量. 为了计算这个边界项,我们必须写出(6.11.44)式当 $r\to\infty$ 时的形式. 只考虑前面几阶得到

$$\mathrm{d}s^2 \approx -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \frac{4J\sin^2\theta}{r}\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2 + \left(1 + \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2, \tag{6.11.47}$$

其中 $J=Ma$ 是黑洞的角动量. 在笛卡尔坐标系中,此式可以写成

$$ds^2 \approx -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 - \frac{4J}{r^3}(xdy - ydx)dt + \left(1+\frac{2M}{r}\right)(dx^2+dy^2+dz^2), \tag{6.11.48}$$

这里的 r 不是(6.11.47)式中的 r,(6.11.47)式中的 r 是 Boyer-Lindquist 坐标,而(6.11.48)式中的 r 等于 $\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

现在我们必须确定离黑洞无限远处的坐标系. 我们选择一个绕笛卡尔坐标系的 z 轴以极小的角速度旋转的坐标系.(我们必须假设 ω 极小,否则很远处的观测者的速度将会超过光速. 更明确地说,取 ω 很小,边界项也是很好的近似,那些在无限远处计算出的速度也会小于光速.)因为在平直空间,以角速度 ω 旋转的 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 处的观测者的线速度是

$$\upsilon = \omega \times \boldsymbol{r}, \tag{6.11.49}$$

在笛卡儿坐标系中,N^a 代表线速度的 a 分量,我们有

$$N^a = \varepsilon^a_{bc}\omega^b\omega^c, \tag{6.11.50}$$

其中 ε^a_{bc}是 Levi-Civita 符号,$\varepsilon_{123}=1$.

哪种坐标系才会有这种位移呢? 作用量对 q_{ab}的共轭动量 p^{ab}变分得到的项

$$2\int dt\int d^3x(N^a\delta p^{ab})\Big|_b$$

在无限远处必须去掉. 如果位移按照(6.11.50)式选择,我们将得到边界项

$$S^{\text{rev}}_{\partial\Sigma} = -2\varepsilon_{abc}\int dt\omega^b\lim_{r\to\infty}\oint x^c p^{an}dS_n, \tag{6.11.51}$$

它就代替了(6.11.49)式中的边界项 $S^{\text{rev}}_{\partial\Sigma}$.

现在我们就来计算(6.11.51)式中的 $S^{\text{rev}}_{\partial\Sigma}$. 首先我们要做一个坐标变换,使得(6.11.48)式中的时空度规能用旋转坐标表示的度规代替,然后用这种表示来计算边界项. 当远处的坐标系旋转得很慢时,我们只对 ω 的一次项感兴趣. 考虑到以度规表示的坐标变换将产生 ω 的二次项,这些项可以忽略,所以我们可以用(6.11.48)式中的度规来计算边界项(6.11.51). 因为 $\omega=\omega\boldsymbol{k}$,我们得到

$$S^{\text{rev}}_{\partial\Sigma} = -\int dt\omega J. \tag{6.11.52}$$

我们仍然必须计算 ADM 边界项和电磁场边界项(6.11.38). 对于无限远的任意时移,Kerr-Newman 时空的边界项是

$$S^{\text{ADM}}_{\partial\Sigma} = -\int dt N^+ M. \tag{6.11.53}$$

为了计算电磁场边界项,首先回到 Boyer-Lindquist 坐标中. 对于 Kerr-Newman 解, A_μ 的唯一不为零的分量是

$$A_t = -\frac{Qr}{\Sigma}, \tag{6.11.54a}$$

$$A_\varphi = \frac{Qar}{\Sigma}\sin^2\theta. \tag{6.11.54b}$$

利用(6.11.9),(6.11.19)和(6.11.21)式我们发现,对于一般的时移和位移,A_a 的共轭动量 p^a 可以写成

$$p^a = \frac{1}{N}\frac{\sqrt{q}}{4\pi}q^{as}(F_{0s} - N^{b(3)}F_{bs}). \tag{6.11.55}$$

从表达式(6.11.55)和(6.11.54)式得到,在 Boyer-Lindquist 坐标中 p^a 的唯一不为零的分量是 p^r,在离黑洞很远的地方有

$$p^r = -\frac{Q}{4\pi r^2} + O(r^{-3}). \tag{6.11.56}$$

所以,电磁场边界项(6.11.38)可以写成

$$S_{\partial\Sigma}^{\mathrm{em}} = -\int \mathrm{d}tA_0^+ Q, \tag{6.11.57}$$

就像我们预期的,渐近坐标的旋转将使 ADM 和电磁场的边界项有点改变,但是,得到的修正 $O(\omega^2)$ 可以忽略.

Kerr-Newman 时空的哈密顿动力学

下面我们继续研究最大延拓的 Kerr-Newman 时空的哈密顿动力学. 首先,我们将这样的时空考虑为空间和时间两部分. 显然,我们想使 t 为常数的类空超曲面尽可能覆盖时空的大部分. 最大延拓的 Kerr-Newman 时空具有周期性的几何结构. 我们选择这样一个周期,使 t 为常数的类空超曲面在共形图上从左边的渐近无限远开始,沿任意路径穿过黑洞的内部区域,最后到达右边的渐近无限远,但是这种类空超曲面不能覆盖 Boyer-Lindquist 坐标为

$$r = r_- = M - \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} \tag{6.11.58}$$

的内视界以外的区域,否则,我们的超曲面将不会是类空的. 因此,我们对 Kerr-Newman 时空的哈密顿动力学的研究限制在这样一个区域内,它包括在共形图上左边和右边的外部区域以及连续两个 $r = r_-$ 的超曲面之间的区域. 类空超曲面从过去超曲面 $r = r_-$ 开始,然后穿过分支点:

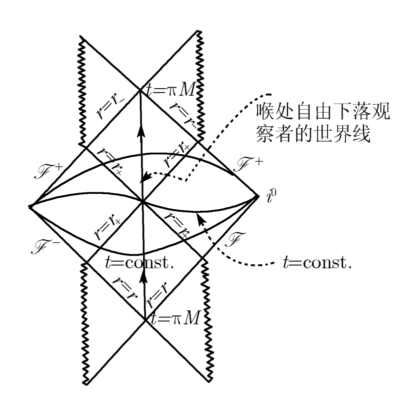


图 32　自由下落观察者的世界线在共形图中是一条穿过分支点的竖直线. 观察者的固有时间等同于渐近 Minkowski 时间

$$r = r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}, \tag{6.11.59}$$

最后终止于未来超曲面 $r = r_-$. 我们就是研究这个区域内的 Kerr-Newman 时空的哈密顿动力学.

首先要写出含适当边界项的作用量. 可是现在我们有两个渐近无限远,在这两个无限远处都有边界项,因此作用量应该具有以下的形式:

$$S = \int \mathrm{d}t \int_\Sigma \mathrm{d}^3 x (p^{ab}\dot{q}_{ab} + p^a \dot{A}_a - NH - N^s H_s - A_0 \ell)$$

$$- \int \mathrm{d}t [(N^+ + N^-)M + (A_0^+ - A_0^-)Q + (\omega^+ - \omega^-)J]. \tag{6.11.60}$$

其中上标带正和负的项分别代表左边和右边渐近无限远处的量,ω^+ 和 ω^- 是无限远处坐标系绕 z 轴旋转的角速度,因此 Kerr-Newman 时空的总哈密顿量可以写成

$$H_{\text{tot}} = \int_\Sigma \mathrm{d}^3 x (NH + N^s H_s + A_0 \ell) + (N^+ + N^-)M + (A_0^+ - A_0^-)Q + (\omega^+ - \omega^-)J. \tag{6.11.61}$$

现在的问题是,我们的哈密顿量具有大量不确定的自由度,实际上它可以是类空超曲面 Σ 上每点 x 处的超曲面度规 q_{ab} 和对应的正则动量 p^{ab} 的函数. 我们的目的是在 Einstein-Maxwell 理论下对稳态黑洞进行正则量子化,而稳态黑洞只由三个经典自由度描述,因此,有很多自由度必须去掉.

对于非旋转的黑洞时空,可以按以下的方式去掉这些自由度:首先写出渐近平直、球对称 Einstein-Maxwell 理论中的作用量,然后求解哈密顿约束、微分约束和高斯约束,这样就只剩下 4 个正则自由度了,它们是黑洞的质量 M 和电荷 Q 以及它们对应的正则动量 p_M 和 p_Q. 对于旋转黑洞,我们可以用相似的方法,从有某种对

称性的渐近平直 Einstein-Maxwell 理论开始,求解经典约束,最后就剩下 6 个正则自由度了,包括质量 M、电荷 Q、角动量 J 和它们分别对应的正则动量 p_M, p_Q 和 p_J.

在上述过程中,相空间退化成只剩物理自由度,这个过程的一个重要特点就是使得到的哈密顿量,即所谓的退化哈密顿量只涉及边界项. 最特别的情况是 Kerr-Newman 时空的约化哈密顿量成为

$$H^{\text{red}} = (N^+ + N^-)M + (A_0^+ - A_0^-)Q + (\omega^+ - \omega^-)J. \tag{6.11.62}$$

实际上约化哈密顿量可以用作系统的真实的物理的哈密顿量. 假设变量 q_{ab} 和 p^{ab} 能由一个一一对应的,与时间无关的函数可微的正则变换按下面的方法分离成 $(\varphi^\alpha, \pi_\alpha)$ 和 (ψ^A, π_A) 两组量

(a) 约化哈密顿量只取决于 φ^a 和 π_a

(b) 当 π_a 作为 x 函数时,p_α 满足

$$\dot{p}_\alpha = 0. \tag{6.11.63}$$

然后解出约束 $H=0$ 和 $H_s=0$,便可以写出剩余正则变量的函数

$$\varphi^\alpha = f^\alpha[\psi^A, \pi_A]. \tag{6.11.64}$$

假设函数 f^α 对 ψ^A 和 π_A 的导数都存在,加上以上的假设,约化哈密顿量的哈密顿方程

$$H^{\text{red}}[\psi^A, \pi_A] = (\text{边界项})\Big|_{\varphi^\alpha=f^\alpha,\ \pi_\alpha=p_\alpha} \tag{6.11.65}$$

和(6.11.63),(6.11.64)式与由 $\pi_\alpha = p_\alpha$ 确定的特殊标架中的 Einstein 方程是相同的.

这个结果的证明非常简单,泊松括号在正则变换下具有不变性,且如果正则变换与时间无关,那么哈密顿量保持不变,因此

$$\dot{\psi}^A(x) = \frac{\delta H}{\delta \pi_A(x)}\Big|_{\varphi^\alpha=f^\alpha,\ \pi_\alpha=p_\alpha}. \tag{6.11.66}$$

另一方面

$$H[\varphi^\alpha, \pi_\alpha, \psi^A, \pi_A]\Big|_{\varphi^\alpha=f^\alpha,\ \pi_\alpha=p_\alpha} = (\text{边界项})\Big|_{\varphi^\alpha=f^\alpha,\ \pi_\alpha=p_\alpha} = H^{\text{red}}[\psi^A, \pi_A]. \tag{6.11.67}$$

将(6.11.67)式对 π_A 微分得到

$$\int_\Sigma \mathrm{d}^3 y \frac{\delta H}{\delta \varphi^\alpha(y)}\Big|_{\varphi^\alpha=f^\alpha,\ \pi_\alpha=p_\alpha} \frac{\delta f^\alpha(y)}{\delta \pi_A(x)} + \frac{\delta H}{\delta \pi_A(x)}\Big|_{\varphi^\alpha=f^\alpha,\ \pi_\alpha=p_\alpha} = \frac{\delta H^{\text{red}}}{\delta \pi_A(x)}. \tag{6.11.68}$$

但由(6.11.63)式有

$$\dot{\pi}_\alpha(x) = \frac{\delta H}{\delta \varphi^\alpha(x)}\Big|_{\varphi^\alpha=f^a,\ \pi_\alpha=p_\alpha} = 0, \tag{6.11.69}$$

所以

$$\frac{\delta H}{\delta \pi_A(x)}\bigg|_{\varphi^\alpha = f^\alpha,\ \pi_\alpha = p_\alpha} = \frac{\delta H^{\mathrm{red}}}{\delta \pi_A(x)}. \tag{6.11.70}$$

换句话说,H^{red}给出了 ψ^A 的正确的运动方程. 得到 π_A 的运动方程的方法是完全类似的. 尽管我们只考虑了纯引力,但我们的分析很容易推广到包含电磁场的情况.

我们认为,退化哈密顿量只依赖于 M, Q, J 和 p_M, p_Q, p_J,而且

$$\dot{M} = \dot{Q} = \dot{J} = 0. \tag{6.11.71}$$

解微分约束可以得到关于 p_M, p_Q 和 p_J 的可微函数 ψ^A 和 p_A.

(6.11.62)式中的 H^{red}可以用作我们理论的哈密顿量,以 M, Q 和 J 作为构造空间的坐标,因此,以后将 H^{red}简写成 H.

由现在的哈密顿量可以得出正则运动方程

$$\dot{M} = \frac{\partial H}{\partial p_M} = 0, \tag{6.11.72a}$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial p_Q} = 0, \tag{6.11.72b}$$

$$\dot{J} = \frac{\partial H}{\partial p_J} = 0, \tag{6.11.72c}$$

$$\dot{p}_M = -\frac{\partial H}{\partial M} = -(N^+ + N^-), \tag{6.11.72d}$$

$$\dot{p}_Q = -\frac{\partial H}{\partial Q} = -(A_0^+ + A_0^-), \tag{6.11.72e}$$

$$\dot{p}_J = -\frac{\partial H}{\partial J} = -(\omega^+ - \omega^-), \tag{6.11.72f}$$

其中 p_M, p_Q 和 p_J 分别为 M, Q 和 J 的共轭动量,p_M 对时间的导数取决于类空超曲面在两个渐近无限远处的时移函数的选择,p_Q 对时间的导数取决于两个无限远处的电势差,p_J 对时间的导数取决于无限远处坐标系的旋转角速度之差. $N^\pm$, $\omega^\pm$ 和 $A_0^\pm$ 决定了理论的规范,从物理意义出发,我们选择以下特殊的规范:

$$N^+ \equiv 1, \tag{6.11.73a}$$

$$N^- \equiv 0, \tag{6.11.73b}$$

$$\omega^\pm \equiv 0, \tag{6.11.73c}$$

$$A_0^\pm \equiv 0. \tag{6.11.73d}$$

在这种规范下,由正则坐标表示的哈密顿量具有很简洁的形式:

$$H = M. \tag{6.11.74}$$

取这种规范的物理意义在于,我们以某种特殊观测者的角度来考虑 Kerr-Newman 时空. 我们的观测者静止于右边的无限远处,他的时间坐标是渐近闵科夫斯基时间,也就是这个观测者的固有时间,我们“冻结”了左边无限处的时间演化. 这是有

意义的,因为我们的观测者只能从一个无限远处作观测,对于这样的观测者,Kerr-Newman 时空的经典哈密顿量就是 M,即 Kerr-Newman 黑洞的 ADM 质量.

现在的问题是相空间坐标 M, Q, J, p_M, p_Q 和 p_J 只描述 Kerr-Newman 时空的静态方面,而在 Kerr-Newman 黑洞两个视界之间的区域没有类时 Killing 矢量场,这说明 Kerr-Newman 时空具有动力学性质. 接下来我们的任务就是找到能自然描述 Kerr-Newman 黑洞的动力学性质的正则变量.

当选择相空间坐标时,我们参考我们的观测者的性质:我们的观测者是一个惯性观测者,他静止于离黑洞无限远处. 对于这样一个观测者来说,Kerr-Newman 时空看起来是静态的,就是说它的动力学限制在黑洞视界内部. 这种性质就提示我们要怎样去选择相空间的坐标,那就是要使得当满足经典运动方程时,所有的动力学都限制在黑洞视界 $r=r_+$ 内. 我们马上就会明白,对描述时空动力学的相空间的选择与将时空分离成时间和空间的方法选择有关,我们选择的分离方法能使自由下落并穿过分支面的观测者的固有时间和远处静止观测者的固有时间等同. 根据等效原理,我们的这种分离方法对于揭示黑洞内部的物理性质和远处观测者测到的物理性质之间的联系具有优越性.

为了使问题简化,首先考虑 J 和 Q 只是外部参数,那么相空间就成为只由 M 和 p_M 构成的二维空间了. 在这个二维相空间中,我们对"旧"的相空间坐标 M 和 p_M 作一个变换,得到新的相空间坐标 R 和 p_R:

$$|p_M| = \sqrt{2MR - R^2 - Q^2 - a^2} + M\arcsin\left(\frac{M-R}{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}}\right) + \frac{1}{2}\pi M, \tag{6.11.75a}$$

$$p_R = \mathrm{sgn}(p_M)\sqrt{2MR - R^2 - Q^2 - a^2}, \tag{6.11.75b}$$

而且作以下的限制

$$-\pi M \leqslant p_M \leqslant \pi M. \tag{6.11.76}$$

有了(6.11.76)式的限制,变换(6.11.75)式就能很好确定. 由(6.11.75b)式得到

$$M = \frac{1}{2R}(R_R^2 + R^2 + Q^2 + a^2). \tag{6.11.77}$$

将 M 由(6.11.77)式代入(6.11.75a)式就得到由 R 和 p_R 构成的 p_M. 我们发现 M 和 P_M 之间的泊松括号是不变的,因此变换(6.11.75)式是正则变换.

由(6.11.74)和(6.11.77)式得到由 R 和 p_R 构成的经典哈密顿量

$$H = \frac{1}{2R}(p_R^2 + R^2 + Q^2 + a^2). \tag{6.11.78}$$

变量 R 的几何解释非常有趣,首先,我们写出 R 的哈密顿运动方程

$$\dot{R} = \frac{\partial H}{\partial p_R} = \frac{p_R}{R}. \tag{6.11.79}$$

根据(6.11.78)式,当 M 和 P_M 的经典运动方程满足时,R 的运动方程为

$$\dot{R} = \frac{2M}{R} - 1 - \frac{Q^2 + a^2}{R^2}. \tag{6.11.80}$$

从 Kerr-Newman 度规(6.11.45)可以得到,考虑观测者在 $\theta = \frac{\pi}{2}$面上,$\dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0$, 对于这个自由下落穿过分支面的观测者来说,当 r 变到 $r + \mathrm{d}r$ 时,他的固有时间 τ 的变化为

$$-\mathrm{d}\tau^2 = \frac{r^2}{r^2 + a^2 + Q^2 - 2Mr}\mathrm{d}r^2, \tag{6.11.81}$$

观测者的运动方程是

$$\dot{r}^2 = \frac{2M}{r} - 1 - \frac{a^2 + Q^2}{r^2}, \tag{6.11.82}$$

其中点代表对固有时间的导数. 可以看到(6.11.80)式和(6.11.82)形式相同,所以,从一个在 $\theta = \frac{\pi}{2}$的面自由下落穿过分支面的观测者的角度来说,我们可以将 R 解释为 Kerr-Newman 黑洞的虫洞喉半径. 我们还可以从(6.11.80)式看到,R 只能限制在$[r_-, r_+]$区域内,换言之,R 只能存在于 Kerr-Newman 黑洞的内外视界之间的区域. 正是从这个区域我们能找到一个时间坐标,使得时空对这个时间坐标是静态的. 因此,我们提出的对相空间坐标的两个要求都满足了:动力学限制在视界内,而且虫洞喉的时间坐标就是自由下落观测者的时间坐标.

有了以上的解释,(6.11.76)式的限制就可以理解了. 从(6.11.72d)式可以看到,当时移函数 $N^{\pm}$ 按(6.11.73)式选择时,M 的共轭正则动量 p_M 为 $-t+$(const.)时,t 是渐近观测者的时间坐标,此时对(6.11.75)式要考虑区分时间坐标 t 和喉处的自由下落观测者的固有时间. 我们已经提到过,不可能将 t 为常数的类空超曲面覆盖到共形图上 $r = r_-$ 的超曲面之外. 一个自由下落的观测者从过去超曲面 $r = r_-$ 穿过分支面再到达未来超曲面 $r = r_-$ 所需的固有时间是

$$\Delta t = 2\int_{r_-}^{r_+} \frac{r'\mathrm{d}r'}{\sqrt{2Mr' - r'^2 - Q^2 - a^2}} = 2\pi M. \tag{6.11.83}$$

现在回到(6.11.76)式的限制. 从(6.11.75a)式可以看到,当 $R = r^+$ 时,$|p_M| = 0$, 当 $R = r^-$ 时,$|p_M| = \pi M$. 当 t 为常数的类空超曲面在过去超曲面 $r = r_-$ 和分支面之间时,我们取 p_M 为正,而当 t 为常数的类空超曲面在分支点和未来超曲面 $r = r_-$ 之间时,我们取 p_M 为负.

接下来的任务就是在(6.11.78)式中的经典哈密顿量中,将 Q 和 a 用适当相空间变量的函数代替,这些变量是能够自然描述 Kerr-Newman 时空动力学的变量. 我们发现当 M 和 a 为常数时,存在一个正则变换使得相空间坐标(Q, p_Q)和$(J,$

p_J)变换到一个新的相空间坐标,记为 u 和 v,它们的正则动量是 p_u 和 p_v.

我们将通过两步得到这个正则变换. 首先,用两个坐标 ω_1 和 ω_2 的共轭正则动量 p_{ω_1}和 p_{ω_2}代替 Q 和 a,

$$p_{\omega_1} = Q, \tag{6.11.84a}$$

$$p_{\omega_2} = a. \tag{6.11.84b}$$

于是,(6.11.78)式的经典哈密顿量变成

$$H = \frac{1}{2R}(p_R^2 + p_{\omega_1}^2 + p_{\omega_2}^2 + R^2). \tag{6.11.85}$$

接下来就是寻找 ω_1 和 ω_2,我们推测 ω_1 和 ω_2 分别与 Q 和 J 的共轭动量 p_Q 和 p_J 存在着某种关联. 因为从(6.11.72e)式可以看出,p_Q 决定了电磁规范, p_J 决定了远处坐标系的旋转角速度. 我们首先给出在一般电磁规范下远处坐标系以任意角速度旋转的经典哈密顿量:

$$H = \frac{1}{2R}(p_R^2 + p_{\omega_1}^2 + p_{\omega_2}^2 + R^2) + (A_0^+ - A_0^-)p_{\omega_1} + M(\omega^+ - \omega^-)p_{\omega_2}, \tag{6.11.86}$$

这是由(6.11.62), (6.11.72e),(6.11.72f)和当满足经典运动方程时 M 为常数得出的. 我们得到 ω_1 和 ω_2 的哈密顿运动方程

$$\dot{\omega}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_{\omega_1}} = \frac{p_{\omega_1}}{R} - \dot{p}_Q, \tag{6.11.87a}$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_{\omega_2}} = \frac{p_{\omega_2}}{R} - M\dot{p}_J. \tag{6.11.87b}$$

将(6.11.87a), (6.11.87b)式两边同时沿相空间的经典轨道积分就得到关于 R, p_R, ω_1, ω_2, p_{ω_1}和 p_{ω_2}的表达式:

$$p_Q = \int \frac{p_{\omega_1}}{R\dot{R}}\mathrm{d}R - \omega_1, \tag{6.11.88a}$$

$$p_J = \int \frac{p_{\omega_2}}{R\dot{R}}\mathrm{d}R - \omega_2, \tag{6.11.88b}$$

其中,

$$\dot{R} = -\operatorname{sgn}(p_M)\sqrt{\frac{2M}{R} - 1 - \frac{p_{\omega_1}^2 + p_{\omega_2}^2}{R}}. \tag{6.11.89}$$

作这个替换是由于我们选择了 $\dot{p}_Q = \dot{p}_J = 0$. 因为要使得无限远处的电势为零和渐近坐标为非旋转的是可以做到的. 选择适当的积分常数后我们得到

$$p_Q = \operatorname{sgn}(p_M)p_{\omega_1} \times \left[\arcsin\left(\frac{p_R^2 + p_{\omega_1}^2 + p_{\omega_2}^2 - R^2}{\sqrt{(p_R^2 + p_{\omega_1}^2 + p_{\omega_2}^2 + R^2)^2 - 4R^2(p_{\omega_1}^2 + p_{\omega_2}^2)}} + \frac{\pi}{2}\right)\right] - \omega_1, \tag{6.11.90a}$$

$$p_J = \mathrm{sgn}(p_M)\frac{2Rp_{\omega_2}}{p_R^2 + p_{\omega_1}^2 + p_{\omega_2}^2 - R^2}$$
$$\times\left[\arcsin\left(\frac{p_R^2 + p_{\omega_1}^2 + p_{\omega_1}^2 - R^2}{\sqrt{(p_R^2 + p_{\omega_1}^2 + p_{\omega_2}^2 + R^2)^2 - 4R^2(p_{\omega_1}^2 + p_{\omega_2}^2)}}\right) + \frac{\pi}{2}\right] - \omega_2, \tag{6.11.90b}$$

式中

$$M = \frac{1}{2R}(p_R^2 + p_{\omega_1}^2 + p_{\omega_2}^2 + R^2)^2. \tag{6.11.91}$$

(6.11.75b), (6.11.84), (6.11.90)式构成一个从相空间坐标 M, p_M, Q, p_Q, J, p_J 到相空间坐标 R, p_R, ω_1, p_{ω_1}, ω_2, p_{ω_2}的变换. 很容易证明,它是一个正则变换,加上条件

$$\left|\frac{p_Q + \omega_1}{p_{\omega_1}}\right| \leqslant \pi, \tag{6.11.92a}$$

$$\left|\frac{Mp_J - \omega_2}{p_{\omega_2}}\right| \leqslant \pi, \tag{6.11.92b}$$

它还是个一对一的变换. 给出这些限制是由于我们只考虑两个 $r = r_-$ 的超曲面之间的时空. 当渐近无限远处的电势为零且渐近坐标系是非旋转的时候,$\dot{p}_Q = \dot{p}_J = 0$,我们得出的 ω_1 和 ω_2 具有以下的性质:在过去超曲面 $r = r_-$ 处,$\omega_1 = -Q\pi + p_Q$, $\omega_2 = -a\pi + Mp_J$; 在分支面处 $\omega_1 = p_Q$, $\omega_2 = Mp_J$;在未来超曲面 $r = r_-$ 处,$\omega_1 = Q\pi + p_Q$,$\omega_2 = a\pi + Mp_J$. 也就是说,t 为常数的超曲面不能超出 $r = r_-$ 的超曲面以外,这使 ω_1 和 ω_2 的经典区域受到限制.

最后一步,对 ω_1, p_{ω_1}和 ω_2, p_{ω_2}作一个正则变换得到变量 u, p_u 和 v,p_v. 我们定义

$$u = p_{\omega_1}\sin\left(\frac{\omega_1}{p_{\omega_1}}\right), \tag{6.11.93a}$$

$$p_u = p_{\omega_1}\cos\left(\frac{\omega_1}{p_{\omega_1}}\right), \tag{6.11.93b}$$

$$v = p_{\omega_2}\sin\left(\frac{\omega_2}{p_{\omega_2}}\right), \tag{6.11.93c}$$

$$p_v = p_{\omega_2}\cos\left(\frac{\omega_2}{p_{\omega_2}}\right). \tag{6.11.93d}$$

这个变换是正则变换,符合我们的条件. 我们发现

$$P_{\omega_1}^2 = p_u^2 + u^2, \tag{6.11.94a}$$

$$p_{\omega_2}^2 = p_v^2 + v^2. \tag{6.11.94b}$$

也就是说,我们将 $p_u^2 + u^2$ 看作 Q^2,$p_v^2 + v^2$ 看作 a^2,那么 Kerr-Newman 黑洞的经典哈密顿量就具有非常简洁的形式:

$$H = \frac{1}{2R}(p_R^2 + p_u^2 + p_v^2 + R^2 + u^2 + v^2). \tag{6.11.95}$$

Kerr-Newman 黑洞的量子理论

完成了包括 Kerr-Newman 黑洞在内的稳态时空的经典哈密顿理论之后,接下来讨论这类时空的正则量子化理论,再接下来讨论一类特殊的正则量子化理论. 我们定义希尔伯特空间为 $L^2(\mathscr{R}^+ \times \mathscr{R} \times \mathscr{R},\ R^s\ dRdudv)$,其内积定义为

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int_0^\infty dRR^s \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} dv \psi_1^*(R, u, v)\psi_2(R, u, v). \tag{6.11.96}$$

将(6.11.95)式中的经典哈密顿量用对应的对称算符代替,即 $p_R \to -i(\partial/\partial R)$,$p_u \to -i(\partial/\partial u)$,$p_v \to -i(\partial/\partial v)$,得到

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}R^{-s}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^{s-1}\frac{\partial}{\partial R}\right) - \frac{1}{2R}\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{1}{2R}\frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{1}{2}R + \frac{u^2}{2R} + \frac{v^2}{2R}. \tag{6.11.97}$$

这个算符可以看作是 Kerr-Newman 黑洞的哈密顿算符. 它的本征值就是远处静止观测者测得的黑洞的 ADM 质量的本征值. 它的本征方程为

$$\left[-\frac{1}{2}R^{-s}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^{s-1}\frac{\partial}{\partial R}\right) - \frac{1}{2R}\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{1}{2R}\frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{1}{2}R + \frac{u^2}{2R} + \frac{v^2}{2R}\right]\psi(R, u, v) = E\psi(r, u, v). \tag{6.11.98}$$

这个方程是我们的主要结果. 在某种意义上,可以认为是所有黑洞的不含时薛定谔方程. $\psi(R, u, v)$是黑洞的波函数. 对于 $s=1$ 的特殊情况,(6.11.98)具有非常简洁漂亮的形式:

$$\frac{1}{2R}\left(-\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{\partial^2}{\partial v^2} + R^2 + u^2 + v^2\right)\psi(R, u, v) = E\psi(R, u, v). \tag{6.11.99}$$

如果我们将 $\psi(R, u, v)$写成

$$\psi(R, u, v) = \psi(R)\varphi_1(u)\varphi_2(v), \tag{6.11.100}$$

则(6.11.98)式可以分离成 M,Q^2 和 a^2 的本征方程

$$\left[-\frac{1}{2}R^{-s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(R^{s-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\right)+\frac{1}{2}R+\frac{Q^2}{2R}+\frac{a^2}{2R}\right]\psi(R)=M\psi(R),\qquad(6.11.101\mathrm{a})$$

$$\left[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}+u^2\right]\varphi_1(u)=Q^2\varphi_1(u),\qquad(6.11.101\mathrm{b})$$

$$\left[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}v^2}+v^2\right]\varphi_2(v)=a^2\varphi_2(v).\qquad(6.11.101\mathrm{c})$$

现在我们考虑黑洞的 ADM 质量的本征方程(6.11.101a). 此式可改写为

$$\left[R^{-s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(R^{s-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\right)\right]\psi(R)=\left(\frac{Q^2}{R}+\frac{a^2}{R}+R-2M\right)\psi(R).$$

(6.11.102)

我们发现,函数

$$\frac{Q^2}{R}+\frac{a^2}{R}+R-2M$$

在 $r_-<R<r_+$ 为正,其他情况为负或为0. 如果从半经典的理论考虑,应该可以推测当 $r_-<R<r_+$ 时,波函数有震荡,而在其他地方会呈指数形式. 因此我们的系统就类似于一个势阱中的粒子,R 就如经典情况中的一样,被限制在黑洞内外两视界之间. 半经典的情况是,对应 R 的波包被内视界反射. 当黑洞处于稳态时,内外视界之间存在着一个驻波. 因此,由于我们的时空只在 $-\pi M\leqslant t\leqslant\pi M$ 区域有效而造成的经典不完整性被量子力学消除了;当黑洞处于稳态时,视界之间没有波包的传播,因而我们的量子理论在任何时候都有效. 但是波只存在于施瓦西视界和奇点之间,方程(6.11.100)和氢原子的薛定谔方程的性质之间存在着一个很有趣的相似性,当氢原子处于 s 态时,即电子绕质子转动的轨道角动量为零,从经典轨道理论来看,电子应该在很短的时间内撞到质子. 但是在量子力学中,这是由于电子波包被质子反射而变成电子驻波了. 这就使得氢原子量子理论在任何时候都有效. 在施瓦西黑洞中,黑洞的奇点对应质子,而喉半径 R 对应电子到质子的距离. 黑洞和氢原子一些经典问题由量子理论给出的解是相似的.

现在我们对本征方程(6.11.101a)进行详细讨论. 如果令

$$x=R^{3/2},\qquad(6.11.103\mathrm{a})$$

$$\psi=x^{(1-2s)/6}\chi(x),\qquad(6.11.103\mathrm{b})$$

并定义

$$\rho=\frac{2s-1}{6},\quad s\geqslant 2,\qquad(6.11.104\mathrm{a})$$

$$\rho=\frac{7-2s}{6},\quad s<2.\qquad(6.11.104\mathrm{b})$$

则(6.11.101a)式变为

$$\frac{9}{8}\left[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\rho(\rho-1)}{x^2}+\frac{4}{9}\left(x^{3/2}+\frac{Q^2+a^2}{x^{3/2}}\right)\right]\chi(x) = M\chi(x). \tag{6.11.105}$$

当 $\rho\geqslant 3/2$ 时,$M^2-Q^2-a^2$ 的本征值总是正的,而且,当 $1/2\leqslant\rho\leqslant 3/2$ 时,我们可以通过适当选择 $x=0$ 处波函数 $\chi(x)$ 的边界条件或者说通过选择适当的延拓,使 $M^2-Q^2-a^2$ 为正. 对方程(6.11.105)的 WKB 分析得到,当 $Q^2+a^2\gg 1$,$M_n^2-Q^2-a^2\gg 1$,于是 $r\gg 1$,WKB 本征值 M_n 具有性质

$$M_n^2-Q^2-a^2 = 2n+1+O(1), \tag{6.11.106}$$

n 是整数,$O(1)$ 代表当 n 趋向很大时为零的项. 大部分文章对(6.11.105)式的分析结果得到(6.11.106)式右边的第一项,而(6.11.106)式给出的是严格解. 即使 $\sqrt{Q^2+a^2}$ 和 n 相对很小,也就是说,在半经典限制下,$\sqrt{M^2-Q^2-a^2}$ 也有 $\sqrt{2n+1}$ 的形式.

现在,我们该怎么去理解这些结果呢? 考虑到霍金辐射,由 $M^2-Q^2-a^2$ 的正定性得出很有趣的结论:如果把霍金辐射看成是从高能本征态到低能本征态的跃迁的结果,那么谱 $M^2-Q^2-a^2$ 的正定性意味着,一个非极端的 Kerr-Newman 黑洞永远不可能通过霍金辐射成为一个绝对零度的极端黑洞. 这个结论与热力学第三定律和极端黑洞和非极端黑洞之间的性质上的区别都是相符的. 这个结论证明我们对描述 Kerr-Newman 时空的相空间坐标的选择是合理的.

在讨论(6.11.106)式的意义之前,先通过(6.11.101b)和(6.11.101c)计算 Q 和 a 的谱. 可以看出这两个方程本质上都是一维线性谐振子的不含时薛定谔方程. 当(6.11.101b)式作为谐振子的本征方程时,Q^2 的本征值是

$$Q_k^2 = 2k+1, \tag{6.11.107}$$

在自然单位制下

$$Q_k^2 = (2k+1)\frac{e^2}{\alpha}, \tag{6.11.108}$$

其中,$k=0,1,2,\cdots$,在这个方程当中,e 是元电荷,

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}\approx\frac{1}{137} \tag{6.11.109}$$

是精细结构常数. 也就是说,黑洞的电荷谱是分立的.

我们可能对(6.11.108)式中的电荷谱的合理性感到混淆:至少对于基本粒子,电荷 Q 本身是个整数,而不是 Q^2. 这看上去与所有可能的观测和期望值矛盾,而且与我们物理的基本概念不相符.

然而事实不是这样的. 首先,由于 $|Q|\gg M$,那些基本粒子肯定不是黑洞;第

二,由量纲分析得出,(6.11.108)式的电荷谱正好是我们对黑洞所预期的. 当电荷写成自然常数 ε_0,$\hbar$ 和 c 的形式时,我们发现,电荷的自然单位就是所谓的"普朗克电荷"

$$Q_{pl} = \sqrt{4\pi\varepsilon_0\hbar c}. \tag{6.11.110}$$

我们发现恰恰是普朗克电荷的平方 Q^2 而不是普朗克电荷本身正比于 $\hbar$. 对于束缚系统,当我们将物理量写成与系统相关的自然常数的形式时,谱中 $\hbar$ 一定乘了一个整数,可观测的物理量一般是按照这种方式被量子化的. 例如,氢原子中相关的物理常数是 ε_0,$\hbar$,e 和电子质量 m_e,这些量可以构成一个自然单位的能量

$$\frac{m_e e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2}.$$

我们希望能量被量子化且能量的本征值具有以下的形式:

$$E_n = -\gamma\frac{m_e e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2 n^2}, \tag{6.11.111}$$

其中 γ 是纯数,n 是整数,如果取 $\gamma = \frac{1}{2}$,得到的正好是氢原子的能谱. 对于黑洞,我们允许用的自然常数只有 $\hbar$, c, G 和 ε_0,因此(6.11.110)式中的普朗克电荷 Q_{pl} 是黑洞的自然单位的电荷,也就是说,(6.11.108)式的电荷就是我们期望的黑洞的电荷谱.

除了量纲方面的论证,还有另一个理由说明为什么黑洞的电荷不必要有和普通物质相同的谱. 由 Kerr-Newman 黑洞的共形图很容易看出 t 为常数的类空超曲面永远不会到达黑洞的奇点 $R=0$. 从这点可以得到在这些超曲面上,任意一处的电场力线都没有起点和终点(如果有的话在奇点 $R=0$ 处也有),而是穿过 Kerr-Newman 虫洞到达另一个不连通的区域. 因此我们不可能像讨论一般物质的电荷一样来讨论黑洞的电荷. 对于一般物质,电荷分布在电场力线的出发点或终点,而对于黑洞,根本不存在这样的点. 因此,外部观测者观测到黑洞的电荷是黑洞时空的几何和因果结构导致的,而不是因为黑洞具有物质的性质. 因此黑洞的电荷没必要与一般物质的电荷相同,也没必要与一般物质有相同的谱.

现在讨论方程(6.11.101c),它给出 a^2 的谱. 与电荷相似,我们找到 a^2 的可能的本征值为

$$a_l^2 = 2l+1, \tag{6.11.112}$$

恢复自然常数有

$$a_l^2 = (2l+1)\frac{\hbar G}{c}, \tag{6.11.113}$$

其中 $l=0, 1, 2, \cdots$它也是以 $\hbar$ 乘一个整数的方式被量子化的. 将(6.11.106)(6.11.108)和(6.11.112)式联合,我们发现,在半经典限制下,黑洞质量本征

值为

$$M_n = \sqrt{2m+1}, \tag{6.11.114}$$

$$m = n + l + k = 0, 1, 2, \cdots \tag{6.11.115}$$

恢复自然常数有

$$M_m = \sqrt{2m+1}M_{pl}, \tag{6.11.116}$$

其中

$$M_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \tag{6.11.117}$$

是普朗克质量.

考虑到黑洞的总面积,M, Q 和 a 的谱给出有趣的结论. Kerr-Newman 黑洞的外视界面积

$$A^{+} = 4\pi(r_{+}^{2} + a^{2}). \tag{6.11.118}$$

内视界面积为

$$A^{-} = 4\pi(r_{-}^{2} + a^{2}). \tag{6.11.119}$$

利用(6.11.106)和(6.11.108)式,我们得到量

$$a^{tot} = A_{+} + A_{-}, \tag{6.11.120}$$

为了方便起见,我们称之为黑洞总面积. 它的半经典本征值具有以下的形式

$$A_{n,l,k}^{tot} = 16\pi(2n + 2l + k + 1) \tag{6.11.121}$$

恢复自然常数有

$$A_{n,l,k}^{tot} = 16\pi(2n + 2l + k + 1)l_{pl}^{2}. \tag{6.11.122}$$

$$l_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^{3}}} \tag{6.11.123}$$

是普朗克长度,这个结论与 Bekenstein 于 1974 年提出的,后来又有很多人研究得出的结论非常相似. 他们提出,黑洞外视界面积谱具有以下的形式:

$$A_{n}^{+} = \gamma n l_{pl}^{2}, \tag{6.11.124}$$

n 为整数,γ 为纯数. 由此式得出,当 $\gamma = 16\pi$ 时,黑洞的总面积按照上式量子化.

现在我们计算黑洞的角动量谱. 从(6.11.113),(6.11.115),(6.11.116)式得出黑洞总角动量 $J = Ma$ 的可能的本征值有以下的形式

$$J_{n,l,k} = \pm 2\sqrt{l(l + n + k + 1)}\hbar \tag{6.11.125}$$

对于 $k = 0$ 的不带电黑洞,当 $l \gg n$ 时,角动量本征值为

$$J_m = m_j \hbar, \tag{6.11.126}$$

其中 $m_j = 0, \pm 2, \pm 4, \cdots$.

可以看到,黑洞的角动量谱就像我们理论预言的一样,至少在它取极限时是我们期望的,即角动量为偶数. 当黑洞从一个角动量本征态跃迁到另一个本征态时,就会引起辐射或吸收,由于引力子的自旋是 2,因此可以推测到黑洞角动量只能以偶数的整数倍变化. 例如,由两个绕质心转动的质点组成的系统每吸收或辐射一个引力子,它们的角动量量子数就改变一个偶数. 所以,对于极端黑洞,由(6.11.126)式给出的角动量谱是合理的.

第7章　黑洞的引力效应

7.1　有质量标量粒子的有限运动

有质量经典粒子在克尔场和施瓦西场中的运动已为许多工作研究过.但是有质量粒子在微黑洞(其半径可以和粒子的德布罗意波长相比拟)附近运动则出现量子性质.

在本节中,我们采用 Klein-Gordon 方程,讨论有质量标量粒子的弱相对论运动.

1. 施瓦西场中的情况

设粒子质量为 μ. 选用 Eddington-Finkelshtein 坐标($\hat{t}=t+r^{+}-r, r, \theta, \varphi$)比较方便,因为它不仅当 $r>r_g=2M$,而且对于进入 $r<r_g$ 区域的粒子,也可以描述其运动.在这一坐标系中,度规具有形式:

$$
(g^{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 1+\dfrac{r_g}{r} & -\dfrac{r_g}{r} & 0 & 0 \\ -\dfrac{r_g}{r} & -\left(1-\dfrac{r_g}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{bmatrix} \tag{7.1.1}
$$

K-G 方程具有形式:

$$
(-g)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left[(-g)^{-1/2}g^{\mu\nu}\frac{\partial\Phi}{\partial x^{\nu}}\right]+\mu^2\Phi=0. \tag{7.1.2}
$$

分离变量可得

$$
\Phi(\hat{t}, r, \theta, \varphi)=\int \mathrm{d}\omega \sum_{l,m}\exp(-\mathrm{i}\omega\hat{t})R_{lm}(r)Y_l^m(\theta,\varphi), \tag{7.1.3}
$$

且径向方程可以用量纲为一的变量 $x=\dfrac{\hat{r}}{r_g}, \hat{\omega}=\omega r_g$ 写出

$$
x(1-x)R''+[1-2(1-\mathrm{i}\hat{\omega})x]R'-[\hat{\omega}^2x(x+1)-\hat{\mu}^2x^2-\mathrm{i}\hat{\omega}-l(l+1)]R=0. \tag{7.1.4}
$$

当

$$|\hat{\omega}^2 x(x+1)-\hat{\mu}^2 x^2| \ll l(l+1)$$

时,即在引力半径附近,方程(7.1.4)变为

$$x(1-x)R''+[1-2(1-\mathrm{i}\hat{\omega})x]R'+[l(l+1)+\mathrm{i}\hat{\omega}]R=0. \quad (7.1.5)$$

这一方程的线性无关解为

$$\begin{cases} R_1 = {}_2F_1(-l-\mathrm{i}\hat{\omega}, 1+l-\mathrm{i}\hat{\omega}; 1; x), \\ R_2 = R_1 \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} C_k x^k; \qquad (x<1) \end{cases} \quad (7.1.6)$$

$$\begin{cases} \tilde{R}_1 = {}_2F_1(-l-\mathrm{i}\hat{\omega}, 1+l-\mathrm{i}\hat{\omega}; 1-2\mathrm{i}\hat{\omega}; 1-x), \\ \tilde{R}_2 = (1-x)^{2\mathrm{i}\hat{\omega}}\,{}_2F_1(-l+\mathrm{i}\hat{\omega}, 1+l+\mathrm{i}\hat{\omega}; 1+2\mathrm{i}\hat{\omega}; 1-x). \end{cases} \quad (|x-1|<1)$$

在黑洞的引力场中,波函数的行为有一个特征,对于具有任意角动量的粒子,函数 R_2 中存在一个对数奇点($x=0$).这类特征不依于所取的长波近似,对于 $\lambda \ll r_g$ 的情况仍有这一特征.这是因为被黑洞俘获的粒子经过中心奇点的过程与粒子的角动量无关.

在远离黑洞的区域, $\hat{\omega}^2 x^2 \gg l(l+1)$,方程(7.1.4)的解在弱相对论近似

$$0 < \hat{\Omega}^2 = \hat{\mu}^2 - \hat{\omega}^2 \ll \hat{\mu}^2$$

下,可以渐近地表示为退化了的超几何函数:

$$R_\infty(x) = \mathrm{e}^{-\hat{\Omega}x} x^{l+\mathrm{i}\hat{\omega}} \Psi\left(1+l-\frac{\hat{\omega}^2}{2\hat{\Omega}}, 2+2l; 2x\hat{\Omega}\right). \quad (7.1.7)$$

由所获得的解,加上边界条件(中心处或边界处),便可求出施瓦西场中弱相对论粒子的能谱.

面 r_g 对于经典粒子是单向膜.假设对于量子化的粒子仍有这一性质.在 r_g 面上,我们选择 $\tilde{R}_1$ 与被黑洞俘获的粒子相对应.在区域 $x \gg 1$,这个解具有渐近行式:

$$\tilde{R}_1 \sim x^{l+\mathrm{i}\hat{\omega}} \frac{\Gamma(1+l)}{\Gamma(1+l-\mathrm{i}\omega)} + \frac{\mathrm{i}}{\hat{\omega}} x^{-1-l-\mathrm{i}\hat{\omega}} \frac{\Gamma(1+l+\mathrm{i}\hat{\omega})}{\Gamma(2+2l)\,|\Gamma(-l-\mathrm{i}\hat{\omega})|^2}.$$

当 $\Omega x \ll 1$ 时,解 R_∞ 具有类似的形式.忽略对数项,函数 R_∞ 具有渐近行式:

$$R_\infty \sim x^{l+\mathrm{i}\hat{\omega}} \frac{\psi\left(1+l-\frac{\omega^2}{2\hat{\Omega}}\right)}{\Gamma(2+2l)\,\Gamma\left(-l-\frac{\hat{\omega}^2}{2\hat{\Omega}}\right)} + x^{-1-l+\mathrm{i}\hat{\omega}} \left(\frac{1}{2\hat{\Omega}}\right)^{2l+1} \frac{\Gamma(1+2l)}{\Gamma\left(1+l-\frac{\hat{\omega}^2}{2\hat{\Omega}}\right)}.$$

分别比较上两式中对应的 x^l 项和 x^{-1-l}项系数,可以得到确定施瓦西场中本征能谱的方程:

$$\psi\left(1-l-\frac{\hat{\omega}^2}{2\hat{\Omega}}\right)\frac{\Gamma\left(1+l-\frac{\hat{\omega}^2}{2\hat{\Omega}}\right)}{\Gamma\left(-l-\frac{\hat{\omega}^2}{2\hat{\Omega}}\right)}(2\hat{\Omega})^{1+2l}$$

$$=\mathrm{i}\hat{\omega}[\Gamma(1+2l)\Gamma(2+2l)]^2\frac{|\Gamma(-l-\mathrm{i}\hat{\omega})|^2}{|\Gamma(1+l-\mathrm{i}\hat{\omega})|^2}. \tag{7.1.8}$$

能量的复数值满足方程(7.1.8),即能级不是定态的.粒子被黑洞俘获而引起的准定态能级分裂本质上取决于粒子的能量和角动量.在平直空间中,类氢原子的本征值谱由波函数在边界上为零来求出.在所讨论的近似下,粒子所在的局部区域中,施瓦西场和库仑场的差别很小,系能

$$\hat{\Omega}=\frac{\hat{\mu}^2}{2n}+\Delta\hat{\Omega}-\mathrm{i}\hat{\varepsilon}, \tag{7.1.9}$$

且

$$|\Delta\hat{\Omega}|,\hat{\varepsilon}\ll\frac{\hat{\mu}}{2n}\equiv\hat{\Omega}_0^c,$$

此时有

$$1+l-\frac{\hat{\omega}^2}{2\hat{\Omega}}\approx1+l-n\left(1-\frac{\Delta\hat{\Omega}}{\hat{\Omega}_0^c}-\mathrm{i}-\frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{\Omega}_0^c}\right).$$

在我们研究的长波近似下,衰减随着粒子角动量的增大而很快减小:

$$\left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{\Omega}_0^c}\right)_{n,l}=\hat{\omega}(\hat{\Omega}_0^c)^{1-2l}\prod_{s=1}^{l}\left(1+\frac{\hat{\omega}^2}{s^2}\right)\cdot$$

$$\frac{(2l+1)^2}{n2^{2l-1}[(2l+1)!!]^4}\frac{\Gamma(n+l+1)}{\Gamma(n-l)}. \tag{7.1.10}$$

在导出(7.1.10)式时,假定粒子在黑洞附近的行为是经典的,但是当粒子的康普顿波长和黑洞的引力半径相比拟时粒子的产生是可能的.在霍金过程中,产生的粒子可能占据准静态能级.产生的反粒子按随动系计算经过有限长时间便落入黑洞的中心奇点.我们采用在视界 r_g 处对解进行解析延拓的方法来研究粒子的产生过程.在区域 $x\gg1$,解 $\tilde{R}_2$ 具有渐近行为

$$\tilde{R}_2\sim x^{l+\mathrm{i}\hat{\omega}}\frac{\Gamma(1-2l)}{\Gamma(1+l-\mathrm{i}\hat{\omega})}-\frac{\mathrm{i}}{\hat{\omega}}x^{-1-l+\mathrm{i}\hat{\omega}}$$

$$\times\frac{\Gamma(1+l+\mathrm{i}\hat{\omega})}{\Gamma(2+2l)|\Gamma(-l-2\mathrm{i}\hat{\omega})|^2},$$

与解 $\tilde{R}_1$ 不同的只是 i 前面的符号.这导致衰减$\hat{\varepsilon}$的不同符号.因此,霍金过程导致黑洞附近粒子向准静态能级聚集.粒子聚集的过程和被黑洞俘获的过程是独立的,

所以可以期望系统中动力学平衡的建立. 在平衡状态存在的情况下,由平衡的稳定性条件 $\varepsilon=0$,可以求出粒子的产生幅和俘获幅之间的关系.

在区域 $|x-1|<1$ 中,与粒子 - 反粒子对产生相对应的完全解由下式给出:

$$\Phi^{out} \sim [\theta(x-1)\tilde{R}_2(x-1) + e^{2\pi\omega}\hat{\theta}(1-x)\tilde{R}_2 \cdot (1-x)] e^{-i\omega\hat{t}} Y_l^m(\theta,\varphi). \tag{7.1.11}$$

在这种情况下,$x=0$ 附近的解很有趣. 这一解由解析延拓的方法得到,具有形式

$$\Phi^{out} \sim R_1 \ln x + \sum_k B_k x^k. \tag{7.1.12}$$

式中除了正常部分以外还有奇异部分,这是和平直空间库仑场中的静态解不同的.

2. 克尔场中的情况

黑洞的旋转改变了引力场的性质,相应地也改变了能谱的图像,对于准静态能级衰减的大小有特别强烈的影响. 在径向坐标的所有取值范围内对波方程进行全面的分析是十分复杂的,因为拓扑变得相当复杂;而且把解延拓过 r_+ 和 r_-,使积分变得非常复杂,特别是因果规律遭到破坏. 所以,我们只限于研究外部区域 $r>r_+$. 在这个区域,我们要用更简单的 Boyer-Lindquist 坐标 t,r,θ,φ. 此时 Kerr 度规具有熟知的形式. 将相应的 Klein-Gordon 方程分离变量,得到

$$\Phi(t,r,\theta,\varphi) = \int d\omega e^{i\omega t} \sum_{l,m} R_{\omega,l,m}(r) S_l^m(\theta) e^{im\varphi}. \tag{7.1.13}$$

径向部分满足的方程是

$$\frac{d}{dr}\left(\Delta \frac{dR}{dr}\right) + \left\{\frac{1}{\Delta}\left[(r^2+a^2)\omega^2 - 4aMm\omega r + (am)^2\right] - \mu^2(r^2+a^2) - \lambda\right\} R = 0, \tag{7.1.14}$$

式中 λ 是分离变量常数. 球函数

$$S_l^m(a\sqrt{\mu^2-\omega^2}, \cos\theta)$$

满足的方程是

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dS}{d\theta}\right) + \left[\lambda + a^2(\mu^2-\omega^2)\sin^2\theta - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right] S = 0. \tag{7.1.15}$$

和前面讨论过的球对称引力场的情况一样,我们仍局限于长波近似 $r_g/\lambda \ll 1$. 这一方程在 r_+ 附近满足旋转黑洞视界处边界条件的解为

$$R^{in} = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{iQ} {}_2F_1(-l, 1+l, 1+2iQ; x+1), \tag{7.1.16}$$

式中

$$Q = (\omega - m\Omega_H) r_g r_+ / (r_+ - r_-),$$

$$x = (r - r_-)/(r_+ - r_-),$$

Ω_H 是旋转黑洞的角速度. 得到这个解的过程中假定了

$$a(\mu^2-\omega^2)^{1/2}\ll 1,$$
$$\lambda\approx l(l+1).$$

在远离黑洞处,这个解的渐近行为是

$$R^{in}\approx(-1)^l\frac{(2l)!}{l!}\frac{\Gamma(1+2\mathrm{i}Q)}{\Gamma(1+l+2\mathrm{i}Q)}x^l+(-1)^{1+l}$$
$$\times\frac{l!}{(1+2l)!}\cdot\frac{\Gamma(1+2\mathrm{i}Q)}{\Gamma(-l+2\mathrm{i}Q)}x^{-1-l}.$$

当 $r\to\infty$ 时,方程(7.1.14)的解按指数形式衰减,可表示为

$$R_\infty=x^le^{-\sigma\hat{\Omega}x}\Psi(1+l-\rho,2+2l;2\sigma\hat{\Omega}x),\tag{7.1.17}$$

式中,

$$\hat{\Omega}=(\mu^2-\omega^2)^{1/2}r_+,\quad\sigma=(r_+-r_-)/r_+,$$
$$\rho=\frac{\hat{\omega}^2}{\hat{\Omega}}(1-\sigma/2).$$

当 $x\to0$ 时,渐近行为(7.1.17)可写为近似式

$$R_\infty\approx\frac{\Psi(1+l-\rho)}{\Gamma(-l-\rho)}(2\sigma\hat{\Omega})^{1+2l}x^l$$
$$+\frac{\Gamma(1+2l)\Gamma(2+2l)}{\Gamma(1+l-\rho)}x^{-1-l}.$$

将(7.1.16)和(7.1.17)式的解在公共区域内连接起来,我们得到确定克尔场中本征能谱的方程

$$\Psi(1+l-\rho)\frac{\Gamma(1+l-\rho)}{\Gamma(-l-\rho)}(2\sigma\hat{\Omega})^{1+2l}$$
$$=-\left[\frac{(2l)!(1+2l)!}{l!}\right]^2\frac{\Gamma(-l+2\mathrm{i}Q)}{\Gamma(1+l+2\mathrm{i}Q)},\tag{7.1.18}$$

由此,再考虑到

$$\hat{\Omega}=\hat{\Omega}_0+\mathrm{i}\hat{\varepsilon},\quad 1+l-\rho\approx1+l-n(1-\mathrm{i}\hat{\varepsilon}/\hat{\Omega}_0),\tag{7.1.19}$$

我们得到克尔场中准静态能级衰减的表达式:

$$\left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{\Omega}_0}\right)_{n,l,m}=Q(\sigma\hat{\Omega}_0)^{1+2l}\prod_{S=1}^{l}\left(1+4\frac{Q^2}{S^2}\right)$$
$$\times\frac{\Gamma(n+l+1)}{\Gamma(n-1)n}\frac{(1+2l)^2}{2^{2l-1}[(2l+1)!!]^4}.\tag{7.1.20}$$

与前边讨论的施瓦西场的情况不同,克尔场中的衰减依赖于黑洞旋转的角速度. 在 $\omega<m\Omega_H$ 的情况下可以改变符号,即衰减变为激发. 这一条件导致被克尔黑洞散射的多极波的加强,这与克尔场中粒子的产生有关.

这里我们指出,在(7.1.20)式中代入 $\sigma = 1$ 与施瓦西场对应,应得到结果(7.1.10)式.其中有一点不同,是由于 Boyer-Lindquist 坐标和 Eddington-Finklshtein 坐标的不同造成的.

7.2　狄拉克方程的能谱

当场源的角速度 $a \sim GM/c^2$ 时,产生的非线性效应十分复杂.我们这里局限于慢速转动($a \ll GM/c^2$)的情况.这时克尔度规可以线性化.在区域

$$r \geqslant r_+ = GM/c^2 + \sqrt{G^2M^2/c^4 - a^4} \approx 2GM/c^2 \tag{7.2.1}$$

中,克尔度规具有形式

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{\nu}\mathrm{d}t^2 - \mathrm{e}^{\lambda}\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\Omega^2 + \frac{4Ma}{r}\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}t, \tag{7.2.2}$$

式中

$$\mathrm{e}^{\nu} = \mathrm{e}^{-\lambda} = 1 - \frac{R_g}{r} \equiv Y^2, \quad I = Man_Z, \quad R_g = 2M, \tag{7.2.3}$$

这里和下面都采用自然单位制 $c = G = \hbar = 1$.

在这一度规下的 Dirac 方程为

$$\gamma^{\mu}\nabla_{\mu}\psi + \mathrm{i}\mu\psi = 0, \tag{7.2.4}$$

式中 γ^{μ} 是广义 Dirac 矩阵,它满足关系式

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2g^{\mu\nu}. \tag{7.2.5}$$

自旋的协变导数 ∇_{μ} 由福克－伊凡宁柯系数定义:

$$\nabla_{\mu} = \partial_{\mu} - \Gamma_{\mu}, \quad \Gamma_{\mu} = -\frac{1}{4}\gamma^{\nu}(\gamma_{\nu,\mu} - \gamma_{\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu,\mu}). \tag{7.2.6}$$

1.施瓦西场

在施瓦西度规的情况下,可以借助于通常的球自旋进行分解.为此,应选择 γ 矩阵具有形式:

$$\begin{aligned}
\gamma^t &= \mathrm{e}^{-\nu/2}\tilde{\gamma}^0 = \mathrm{e}^{-\nu/2}\tilde{\beta}, \\
\gamma^{\varphi} &= r^{-1}\sin^{-1}\theta(\sin\varphi\tilde{\gamma}^1 - \cos\theta\tilde{\gamma}^2), \\
\gamma^r &= \mathrm{e}^{-\lambda/2}(\sin\theta\cos\varphi\tilde{\gamma}^1 + \sin\theta\sin\varphi\tilde{\gamma}^2 + \cos\theta\tilde{\gamma}^3), \\
\gamma^{\theta} &= r^{-1}(\cos\theta\cos\varphi\tilde{\gamma}^1 + \cos\theta\sin\varphi\tilde{\gamma}^2 - \sin\theta\tilde{\gamma}^3).
\end{aligned} \tag{7.2.7}$$

这时可得

$$\Psi = r^{-1}\mathrm{e}^{\nu/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\cdot\begin{bmatrix} F(r)Y_{l}^{m}{}_{j}^{(j)}(\theta,\varphi) \\ -\mathrm{i}G(r)(n,\sigma)Y_{l}^{m}{}_{j}^{(j)}(\theta,\varphi) \end{bmatrix}, \tag{7.2.8}$$

式中

$$Y_l^{m}j^{(j=l+1/2)}(\theta,\varphi) = (-1)^k \mathrm{i} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{\dfrac{j+m_j}{2j}} Y_l^{m}j^{-1/2}(\theta,\varphi) \\ -\mathrm{i}G(r)(n,\sigma)Y_l^{m}j^{(j)}(\theta,\varphi) \end{bmatrix}, \quad (7.2.9)$$

$$Y_l^{m}j^{(j=l-1/2)}(\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} \sqrt{\dfrac{j+m_j+1}{2j+2}} Y_l^{m}j^{-1/2}(\theta,\varphi) \\ \sqrt{\dfrac{j+m_j+1}{2j+2}} Y_l^{m}j^{+1/2}(\theta,\varphi) \end{bmatrix}, \quad (7.2.10)$$

σ 是泡利矩阵：$(n,\sigma) = \sin\theta\cos\varphi\sigma_1 + \sin\theta\sin\varphi\sigma_2 + \cos\theta\sigma_3$,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7.2.11)$$

解(7.2.8)式中，径向函数满足方程组：

$$\mathrm{e}^{-\lambda/2}F' + \frac{m_l}{r}F = (\mathrm{e}^{-\nu/2}\omega + \mu)G, \quad (7.2.12)$$

$$\mathrm{e}^{-\lambda/2}G' - \frac{m_l}{r}G = (-\mathrm{e}^{\nu/2}\omega + \mu)F, \quad (7.2.13)$$

式中 m_l 取正负整数，

$$l = \left| m_l + \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2} = \begin{cases} |m_l|, m_l > 0, \\ |m_l| - 1, m_l < 0. \end{cases} \quad (7.2.14)$$

m_j 是粒子的总角动量在 $z(\theta=0)$ 方向的投影，l 是轨道量子数，$j = |m_l| - \dfrac{1}{2}$ 是粒子的总角动量. 和在任何有心力场中一样，m_l，m_j 和 j 是运动积分. 与四维流密度矢量

$$I^\mu = \tilde{\psi}\gamma^\mu\psi, \tilde{\psi} = \psi^* \tilde{B} \quad (7.2.15)$$

对应，我们得到稳态情况下的归一化积分

$$\int_{r \geqslant R_g} \tilde{\psi}\psi \sqrt{-g}\mathrm{e}^{\nu/2}\mathrm{d}^3x = \int_{R_g}^{\infty} (|F|^2 + |G|^2)\mathrm{d}r. \quad (7.2.16)$$

由方程组(7.2.12)和(7.2.13)可以得到

$$F'' + \left\{ \frac{\omega^2}{\gamma^4} - \frac{1}{\gamma^2}\left[\mu^2 + \frac{1}{\gamma^2}m_l(m_l+1) \right] \right\} F = \hat{\Omega}_{m_l}F, \quad (7.2.17)$$

式中

$$\hat{\Omega}_{m_l} = \frac{\omega + \mu Y}{Y^2}\left(\frac{Y^2}{\omega + \mu Y} \right)' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + \frac{m_l}{r} \frac{\omega + \mu Y}{Y^2}\left(\frac{Y^2}{\omega + \mu Y} \right)'. \quad (7.2.18)$$

考虑到 $m_l(m_l+1) = l(l+1)$，不难推断，如果形式地设 $\hat{Q}_{m_l} = 0$，我们将得到施瓦西场中无自旋粒子径向函数的方程. 由方程(7.2.17)作变换 $\omega \to -\omega$，$m_l \to -m_l$，可以得到函数 G 的方程. 下面将证明，算符 $\hat{Q}_{m_l}$ 包含引力自旋－轨道相互作用和其他

的非线性自旋效应.

在非相对论(泡利)近似下,函数 G 可认为等于零,而函数 F 对于束缚态可用拉盖尔多项式表示. 我们引入

$$\omega = \mu + \varepsilon, \quad |\varepsilon| \ll \mu,$$

得到

$$\frac{\omega}{\mu} \equiv 1 + \frac{\varepsilon}{\mu} = 1 - \frac{\mu^2 M^2}{2n^2}, \tag{7.2.19}$$

$$n = 1 + l + n_r = 1, 2, 3, \cdots.$$

在弱相对论近似下,将(7.2.18)和(7.2.19)式分解,精确到 v^2/c^2 项,并引入坐标 $\rho = r - R_g$,我们得到

$$\left[\frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2} + \varepsilon - V_M - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]F$$
$$= [V^{(1)} + V^{(2)} + V^{(3)} + V^{(4)}]F, \tag{7.2.20}$$

式中

$$V_M = \frac{\mu M}{\rho}, \tag{7.2.21}$$

而右端方括号中各项是微扰势之和. 在这种近似下,根据(7.2.12)有

$$G = \frac{1}{2\mu}\left(F' + \frac{m_l}{\rho}F\right), \tag{7.2.22}$$

归一化条件(7.2.16)可写为

$$\int_{\rho=0}^{\infty}(|F|^2 + |G|^2)\mathrm{d}\rho = \int_{\rho=0}^{\infty}|F|^2\left(1 + \frac{\varepsilon - V_M}{2\rho}\right)\mathrm{d}\rho = 1. \tag{7.2.23}$$

现在我们逐一研究每一项微扰能量. 项 $V^{(1)}$ 是和引力场中粒子能量的重新确定相联系的,这一项没有解除按轨道量子数的简并:

$$\frac{1}{\mu}\langle V^{(1)}\rangle = \frac{\Delta\varepsilon_n}{\mu} = \frac{15}{8}\frac{\mu^4 M^4}{n^4}. \tag{7.2.24}$$

项 $V^{(2)}$ 反映粒子轨道近日点的经典位移效应,它解除了按轨道量子数的简并:

$$\frac{\Delta\varepsilon_{nl}}{\mu} = \frac{1}{\mu}\langle V^{(2)}\rangle = -\frac{3(\mu M)^4}{n^3\left(l + \frac{1}{2}\right)}\left(1 - \frac{1}{3}\delta_{l_0}\right). \tag{7.2.25}$$

附加微扰 $V^{(3)}$ 可解释为引力的自旋-轨道相互作用,可用下式确定:

$$V^{(3)} = \frac{(L_\sigma)}{4\mu^2\rho}\frac{\mathrm{d}V_M}{\mathrm{d}\rho}, \tag{7.2.26}$$

式中

$$L_\sigma = -(1 + m_l).$$

上述相互作用对于粒子能量的贡献为

$$\frac{\Delta\varepsilon_{nm_l l}}{\mu} = -\frac{\mu^4 M^4(1-\delta_{l_0})}{4n^3 m_l(l+1/2)}. \tag{7.2.27}$$

当 $m_l<0$,即 $j=l+\frac{1}{2}$(自旋角动量和轨道角动量平行)时上式为正;当 $m_l>0$,即 $j=l-\frac{1}{2}$时(7.2.27)式为负.

项 $V^{(4)}$ 也是和粒子的自旋相关联的:

$$\frac{1}{\mu}\langle V^{(4)}\rangle = \left\langle -\frac{M}{2\mu\rho(\rho+R_g)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\right\rangle = -\frac{\mu^4 M^4(1-\delta_{l_0})}{2n^3 l(l+1/2)(l+1)}. \tag{7.2.28}$$

在施瓦西场中,当 $2\mu M \ll l+\frac{1}{2}$时,Dirac 粒子的能量最后表达式具有形式:

$$\frac{\omega_{nm_l l}}{\mu} = 1-\frac{\mu^2 M^2}{2n^2}-\frac{3\mu^4 M^4}{n^4}\left(\frac{n}{l+\frac{1}{2}}\left\{\left[1-\frac{1}{3}\delta_{L_0}\right]+\frac{1}{12}(1-\delta_{L_0})\left[\frac{1}{m_l}+\frac{2}{l(l+1)}\right]\right\}-\frac{5}{8}\right). \tag{7.2.29}$$

现在我们讨论由相对论和自旋效应所引起的粒子能级简并的解除(无论按总角动量还是按轨道角动量).这和平直空间的库仑场中的情况不同,在那里和电子状态相联系的能量只依赖于量子数和 j. 对于相同的 l, $m_l<0\left(j=l+\frac{1}{2}\right)$的粒子系能比 $m_l>0\left(j=l-\frac{1}{2}\right)$的要小些.由(7.2.29)式已经看到,非线性自旋效应的贡献只对于最低能级才能与自旋-轨道相互作用相比拟.

2. 克尔场

和克尔度规对应的 γ 矩阵为

$$\gamma_t = \Upsilon^t,\quad \gamma_i = \Upsilon_i + g_{i\varphi}\Upsilon^{\varphi},$$
$$\gamma^{\varphi} = \Upsilon^{\varphi} + g_{i\varphi}\Upsilon_i,\quad \gamma_{\varphi} = \Upsilon_{\varphi}, \tag{7.2.30}$$

式中 $g_{i\varphi}$为克尔度规.采用定义(7.2.7),并考虑到粒子所在的区域 $\mathrm{e}^{-\lambda/2}\approx 1$,可以将系统的哈密顿写成

$$H = \hat{H}_S + \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = \hat{H}_S + \frac{2(\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{L})}{r^3} + \frac{1}{2}(\Omega\sigma), \tag{7.2.31}$$

式中 H_S 是粒子在施瓦西度规下的哈密顿,Ω 是 Lense-Tirring 进动角速度:

$$\Omega = r^{-3}\{3(\boldsymbol{I}\cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{I}\}. \tag{7.2.32}$$

在导出计算结果之前我们指出,相互作用 $\hat{H}_1$ 形式上和中心物体的偶极矩与无自旋粒子轨道角动量之间的相互作用相符合. 但在自旋粒子的情况下,算符 $\hat{L}_z$ 对于给定的态 n, l, j 已不再是确定的. 这导致能级的分裂. 对于精细结构,把 H_1 和自旋轨道相互作用特征值 $V^{(3)}$ 比较,不难发现,当 $\mu a \ll 1$ 时,它导致能级的上面的结构. 考虑到微扰 $(H_1 + H_2)$,我们将 Dirac 方程写成形式:

$$\left[\varepsilon - V_M + \frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix} = [V^1 + V^{(2)} + V^{(3)} + V^{(4)} + H_1 + H_2]\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix}, \tag{7.2.33}$$

式中

$$\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix} = F_{nl}(\rho)Y_l^m j^{(j)}(\theta, \varphi). \tag{7.2.34}$$

经过不太复杂的计算,可以得到

$$\frac{1}{\mu}\langle H_1\rangle = \frac{4m_j}{2l+1}\frac{\mu a(\mu M)^4 |m_l|}{n^3 l\left(l+\frac{1}{2}\right)(l+1)}, \tag{7.2.35}$$

和

$$\frac{1}{\mu}\langle nl_j | H_2 | nl_j\rangle = \left\langle\frac{Ma}{2r^3}\right\rangle_r \cdot 4m_j\frac{\pm l(l+1) + 3\left(l+\frac{1}{2}\right) \mp 3\left(m_j^2 + \frac{1}{4}\right)}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)}. \tag{7.2.36}$$

所以,所有处于基态以外的电子的能级都分裂为 $2j+1$ 子能级(分别对应于总角动量在场源转动轴方向投影的可能值):

$$\frac{1}{\mu}\Delta\omega_{n_j^l}^{m_j}(a) = \frac{2m_j}{2l+1}\frac{\mu a(\mu M)^4}{n^3 l\left(l+\frac{1}{2}\right)(l+1)} \times\begin{cases}2|m_l| - \dfrac{3\left(m_j^2+\frac{1}{4}\right) - l(l+1) - 3\left(l+\frac{1}{2}\right)}{(2l-1)(2l+3)},\\[2ex] 2|m_l| + \dfrac{3\left(m_j^2+\frac{1}{4}\right) - l(l+1) + 3\left(l+\frac{1}{2}\right)}{(2l-1)(2l+3)}.\end{cases} \tag{7.2.37}$$

在上式中,当 $j=l+\dfrac{1}{2}$,$m_l<0$ 时取上面的符号;当 $j=l-\dfrac{1}{2}$,$m_l>0$ 时取下面的符号.

3. 准束缚态能谱

我们要指出,相对论效应,中心质量的旋转和粒子的自旋,使得施瓦西场和克尔场中 Dirac 粒子的准束缚态能谱具有复杂的结构.特有的相对论效应是在施瓦西场中能级 $2p$ 和 $2s$ 的分裂,而且由于引力的轨道–自旋相互作用,存在两个可能的跃迁:

$$\frac{E_{2p_{1/2}}-E_{2s_{1/2}}}{\mu c^2}=\frac{28}{96}\left(\frac{G\mu M}{\hbar c}\right)^4,$$
$$\frac{E_{2p_{3/2}}-E_{2s_{1/2}}}{\mu c^2}=\frac{31}{96}\left(\frac{G\mu M}{\hbar c}\right)^4. \tag{7.2.38}$$

施瓦西场的这些情况和在平直空间中的库仑场中的情况不同.另一个区别是在 s 态不存在接触相互作用,还有非线性自旋效应的影响.

受中心旋转质量约束的偶极子–轨道和偶极子–自旋相互作用哈密顿(7.2.31),其外部形式类似于氢原子的相对应的高能态精细结构的哈密顿.但是在我们讨论的情况下同样不存在接触相互作用.电子的有效引力 g 因子等于 1,而电磁的 g 因子等于 2.我们讨论的相互作用使 $2p_{1/2}$ 能级分裂为两个子能级,$2p_{3/2}$ 能级分裂为四个子能级.其中,

$$\Delta E_{2p_{1/2}}^{m_j=\pm 1/2}=\pm\frac{1}{15}\mu c^2\left(\frac{\mu ac}{\hbar}\right)\left(\frac{G\mu M}{\hbar c}\right)^4, \tag{7.2.39a}$$

$$\Delta E_{2p_{3/2}}^{m_j=\pm 1/2}=\pm\frac{1}{24}\mu c^2\left(\frac{\mu ac}{\hbar}\right)\left(\frac{G\mu M}{\hbar c}\right)^4, \tag{7.2.39b}$$

$$\Delta E_{2p_{3/2}}^{m_j=\pm 3/2}=\pm\frac{3}{40}\mu c^2\left(\frac{\mu ac}{\hbar}\right)\left(\frac{G\mu M}{\hbar c}\right)^4. \tag{7.2.39c}$$

Dirac 粒子最低能级的分布如图 33 所示.(a)是类氢原子在施瓦西场中简并的非相对论能谱;(b)是在施瓦西场中考虑到相对论的和自旋的效应,消除了按轨道量子数和内部量子数的简并;(c)是在克尔场中消除了能谱的空间简并.右侧的数

图 33

字表示总角动量在中心质量转动轴上投影的值.

最后我们指出自旋效应的作用. 当 $\mu M \sim M_{pl}^2$ 时,引力的自旋-轨道相互作用变得十分明显. 在跃迁(7.2.38)中辐射的波长约为

$$\lambda = \left\{ \begin{matrix} 1.14 \\ 1.02 \end{matrix} \right\} \times 10^{-9} \left[\frac{3.85 \times 10^{-12}}{R_g} \right]^4 \Big/ \mathrm{cm} \quad \left\{ \begin{matrix} 当\ \Delta j = 0 \\ 当\ \Delta j = 1 \end{matrix} \right\}, \tag{7.2.40}$$

即当辐射和“引力原子”与辐射相互作用时,可能出现精细结构,原初微黑洞($R_g \leqslant 10^{-12}$ cm)可能起这样的“原子”的作用,这些微黑洞的能级被充满,并处于量子的热力学蒸发状态.

如果 $\mu ac \sim \hbar$,则中心物体的偶极矩与粒子自旋的相互作用也变得十分明显. 当 $a \to GM/c^2$ 和 $\mu M/M_{pl} \sim m_j$ 时,能谱的结构将在很大程度上决定于非线性效应.

7.3　电子在微黑洞场中的有限运动

假定微黑洞($M \ll 10^{17}$ g)具有角动量 $a \ll M$,所荷电荷远小于临界值($z = Q/e \ll 137$). 本节对 Dirac 方程取某种近似,讨论电子在微黑洞引力场中的有限运动. 在这种情况下,粒子的运动是非相对论的,而能谱是类氢的. 黑洞的角动量对粒子系能的影响是很小的和不重要的(对于确定电子被黑洞俘获过程中能量的衰减). 与标量粒子不同,当 $\omega < m_j \Omega_H + eV_H$ 时,电子能量只有衰减,没有激发,引力的自旋-轨道相互作用对于衰减的大小有强烈影响. 自旋反平行于轨道矩的电子的俘获概率大于自旋平行于轨道矩的电子的俘获概率. s_- 态电子在施瓦西场中能量衰减比标量粒子基态能级的衰减小 8 倍.

(1) 我们由下面形式的拉格朗日出发:

$$L = \bar{\psi} \mathrm{i} \gamma^\mu (\nabla_\mu + \mathrm{i} e A_\mu) - \mu \bar{\psi} \psi, \tag{7.3.1}$$

式中 A_μ 是黑洞的电磁势,e 和 μ 是电子的电荷和质量. Dirac 矩阵满足关系式:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu}.$$

代入 γ^μ 和 ψ 的表达式:

$$\gamma^\mu = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{AB}^\mu \\ \sigma_{AB}^\mu & 0 \end{bmatrix}, \psi = \begin{bmatrix} P^A \\ Q_A \end{bmatrix} \tag{7.3.2}$$

我们得到旋量形式的 Dirac 方程:

$$\begin{aligned} &\sqrt{2} \sigma_{AB}^\mu (\nabla_\mu + \mathrm{i} e A_\mu) P^B = -\mathrm{i} \mu Q_A, \\ &\sqrt{2} \sigma^{\mu AB} (\nabla_\mu + \mathrm{i} e A_\mu) Q_B = -\mathrm{i} \mu P^A. \end{aligned} \tag{7.3.3}$$

$\bar{\psi}$ 具有形式:

$$\bar{\psi} = (Q_A, P^A).$$

选择各向同性标架(l,n,m,m^*)与旋基ζ^A和χ^A相对应. 分量P和Q旋基的投影为

$$P^A = P_0\zeta^A + P_1\chi^A, Q_A = Q_0^*\zeta_A + Q_1^*\chi_A. \tag{7.3.4}$$

采用(7.3.4)式,并引入 Kinnersley 标架,在 Dirac 方程中借助于代换

$$P_0 = e^{-i\omega t}e^{im\varphi}\frac{\overset{(-)}{S}(\theta)\overset{(-)}{R}(r)}{\sqrt{2}(r-ia\cos\theta)},$$

$$Q_0^* = -e^{-i\omega t}e^{im\varphi}\frac{\overset{(+)}{S}(\theta)\overset{(-)}{R}(r)}{\sqrt{2}(r+ia\cos\theta)}, \tag{7.3.5}$$

$$P_1 = e^{-i\omega t}e^{im\varphi}\Delta^{-1/2}\overset{(+)}{S}(\theta)\overset{(+)}{R}(r),$$

$$Q_1^* = e^{-i\omega t}e^{im\varphi}\Delta^{-1/2}\overset{(-)}{S}(\theta)\overset{(+)}{R}(r),$$

式中,

$$\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2 + a^2.$$

我们得到关于$\overset{(+)}{S}$,$\overset{(-)}{S}$和$\overset{(+)}{R}$,$\overset{(-)}{R}$的四个方程.

$$[\hat{D_0} + \hat{D_1}(a)]\overset{(-)}{S}(\theta,a) = -(\lambda^2 + 2a\omega m - 1/4)\overset{(-)}{S}(\theta,a);$$

$$\left|\overset{(-)}{S}(\theta=0)\right| < \infty, \quad \left|\overset{(-)}{S}(\theta=\pi)\right| < \infty, \tag{7.3.6}$$

式中,

$$\hat{D_0} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right) - \frac{m^2 - m\cos\theta + 1/4}{\sin^2\theta},$$

$$\hat{D_1} = \frac{a\mu}{\lambda + a\mu\cos\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta} + \frac{1}{2}\cos\theta - m + a\omega\sin^2\theta\right) + a\omega\cos\theta - a^2\omega^2\sin^2\theta$$

$$- a^2\mu^2\cos^2\theta(\lambda - \text{分离变量常数}), \tag{7.3.7}$$

$$\overset{(+)}{S}(\pi-\theta) = \overset{(-)}{S}(\theta). \tag{7.3.8}$$

对于径向部分,我们得到

$$\Delta^{1/2}\left[\frac{d}{dr} + i\frac{K}{\Delta}\right]\overset{(+)}{R} = (\lambda - i\mu r)\overset{(-)}{R},$$

$$\Delta^{1/2}\left[\frac{d}{dr} - i\frac{K}{\Delta}\right]\overset{(-)}{R} = (\lambda + i\mu r)\overset{(+)}{R}. \tag{7.3.9}$$

求出$\overset{(+)}{R}$,我们得到关于$\overset{(-)}{R}$的二阶方程:

$$\left[\Delta\frac{d^2}{dr^2} + \left(r - M - \frac{i\mu\Delta}{\lambda + i\mu r}\right)\frac{d}{dr} + \frac{K^2 + i(r-M)K}{\Delta}\right.$$

$$\left.- 2i\omega r - ieQ - \mu^2r^2 - \lambda^2 - \frac{\mu K}{\lambda + i\mu r}\right]\overset{(-)}{R} = 0, \tag{7.3.10}$$

式中

$$\kappa = (r^2 + a^2)\omega - m_j a + eQr.$$

我们还得到

$$\overset{(+)}{R}{}^*(r) = \overset{(-)}{R}(r).$$

（2）当 $a=0$ 时，方程(7.3.6)和(7.3.7)过渡到函数 $P^l_{mn}(n=1/2)$ 的微分方程. 因此，当

$$j = 1/2, 3/2, 5/2, \cdots$$

$$m = m_j = \pm 1/2, \pm 3/2, \cdots, \pm j \tag{7.3.11}$$

时，$\overset{(-)}{S}(\theta,0) = P^j_{m_j 1/2}(\cos\theta)$ 构成完全系. $\lambda(0) = m_l = \pm\left(j \pm \dfrac{1}{2}\right)$ 对应于闵可夫斯基空间有心力场中算符

$$\hat{K} = \beta[(\sigma\cdot \boldsymbol{L}) + 1]$$

的本征值. 对于第二个角函数有

$$\overset{(+)}{S}(\theta,0) = (-1)^{j-m} j^{-1} \mathrm{i} P^j_{m_j - 1/2}.$$

当 $\max\{a\omega, \mu\omega\} \ll j$ 时，可以采用微扰理论来计算第一个线性算符的本征值：

$$\lambda^2 + 2a\omega m_j - \frac{1}{4} = j(j+1) + \frac{a\omega m_j}{j(j+1)}. \tag{7.3.12}$$

（3）由方程(7.3.10)和(7.3.9)，可以确定径向部分通解的渐近行为. 当 $r\to\infty$ 和 $\omega<\mu$，我们得到

$$\overset{(-)}{R}(r) C_1 \mathrm{e}^{-\Omega r^*} - \frac{\omega}{\mu}\left(1 - \mathrm{i}\frac{\Omega}{\omega}\right) C_2 \mathrm{e}^{\Omega r^*}, \tag{7.3.13}$$

$$\overset{(+)}{R}(r) = -\frac{\omega}{\mu}\left(1 - \mathrm{i}\frac{\Omega}{\omega}\right) C_1 \mathrm{e}^{-\Omega r^*} + C_2 \mathrm{e}^{\Omega r^*},$$

式中

$$\frac{\mathrm{d}r^*}{\mathrm{d}r} = (r^2 + a^2)/\Delta, \quad \Omega = \sqrt{\mu^2 - \omega^2}.$$

当 $r\to r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}$，即在视界附近，解应具有形式

$$\overset{(-)}{R}(r) = \frac{(\lambda + \mathrm{i}\mu r) A_1 \Delta^{-1/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega - m_j\Omega_H + eV_H) r^*}}{(r_+ - r_-)(1/2 - \mathrm{i}\Gamma)} + A_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega - m_j\Omega_H + eV_H) r^*},$$

$$\overset{(+)}{R}(r) = A_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega - m_j\Omega_H + eV_H) r^*} + \frac{(\lambda - \mathrm{i}\mu r) A_2 \Delta^{1/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega - m_j\Omega_H + eV_H) r^*}}{(r_+ - r_-)(1/2 + \mathrm{i}\Gamma)}, \tag{7.3.14}$$

式中 $\Gamma = K(r_+)/(r_+ - r_-)$. 有限运动的边界条件对应于 $A_2 = 0$ 和波函数在无限远处的限制 $c_2 = 0$.

（4）径向方程(7.3.10)的解在我们的近似下可以在坐标 r 的三个区域得到

（i）$r \ll \dfrac{|m_l|}{\mu M}$. 方程(7.3.10)具有线性独立的解.

$$R^{in}=\left(\frac{r-r_+}{r-r_-}\right)^{i\Gamma}\left(\frac{r-r_+}{r_+-r_-}\cdot\frac{r-r_-}{r_+-r_-}\right)^{1/2}{}_2F_1$$

$$\times\left(1-|\kappa|,1+|\kappa|;3/2+2i\Gamma;\frac{r-r_-}{r_+-r_-}\right),\tag{7.3.15}$$

$$R^{out}=\left(\frac{r-r_+}{r_+-r_-}\right)^{i\Gamma}{}_2F_1\left(-|\kappa|,|\kappa|;1/2-2i\Gamma;\frac{r-r_-}{r_+-r_-}\right)$$

$$(\text{当}\ |\Gamma|\ll|m_l|),\kappa\equiv m_l.\tag{7.3.16}$$

不难发现,解(7.3.15)式描述落向黑洞的电子波.在任意自旋的情况下,它可以写成

$$R_s^{in}=\left(\frac{r-r_+}{r_+-r_-}\right)^{-i\Gamma}\left(\frac{r-r_+}{r_+-r_-}\cdot\frac{r-r_-}{r_+-r_-}\right)^{-s}{}_2F_1$$

$$\times\left(-j-s,j-s-l;1-s+2i\Gamma;\frac{r-r_-}{r_+-r_-}\right),\tag{7.3.17}$$

式中,

$$s=0,\ \pm1/2,\ \pm1,\cdots,$$
$$j=|s|,|s|+1,|s|+2,\cdots$$
$$(\text{这里}\ s=-1/2).$$

这个函数在 $r\gg r_+$ 时的渐近行为可表示为

$$R^{in}=(-1)^{j+s}\left[\left(\frac{r}{r_+-r_-}\right)^{j-s}B_{1s}^{in}+\left(\frac{r}{r_+-r_-}\right)^{-j-s-1}B_{2s}^{in}\right],\tag{7.3.18}$$

系数的比值对于得到运动的基本性质是很重要的,在整数自旋和半整数自旋的情况下这一比值是完全不同的:

$$\frac{B_{2s}^{in}}{B_{1s}^{in}}=\begin{Bmatrix}(-1)^s\Gamma\prod_{p=1}^{j}\left(1+\frac{4\Gamma^2}{p^2}\right)\\(-1)^{s-1/2}\frac{1}{2\pi}\prod_{p=1}^{j+1/2}\left(1+\frac{4\Gamma^2}{(p-1/2)^2}\right)\end{Bmatrix}$$

$$\times\frac{(j-s)!(j+s)!}{(2j)!(2j+1)!}\Gamma^2(1+j).\tag{7.3.19}$$

括号下面一个式子对应于半整数自旋,作代换 $\Gamma\to-\Gamma$ 时不变号,与整数自旋的情况不同,这和电子、中微子没有超辐射相符.我们还发现,从视界传出的波,系数比的符号不同:

$$B_{2s}^{out}/B_{1s}^{out}=-B_{2s}^{in}/B_{1s}^{in}.$$

(ii) $1\ll\frac{r}{2M}\ll\frac{|m_l|}{\mu^2M^2}$.在这个区域,必须准确考虑径向方程中的各项.通解具有多项式形式:

$$\bar{R}(r) = b_1 r^{|\kappa|}\ {}_2F_1\left(-1-l+|\kappa|, l+|\kappa|; 1+2|\kappa|; -\mathrm{i}\frac{\mu r}{\lambda}\right)$$

$$+ b_2(|\kappa| \to -|\kappa|) = b_1 r^{|\kappa|}\begin{Bmatrix} 1+\dfrac{\mathrm{i}\mu r}{|\kappa|+1/2} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$+ b_2 r^{-|\kappa|}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1-\dfrac{\mathrm{i}\mu r}{|\kappa|-1/2} \end{Bmatrix}, \tag{7.3.20}$$

式中

$$l = \left|\kappa+\frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2} = \begin{cases} |\kappa| = j+1/2, & \kappa > 0; \\ |\kappa|-1 = j-1/2, & \kappa < 0. \end{cases} \tag{7.3.21}$$

系数 b_1 和 b_2 由函数 $\bar{R}$ 和 R^{in} 在重叠区域 $2M \ll r \ll \dfrac{|\kappa|}{\mu}$ 内的吻合来确定.

（iii）$\dfrac{r}{2M} \gg \dfrac{|\kappa|}{\mu M}$. 在这个区域内波函数具有库仑性质. 与所选择的无限远边界条件和我们的近似相对应的解,可用 Ψ 函数表示:

$$R^{\infty}(r) = \mathrm{e}^{-\Omega r} r^{1+l}\Psi\left(1+l-\frac{\mu^2 M+\omega eQ}{\Omega}, 2+2l, 2\Omega r\right). \tag{7.3.22}$$

（5）解电子的 Dirac 方程的程序和标量粒子情况的不同在于中间区域 $\left(1 \ll \dfrac{r}{2M} \ll \dfrac{|\kappa|^2}{\mu^2 M^2}\right)$,在该区域中波函数用解 $\bar{R}$[(7.3.20)式]描述. 库仑函数和解(7.3.17)当 $s=0$ 时可在区域 $2M \ll r \ll \dfrac{|\kappa|}{\mu}$ 中吻合. 在研究中微子的非有限运动时不需要这个解. 自旋为 1/2 的有质量粒子势的类似区别是和引力的自旋-轨道相互作用相联系的. 这一相互作用从根本上影响到电子在强引力场中运动的性质. 比较函数 $\bar{R}$ 和 R^{∞} 在相互重叠区域 $\left(\dfrac{|\kappa|}{\mu M} \ll \dfrac{r}{2M} \ll \dfrac{1}{\Omega}\right)$ 内的渐近行为,可以得到函数吻合的条件:

$$\begin{Bmatrix} \displaystyle\prod_{p=1}^{l}\left[1+\frac{4\Gamma^2}{(p-1/2)^2}\right]\frac{2(2l+1)}{\mu(r_+-r_-)} \\ \displaystyle\prod_{p=1}^{l+1}\left[1+\frac{4\Gamma^2}{(p-1/2)^2}\right]\frac{\mu(r_+-r_-)}{2(2l+1)} \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{(2l)!(2l+1)!}{\left[\dfrac{\Omega(r_+-r_-)}{2}\right]^{1+2l}} \frac{\Gamma\left(-l-\dfrac{\mu^2 M+\omega eQ}{\Omega}\right)}{\Gamma\left(1+l-\dfrac{\mu^2 M+\omega eQ}{\Omega}\right)}\psi^{-1}\cdot\left(1+l-\frac{\mu^2 M+\omega eQ}{\Omega}\right), \tag{7.3.23}$$

式中 ψ 是 Γ 函数对数的导数. 我们用 l 改写上式是为了便于与标量情况比较. 显然,只有 Ω(与 ω 对应)取复数值,解(7.3.23)式才是可能的,此时有

$$\Omega = \Omega_0 + i\epsilon, \epsilon \ll \Omega_0. \tag{7.3.24}$$

假设作为零级近似条件

$$1 + l - \frac{\mu^2 M + \omega e Q}{\Omega_0} = -n_r, \quad n_r = 0, 1, 2, 3, \cdots \tag{7.3.25}$$

就是重叠区域中函数 $R^{\approx}$ 的限制条件,则可用逐次逼近法确定其值. Ω_0 对应于平直空间类氢原子理论中电子玻尔半径的倒数:

$$\Omega_0 \approx \frac{\mu(\mu M + eQ)}{n}, \quad n = 1 + l + n_r = 1, 2, 3, \cdots \tag{7.3.26}$$

数 n 为主量子数,它确定电子在黑洞引力场中能谱的图像:

$$\left(\frac{\omega}{\mu}\right)_n \approx 1 - \frac{(\mu M + eQ)^2}{2n^2}\left[1 + 2i\left(\frac{\epsilon}{\Omega_0}\right)\right]. \tag{7.3.27}$$

在所讨论的近似下,束缚在黑洞势阱中的电子,其能级是简并的. 当 $\kappa = -1 - l$ $\left(j = l + \frac{1}{2}\right)$ 和 $\kappa = l\left(j = l - \frac{1}{2}\right)$ 时,系能是相同的,这对应于有心力场中电子能级的简并. 严格讲,这仅对无旋转的中心物体才是正确的,但是在所讨论的情况下,黑洞的旋转对系能的影响很小. 在我们的近似下,极限 $eQ \to -\mu M$ 对应于粒子被黑洞电荷推斥至无限远处. 极限 $M \to 0$ 过渡到库仑场. 我们还发现,在所假定的限制条件下,引力的自旋–轨道相互作用对系统的影响比较弱. 对于标量荷电粒子的能量公式(在 R-N 场中),情况完全类似,但是没有和粒子自旋相联系的简并. 在两种情况下势阱都不深,能级都是非相对论的.

(6) 我们现在把电子能量的衰减(能级降低)与标量荷电粒子在 R-N 场中对应的量进行比较. 考虑到近似,我们有

$$\left(\frac{\epsilon}{\Omega_0}\right)_{n,l,m} = 4\Gamma\left[\frac{\Omega_0(r_+ - r_-)}{2}\right]^{1+2l} \prod_{p=1}^{l}\left[1 + \frac{4\Gamma^2}{p^2}\right] \times \frac{(2l+1)^2}{(2l+1)!!^4} \frac{(n+l)!}{(n-l-1)!\,n}; \tag{7.3.28}$$

$$\left(\frac{\epsilon}{\Omega_0}\right)_{n,k,j} = \left[\frac{\Omega_0(r_+ - r_-)}{2}\right]^{1+2l} \times \left\{\begin{array}{l} \prod_{p=1}^{l}\left[1 + \frac{4\Gamma^2}{(p-1/2)^2}\right] \frac{2(2l+1)}{\mu(r_+ - r_-)} \\ \prod_{p=1}^{l}\left[1 + \frac{4\Gamma^2}{(p-1/2)^2}\right] \frac{\mu(r_+ - r_-)}{2(2l+1)} \end{array}\right\}$$

$$\times \frac{1}{(2l)!(2l+1)!} \frac{(n+l)!}{(n-l-1)!\,n}, \qquad (7.3.29)$$

式中，

$$\Gamma_0 = \frac{(r_+^2 + a^2)\mu - ma + eQr_+}{r_+ - r_-},$$

括号中上面的式子对应于 $\kappa>0$，下面的式子对应于 $\kappa<0$. 因此，引力的轨道-自旋相互作用导致与自旋方向反平行的轨道角动量的粒子能量衰减是具有平行轨道角动量粒子衰减的 $\kappa=4(2l+1)^2/\mu^2\cdot(r_+-r_-)^2$ 倍. 这一效应随着黑洞质量的减小和它的电荷的增大而增大. 有趣的是，施瓦西场中电子基态能量的减少比无自旋粒子的减少小 8 倍. 无论电子还是标量粒子，能级的衰减随着轨道角动量和径向量子数的增大都迅速减小. 电子能级衰减对于总角动量在黑洞转动轴上投影的依赖性当 $m_j a/M \ll 1$ 时，特别是对于比较小的角动量，是很小的. 那时和在标量粒子的情况下一样，相互作用$(m\cdot a)$导致衰减参量迅速减小. 在点 $a/M\approx 4M\mu+\dfrac{eQ}{m}$变为零并改变符号. 这对应于向激发的过渡，与粒子的产生效应相联系. 当 $m<0$，黑洞俘获标量粒子的概率随 a 增大. 还可以发现，在我们所取的电磁场近似$(eQ\ll 1)$的情况下，在不转动黑洞的引力场中，不可能过渡到激发(在有限运动情况下)，与标量粒子在非有限运动时的超辐射散射不同，因为在推斥的情况下势阱不够深. 在 R-N 场中标量粒子基态也不出现这个效应. 图 34 中描述了电子 s 态和 p 态以及标量粒子的能量衰减对于黑洞参量的依赖关系.

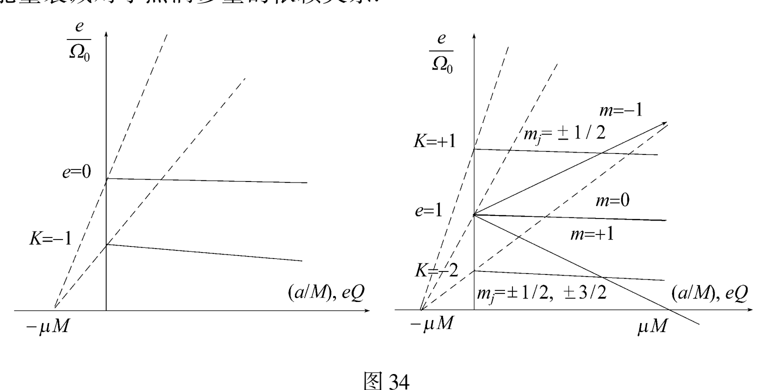


图 34

7.4　旋量和零标架的应用

应用旋量和零标架方法计算相对论性氢原子的能级，所得到的结果和用 Γ 矩

阵方法得到的结果相同,但不必明显地使用任何对易关系.只要构造的零标架合适,就可以自动地使狄拉克方程退耦和分离变量.对于比较复杂的弯曲时空中的狄拉克方程,用Γ矩阵方法很难求解,但是用旋量零标架方法则比较容易求解.为了显示这一方法的优点,本节以闵可夫斯基时空中的氢原子为例,介绍这一方法.

1. 狄拉克方程的退耦和分离变量

闵可夫斯基线元可以写为

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2. \tag{7.4.1}$$

相应的零标架可构造为

$$l_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0), \quad n_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0),$$

$$m_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,r,\mathrm{i}r\sin\theta), \quad \bar{m}_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,r,-\mathrm{i}r\sin\theta). \tag{7.4.2}$$

类氢原子的电磁4维势可写为

$$A_\mu = \frac{Q}{r}(1,0,0,0), \tag{7.4.3}$$

其中 $Q = ze$, z 为电荷数.由(7.4.2)式可以求得旋系数:

$$K = \pi = \epsilon = \lambda = \sigma = \nu = \tau = \gamma = 0,$$

$$\rho = \mu = \frac{1}{\sqrt{2}r}, \beta = -\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}r}\cot\theta. \tag{7.4.4}$$

用旋坐标表示的 Dirac 方程为

$$\sqrt{2}(\nabla_{AB} + \mathrm{i}eA_{AB})P^A + \mathrm{i}\mu\bar{Q}_B = 0,$$

$$\sqrt{2}(\nabla_{AB} - \mathrm{i}eA_{AB})Q^A + \mathrm{i}\mu\bar{P}_B = 0, \tag{7.4.5}$$

其中 μ 是 Dirac 粒子的质量.由(7.4.5)式两方程可得

$$\sqrt{2}(D + \epsilon - \rho + \mathrm{i}eA_\mu l^\mu)F_1 + \sqrt{2}(\bar{\delta} + \pi - \alpha + \mathrm{i}eA_\mu \bar{m}^\mu)F_2 - \mathrm{i}\mu G_1 = 0,$$

$$\sqrt{2}(\Delta + \mu - \gamma + \mathrm{i}eA_\mu n^\mu)F_2 + \sqrt{2}(\delta + \beta - \tau + \mathrm{i}eA_\mu \bar{m}^\mu)F_1 - \mathrm{i}\mu G_2 = 0,$$

$$\sqrt{2}(D + \epsilon^* - \rho^* + \mathrm{i}eA_\mu l^\mu)G_2 - \sqrt{2}(\delta + \pi^* - \alpha^* + \mathrm{i}eA_\mu m^\mu)G_1 - \mathrm{i}\mu F_2 = 0,$$

$$\sqrt{2}(\Delta + \mu^* - \gamma^* + \mathrm{i}eA_\mu n^\mu)G_1 - \sqrt{2}(\bar{\delta} + \beta^* - \tau^* + \mathrm{i}eA_\mu m^\mu)G_2 - \mathrm{i}\mu F_1 = 0. \tag{7.4.6}$$

式中,

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r}\right), \quad \Delta = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}\right),$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\mathrm{i}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right),$$

$$\bar{\delta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\mathrm{i}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right). \tag{7.4.7}$$

将(7.4.4)和(7.4.3)式代入(7.4.6)式,得到

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} + \frac{\mathrm{i}Qe}{r}\right)F_1 + \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\mathrm{i}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{1}{2r}\cot\theta\right)F_2 - \mathrm{i}\mu G_1 = 0,\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} + \frac{\mathrm{i}Qe}{r}\right)F_2 + \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\mathrm{i}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{1}{2r}\cot\theta\right)F_1 - \mathrm{i}\mu G_2 = 0,\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} + \frac{\mathrm{i}Qe}{r}\right)G_2 - \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\mathrm{i}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{1}{2r}\cot\theta\right)G_1 - \mathrm{i}\mu F_2 = 0,\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} + \frac{\mathrm{i}Qe}{r}\right)G_1 - \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\mathrm{i}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{1}{2r}\cot\theta\right)G_2 - \mathrm{i}\mu F_1 = 0.
\end{aligned} \tag{7.4.8}$$

(7.4.8)式可以改写为

$$\left(\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + \gamma^1\frac{\partial}{\partial r} + \gamma^2\frac{\partial}{\partial\theta} + \gamma^3\frac{\partial}{\partial\phi} + \gamma^1\frac{1}{r} + \gamma^2\frac{1}{2}\cot\theta + \gamma^0\frac{\mathrm{i}Qe}{r} - \mathrm{i}\mu I\right)\psi = 0, \tag{7.4.9}$$

其中,

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{r}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \gamma^3 = \frac{1}{r\sin\theta}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i}\\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 0\\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0\\ -\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{7.4.10}$$

$$\psi(F_1, F_2, G_1, G_2)^{\mathrm{T}}, \tag{7.4.11}$$

T 为转置算子. 令

$$\psi = \frac{1}{r(\sin\theta)^{1/2}}\hat{\psi}, \tag{7.4.12}$$

并代入(7.4.9)式,得到

$$\left(\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + \gamma^1\frac{\partial}{\partial r} + \gamma^2\frac{\partial}{\partial\theta} + \gamma^3\frac{\partial}{\partial\phi} + \gamma^0\frac{\mathrm{i}Qe}{r} - \mathrm{i}\mu I\right)\hat{\psi} = 0, \tag{7.4.13}$$

式中

$$\hat{\psi} = (\hat{F}_1, \hat{F}_2, \hat{G}_1, \hat{G}_2)^{\mathrm{T}}, \tag{7.4.14}$$

(7.4.13)式也可以写成

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\mathrm{i}Qe}{r}\right)\hat{F}_1 - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\mathrm{i}}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\hat{F}_2 - \mathrm{i}\mu\hat{G}_1 = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\mathrm{i}Qe}{r}\right)\hat{F}_2-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\mathrm{i}}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\hat{F}_1-\mathrm{i}\mu\hat{G}_2=0,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\mathrm{i}Qe}{r}\right)\hat{G}_1+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\mathrm{i}}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\hat{G}_2-\mathrm{i}\mu\hat{F}_1=0,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\mathrm{i}Qe}{r}\right)\hat{G}_2+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\mathrm{i}}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\hat{G}_1-\mathrm{i}\mu\hat{F}_2=0. \tag{7.4.15}$$

由于联立偏微分方程(7.4.15)的系数不含 t 和 ϕ,可设

$$\hat{F}_j=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et+\mathrm{i}m\phi}f_j(r,\theta),$$
$$\hat{G}_j=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et+\mathrm{i}m\phi}g_j(r,\theta),\quad j=1,2. \tag{7.4.16}$$

把(7.4.16)式代入(7.4.15)式,得到

$$\left(-\mathrm{i}E-\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\mathrm{i}Qe}{r}\right)f_1-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{m}{\sin\theta}\right)f_2-\mathrm{i}\mu g_1=0,$$
$$\left(-\mathrm{i}E+\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\mathrm{i}Qe}{r}\right)f_2-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{m}{\sin\theta}\right)f_1-\mathrm{i}\mu g_2=0,$$
$$\left(-\mathrm{i}E+\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\mathrm{i}Qe}{r}\right)g_1+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{m}{\sin\theta}\right)g_2-\mathrm{i}\mu f_1=0,$$
$$\left(-\mathrm{i}E-\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\mathrm{i}Qe}{r}\right)g_2+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{m}{\sin\theta}\right)g_1-\mathrm{i}\mu f_2=0. \tag{7.4.17}$$

为了进一步分离变量,令

$$f_1(r,\theta)=X_{+\frac{1}{2}}(r)P_{+\frac{1}{2}}(\theta),$$
$$f_2(r,\theta)=X_{-\frac{1}{2}}(r)P_{-\frac{1}{2}}(\theta),$$
$$g_1(r,\theta)=X_{-\frac{1}{2}}(r)P_{+\frac{1}{2}}(\theta),$$
$$g_2(r,\theta)=X_{+\frac{1}{2}}(r)P_{-\frac{1}{2}}(\theta). \tag{7.4.18}$$

把(7.4.18)式代入(7.4.17)式,得到

$$r\left[\left(\mathrm{i}E+\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\mathrm{i}Qe}{r}\right)X_{+\frac{1}{2}}+\mathrm{i}\mu X_{-\frac{1}{2}}\right]P_{+\frac{1}{2}}+\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{m}{\sin\theta}\right)X_{-\frac{1}{2}}P_{-\frac{1}{2}}=0,$$
$$r\left[\left(\mathrm{i}E-\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\mathrm{i}Qe}{r}\right)X_{-\frac{1}{2}}+\mathrm{i}\mu X_{+\frac{1}{2}}\right]P_{-\frac{1}{2}}+\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{m}{\sin\theta}\right)X_{+\frac{1}{2}}P_{+\frac{1}{2}}=0,$$
$$r\left[\left(\mathrm{i}E-\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\mathrm{i}Qe}{r}\right)X_{-\frac{1}{2}}+\mathrm{i}\mu X_{+\frac{1}{2}}\right]P_{+\frac{1}{2}}-\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{m}{\sin\theta}\right)X_{+\frac{1}{2}}P_{-\frac{1}{2}}=0,$$
$$r\left[\left(\mathrm{i}E+\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\mathrm{i}Qe}{r}\right)X_{+\frac{1}{2}}+\mathrm{i}\mu X_{-\frac{1}{2}}\right]P_{-\frac{1}{2}}-\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{m}{\sin\theta}\right)X_{-\frac{1}{2}}P_{+\frac{1}{2}}=0. \tag{7.4.19}$$

为了满足上列方程,只要有

$$r\left[\left(\mathrm{i}E+\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\mathrm{i}Qe}{r}\right)X_{+\frac{1}{2}}+\mathrm{i}\mu X_{-\frac{1}{2}}\right]=\lambda_1X_{-\frac{1}{2}},$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{m}{\sin\theta}\right)P_{-\frac{1}{2}}=-\lambda_1P_{+\frac{1}{2}};$$

$$r\left[\left(\mathrm{i}E-\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\mathrm{i}Qe}{r}\right)X_{-\frac{1}{2}}+\mathrm{i}\mu X_{+\frac{1}{2}}\right]=\lambda_2 X_{+\frac{1}{2}},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{m}{\sin\theta}\right)P_{+\frac{1}{2}}=-\lambda_2 P_{-\frac{1}{2}};$$

$$r\left[\left(\mathrm{i}E-\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\mathrm{i}Qe}{r}\right)X_{-\frac{1}{2}}+\mathrm{i}\mu X_{+\frac{1}{2}}\right]=\lambda_3 X_{+\frac{1}{2}},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{m}{\sin\theta}\right)P_{-\frac{1}{2}}=\lambda_3 P_{+\frac{1}{2}};$$

$$r\left[\left(\mathrm{i}E+\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\mathrm{i}Qe}{r}\right)X_{+\frac{1}{2}}+\mathrm{i}\mu X_{-\frac{1}{2}}\right]=\lambda_4 X_{-\frac{1}{2}},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{m}{\sin\theta}\right)P_{+\frac{1}{2}}=\lambda_4 P_{-\frac{1}{2}}. \tag{7.4.20}$$

为了使(7.4.20)式中各式自洽,应该有

$$\lambda_1=-\lambda_2=-\lambda_3=\lambda_4\equiv\lambda. \tag{7.4.21}$$

将此式代入(7.4.20)式,得到独立的方程:

$$r\left[\left(\mathrm{i}E+\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\mathrm{i}Qe}{r}\right)X_{+\frac{1}{2}}+\mathrm{i}\mu X_{-\frac{1}{2}}\right]=\lambda_1 X_{-\frac{1}{2}}, \tag{7.4.22a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{m}{\sin\theta}\right)P_{-\frac{1}{2}}=-\lambda_1 P_{+\frac{1}{2}}; \tag{7.4.22b}$$

$$r\left[\left(\mathrm{i}E-\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\mathrm{i}Qe}{r}\right)X_{-\frac{1}{2}}+\mathrm{i}\mu X_{+\frac{1}{2}}\right]=-\lambda_1 X_{+\frac{1}{2}}, \tag{7.4.22c}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{m}{\sin\theta}\right)P_{+\frac{1}{2}}=\lambda_1 P_{-\frac{1}{2}}. \tag{7.4.22d}$$

此即分离变量和部分退耦的方程.

2. 级能公式

由(7.4.22b)式和(7.4.22d)式可以得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}+\frac{m\cos\theta}{\sin^2\theta}-\frac{m^2}{\sin^2\theta}+\lambda^2\right)P_{+\frac{1}{2}}=0, \tag{7.4.23a}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}-\frac{m\cos\theta}{\sin^2\theta}-\frac{m^2}{\sin^2\theta}+\lambda^2\right)P_{-\frac{1}{2}}=0. \tag{7.4.23b}$$

令

$$z=\frac{1}{2}(1+\cos\theta), \tag{7.4.24}$$

则(7.4.23b)可写为

$$\left\{z^2(1-z)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}+\left(\frac{1}{2}-z\right)(1-z)z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}+\left[-\lambda^2z^2+\left(\lambda^2+\frac{1}{2}m\right)z-\frac{1}{4}m(m+1)\right]\right\}P_{+\frac{1}{2}}=0. \tag{7.4.25}$$

这一方程的一个解是

$$y = z^{-\frac{1}{2}m}(1-z)^{\frac{1}{2}m}F\left(\lambda, -\lambda, \frac{1}{2}-m, z\right). \tag{7.4.26}$$

为了使超几何级数在某一项截断,成为一多项式,λ 必须取整数值.

令

$$X_{+\frac{1}{2}} = e^{-\alpha r}R_{+\frac{1}{2}}, X_{-\frac{1}{2}} = e^{-\alpha r}R_{-\frac{1}{2}}, \tag{7.4.27}$$

式中 $\alpha=(\mu^2-E^2)^{\frac{1}{2}}$. 将(7.4.27)式代入(7.4.22a),(7.4.22b)式可得

$$\left(\frac{d}{dr}-\alpha+iE-\frac{iQe}{r}\right)R_{+\frac{1}{2}}+i\mu R_{-\frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{r}R_{-\frac{1}{2}},$$

$$\left(\frac{d}{dr}-\alpha-iE-\frac{iQe}{r}\right)R_{-\frac{1}{2}}-i\mu R_{+\frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{r}R_{+\frac{1}{2}}. \tag{7.4.28}$$

令

$$R_{+\frac{1}{2}} = \Sigma b_\nu r^{s+\nu}, R_{-\frac{1}{2}} = \Sigma d_\nu r^{s+\nu}, \tag{7.4.29}$$

式中

$$S = (\lambda^2 - Q^2e^2)^{\frac{1}{2}}.$$

将(7.4.29)式代入(7.4.28)式并比较级数中 $r^{s+\nu-1}$ 项的系数,可得

$$(s+\nu)b_\nu-(\alpha-iE)b_{\nu-1}-iQeb_\nu+i\mu d_{\nu-1}-\lambda d_\nu = 0,$$

$$(s+\nu)d_\nu-(\alpha+iE)d_{\nu-1}+iQed_\nu-i\mu d_{\nu-1}-\lambda b_\nu = 0. \tag{7.4.30}$$

利用熟知的级数求解方法,由(7.4.30)式可以导出

$$\alpha(n+s)+EQe = 0, \tag{7.4.31}$$

其中 n 为正整数. 由(7.4.31)式可得

$$E^2 = \mu^2\left[1+\frac{Q^2e^2}{(n+s)^2}\right]^{-1}. \tag{7.4.32}$$

正能解为

$$E = \mu\left[1+\frac{Q^2e^2}{(n+s)^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \mu\left[1+\frac{Q^2e^2}{(n+\sqrt{\lambda^2-Q^2e^2})^2}\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{7.4.33}$$

恢复使用 CGS 单位制. 令 $\alpha=e^2/c\hbar$ 并注意 $Q=ze$. 于是(7.4.33)式可以写成

$$E = \mu c^2\left[1+\frac{z^2\alpha^2}{(n+\sqrt{\lambda^2-z^2a^2})^2}\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{7.4.34}$$

(7.4.34)式就是计入相对论效应类氢原子的能级公式.

从上面的计算可以清楚地看到旋量零标架方法的特点. 这个方法对 Minkowski 时空类氢原子的 Dirac 方程的求解,不需要计算任何对易关系,只要构造的零标架合适,就能自动地求解.

通常总是把旋量零标架方法和静止质量为零的粒子(比如光子、引力子等)的

辐射和传播等一类的问题联系在一起. 本节的结果指出,旋量零标架方法可以用于计算静止质量不为零的粒子的束缚态能级.

7.5　关于退耦和分离变量

本节通过微扰和退耦的计算,表明在克尔时空中对于静止质量为零、自旋为任意值的粒子场,所有场分量都可以退耦. 然后应用零标架法证明只有中微子场的两个分量和电磁场的两个分量可以分离变量.

1. *场方程*

静止质量为零的旋量场方程具有形式:

$$\nabla^{AB}\xi_{ACD\cdots JK}=0 \tag{7.5.1a}$$

或者

$$\nabla_{A\dot{B}}\xi^{ACD\cdots JK}=0. \tag{7.5.1b}$$

其中 $\nabla_{A\dot{B}}$ 是旋空间的协变微商;旋量 $\xi^{ACD\cdots JK}$ 是场量,大写拉丁字母 A,C,D 等表示旋空间的坐标指标,取值为 0 或 1;$\dot{B}$ 是共轭空间的坐标指标,取值为 0 或 1;场量 $\xi^{ACD\cdots JK}$ 的指标 $A,C,D,\cdots,J,K$ 一共有 $2s$ 个. 场量对所有指标全对称,对于一定的 s 一共有 $2s+1$ 个场分量.

(7.5.1b)式可用旋空间的标架表示:

$$\nabla_{a\dot{b}}\xi^{acd\cdots jk}=0. \tag{7.5.2}$$

式中小写拉丁字母 $a,c,d,\cdots,j,k$ 表示旋空间的标架指标,取值 0 或 1;$\dot{b}$ 是共轭空间的标架指标,取值 0 或 1. 同样,场量 $\xi^{acd\cdots jk}$ 对所有指标 $a,c,d,\cdots,j,k$ 全对称.

由(7.5.2)式可以直接导出黎曼空间的标架方程:

$$\begin{aligned}&[\Delta+2(s-t-1)\gamma+(2s-t)\mu]\psi^{(s)}_{2s-t-1}\\&-[\delta+2(s-t)\beta-(t+1)\tau]\psi^{(s)}_{2s-t}\\&-(2s-t-1)\nu\psi^{(s)}_{2s-t-2}-t\sigma\psi^{(s)}_{2s-t+1}=0,\end{aligned} \tag{7.5.3a}$$

$$\begin{aligned}&[D+2(s-t)\epsilon-(t+1)\rho]\psi^{(s)}_{2s-t}\\&-[\bar{\delta}+2(s-t-1)\alpha+(2s-t)\pi]\psi^{(s)}_{2}s-t+1\\&+t\kappa\psi^{(s)}_{2s-t-1}+(2s-t-1)\lambda\psi^{(s)}_{2s-t-2}=0.\end{aligned} \tag{7.5.3b}$$

$$\xi^{111\cdots10\cdots00}\equiv(-1)^p\psi^{(s)}_p,\ \xi^{111\cdots10\cdots00}\text{ 的指标中有 }p\text{ 个 }0,(2s-p)\text{ 个 }1. \tag{7.5.4}$$

这里场量 $\psi^{(s)}_i$ 的右上指标(s)表示自旋,右下指标 i 表示场量的各分量,i 取值 0, 1, 2, $\cdots$, $2s$. 不允许取其他值,或者说,若出现其他值则该场量的这一项应为零. D, Δ, δ 和 $\bar{\delta}$ 是 N-P 特别规定的偏微分算子的符号;ρ,β,τ 等是 N-P 特别规定的旋系数,t 取值 0, 1, 2, $\cdots$, $2s-1$,所以一共有 $4s$ 个场方程.

当 $s=1/2$,1 和 2 时,(7.5.3)式分别是用旋系数表示的中微子方程、电磁场方程和引力场方程.

2. 微扰和退耦

用角标 A 表示不存在微扰时的物理量,用角标 B 表示一阶微扰量. 标架等可写为

$$l = l^A + l^B, \quad n = n^A + n^B, \quad \cdots$$
$$D = D^A + D^B, \quad \rho = \rho^A + \rho^B, \quad \cdots$$

这样,方程(7.5.3)变为

$$\begin{aligned}
&\{[\Delta + 2(s-t-1)\gamma + (2s-t)\mu]^A + [\Delta + 2(s-t-1)\gamma + (2s-t)\mu]^B\} \\
&\times(\psi^A_{2s-t-1} + \psi^B_{2s-t-1}) - \{[\delta + 2(s-t)\beta - (t+1)\tau]^A \\
&+ [\delta + 2(s-t)\beta - (t+1)\tau]^B\}(\psi^A_{2s-t} + \psi^B_{2s-t}) \\
&- (2s-t-1)(\nu^A + \nu^B)(\psi^A_{2s-t-2} + \psi^B_{2s-t-2}) \\
&- t(\sigma^A + \sigma^B)(\psi^A_{2s-t+1} + \psi^B_{2s-t+1}) = 0,
\end{aligned} \tag{7.5.5a}$$

$$\begin{aligned}
&\{[D + 2(s-t)\epsilon - (t+1)\rho]^A + [D + 2(s-t)\epsilon - (t+1)\rho]^B\} \\
&\times(\psi^A_{2s-t} + \psi^B_{2s-t}) - \{[\bar{\delta} + 2(s-t-1)\alpha + (2s-t)\pi]^A \\
&+ [\bar{\delta} + 2(s-t-1)\alpha + (2s-t)\pi]^B\}(\psi^A_{2s-t-1} + \psi^B_{2s-t-1}) \\
&+ t(\kappa^A + \kappa^B)(\psi^A_{2s-t+1} + \psi^B_{2s-t+1}) \\
&+ (2s-t-1)\times(\lambda^A + \lambda^B)(\psi^A_{2s-t-2} + \psi^B_{2s-t-2}) = 0.
\end{aligned} \tag{7.5.5b}$$

按照黑洞的半经典理论,对试验粒子场有

$$\psi^A_i = 0, \quad i = 0,1,2,\cdots,2s. \tag{7.5.6}$$

对于 D 类时空,有

$$\kappa^A = \sigma^A = \nu^A = \lambda^A = 0. \tag{7.5.7}$$

只计及一阶小量,(7.5.5)式变为

$$\begin{aligned}
&[\Delta + 2(s-t-1)\gamma + (2s-t)\mu]^A \psi^B_{2s-t-1} \\
&- [\delta + 2(s-t)\beta - (t+1)\tau]^A \psi^B_{2s-t} = 0,
\end{aligned} \tag{7.5.8a}$$

$$\begin{aligned}
&[D + 2(s-t)\epsilon - (t+1)\rho]^A \psi^B_{2s-t} - [\bar{\delta} + 2(s-t-1)\alpha \\
&+ (2s-t)\pi]^A \psi^A_{2s-t-1} = 0,
\end{aligned} \tag{7.5.8b}$$

式中 t 取值 $0,1,2,\cdots,2s-1$. 微分算子和旋系数是正常量,描述试验粒子的场量 ψ^B_i 是一阶无穷小量. 在以下的计算中我们将省写角标 A 和 B,恢复使用角标(s).

Teukolsky 曾导出以下的对易关系:

$$
\begin{aligned}
&[D-(p+1)\epsilon+\epsilon^{*}+q\rho-\rho^{*}](\delta-p\beta+q\tau)\\
&-[\delta-(p+1)\beta-\alpha^{*}+\pi^{*}+q\tau](D-p\epsilon+q\rho)=0,
\end{aligned}
\tag{7.5.9}
$$

式中 p 和 q 为任意常数.

令

$$
p=-2(s-t),q=-(t+1),
$$

则(7.5.9)式变为

$$
\begin{aligned}
&[D+(2s-2t-1)\epsilon+\epsilon^{*}-(t+1)\rho-\rho^{*}][\delta+2(s-t)\beta-(t+1)\tau]\\
&-[\delta+(2s-2t-1)\beta-\alpha^{*}+\pi^{*}-(t+1)\tau]\\
&\times[D+2(s-t)\epsilon-(t+1)\rho]=0.
\end{aligned}
\tag{7.5.10}
$$

用

$$
[D+(2s-2t-1)\epsilon+\epsilon^{*}-(t+1)\rho-\rho^{*}]
$$

作用于(7.5.8a)式,用

$$
[\delta+(2s-2t-1)\beta-\alpha^{*}+\pi^{*}-(t+1)\tau]
$$

作用于(7.5.8b)式,然后相加,并考虑到(7.5.10)式,得

$$
\begin{aligned}
&\{[D+(2s-2t-1)\epsilon+\epsilon^{*}-(t+1)\rho-\rho^{*}]\\
&[\Delta+2(s-t-1)\gamma+(2s-t)\mu]\\
&-(\delta+(2s-2t-1)\beta-\alpha^{*}+\pi^{*}-(t+1)\tau]\\
&\times[\bar{\delta}+2(s-t-1)\alpha+(2s-t)\pi]\}\psi_{2s-t-1}^{(s)}=0.
\end{aligned}
\tag{7.5.11}
$$

当参数 t 取值 $0,1,2,\cdots,2s-1$,我们得到 $2s$ 个场量的退耦方程.

做对换 $l\leftrightarrow n, m\leftrightarrow\bar{m}$,则有 $D\leftrightarrow\Delta$, $\delta\leftrightarrow\bar{\delta}$, $K\leftrightarrow-\nu$, $\pi\leftrightarrow-\tau,\varepsilon\leftrightarrow-\gamma,\rho\leftrightarrow-\gamma,\lambda\leftrightarrow-\sigma,\alpha\leftrightarrow-\beta$. 此时(7.5.9)式变为

$$
\begin{aligned}
&[\Delta+(p+1)\gamma-\gamma^{*}-q\mu+\mu^{*}][\bar{\delta}+p\alpha-q\pi]\\
&-[\bar{\delta}+(p+1)\alpha+\beta^{*}-\tau^{*}-q\pi](\Delta+p\gamma-q\mu)=0.
\end{aligned}
\tag{7.5.12}
$$

令

$$
p=2(s-t-1),q=-(2s-t),
$$

上式可改写为

$$
\begin{aligned}
&[\Delta+(2s-2t-1)\gamma-\gamma^{*}+(2s-t)\mu+\mu^{*}]\\
&\times[\bar{\delta}+2(s-t-1)\alpha+(2s-t)\pi]\\
&-[\bar{\delta}+(2s-2t-1)\alpha+\beta^{*}-\tau^{*}+(2s-t)\pi]\\
&\times[\Delta+2(s-t-1)\gamma+(2s-t)\mu]=0.
\end{aligned}
\tag{7.5.13}
$$

由(7.5.13)式和(7.5.8)式消去 $\psi_{2s-t-1}^{(s)}$ 项,得到

$$
\begin{aligned}
&\{[\Delta+(2s-2t-1)\gamma-\gamma^{*}+(2s-t)\mu+\mu^{*}][D+2(s-t)\epsilon-(t+1)\rho]\\
&-[\bar{\delta}+(2s-2t-1)\alpha+\beta^{*}-\tau^{*}+(2s-t)\pi]\\
&\times[\bar{\delta}+2(s-t)\beta-(t+1)\tau]\psi_{2s-t}^{(s)}=0.
\end{aligned}
\tag{7.5.14}
$$

当 t 取值 0,1,2,…,$2s-1$,又得到 $2s$ 个场量的退耦方程.

对于中微子场,$s=\frac{1}{2}$,$t=0$,(7.5.11)和(7.5.14)式简化为

$$
\begin{aligned}
&[(D+\epsilon^*-\rho-\rho^*)(\Delta-\gamma+\mu)-(\delta-\alpha^*+\pi^*-\tau)\cdot(\bar{\delta}-\alpha+\pi)]\psi_0^{(1/2)}=0,\\
&[(\Delta-\gamma^*+\mu+\mu^*)(D+\epsilon-\rho)-(\bar{\delta}+\beta^*-\tau^*+\pi)(\delta+\beta-\tau)]\psi_1^{(1/2)}=0. \qquad (7.5.15)
\end{aligned}
$$

对于电磁场,$s=1$,$t=0,1$,(7.5.11)和(7.5.14)式简化为

$$
\begin{aligned}
&[(D+\epsilon+\epsilon^*-\rho-\rho^*)(\Delta+2\mu)\\
&-(\delta+\beta-\alpha^*+\pi^*-\tau)(\bar{\delta}+2\pi)]\psi_1^{(1)}=0,\\
&[(D-\epsilon+\epsilon^*-2\rho-\rho^*)(\Delta-2\gamma+\mu)\\
&-(\delta-\beta-\alpha^*+\pi^*-2\tau)(\bar{\delta}-2\alpha+\pi)]\psi_0^{(1)}=0,\\
&[(\Delta+\gamma-\gamma^*+2\mu+\mu^*)(D+2\epsilon-\rho)-(\bar{\delta}+\alpha+\beta^*-\tau^*+2\pi)\\
&\times(\delta+2\beta-\tau)\psi_2^{(1)}=0,\\
&[(\Delta-\gamma-\gamma^*+\mu+\mu^*)(D-2\rho)\\
&-(\bar{\delta}-\alpha+\beta^*-\tau^*+\pi)\cdot(\delta-2\tau)]\psi_1^{(1)}=0. \qquad (7.5.16)
\end{aligned}
$$

对于自旋为 3/2 的场,$t=0,1,2$,(7.5.11)和(7.5.14)式简化为

$$
\begin{aligned}
&[(D+2\epsilon+\epsilon^*-\rho-\rho^*)(\Delta+\gamma+3\mu)\\
&-(\delta+2\beta-\alpha^*+\pi^*-\tau)(\bar{\delta}+\alpha+3\pi)]\psi_2^{(\frac{3}{2})}=0,\\
&[(D+\epsilon^*-2\rho-\rho^*)(\Delta-\gamma+2\mu)-(\delta-\alpha^*+\pi^*-2\tau)\\
&\times(\bar{\delta}-\alpha+2\pi)]\psi_1^{(\frac{3}{2})}=0,\\
&[(D-2\epsilon+\epsilon^*-3\rho-\rho^*)(\Delta-3\gamma+\mu)\\
&-(\delta-2\beta-\alpha^*+\pi^*-3\tau)\cdot(\bar{\delta}-3\alpha+\pi)]\psi_0^{(\frac{3}{2})}=0,\\
&[(\Delta+2\gamma-\gamma^*+3\mu+\mu^*)(D+3\epsilon-\rho)-(\bar{\delta}+2\alpha+\beta^*-\tau^*+3\pi)\\
&\times(\delta+3\beta-\tau)]\psi_3^{(\frac{3}{2})}=0,\\
&[(\Delta-\gamma^*+2\mu+\mu^*)(D+\epsilon-2\rho)\\
&-(\bar{\delta}+\beta^*-\tau^*+2\pi)(\delta+\beta-2\tau)]\psi_2^{(\frac{3}{2})}=0,\\
&[(\Delta-2\gamma-\gamma^*+\mu+\mu^*)(D-\epsilon-3\rho)\\
&-(\bar{\delta}-2\alpha+\beta^*-\tau^*+\pi)(\delta-\beta-3\tau)]\psi_1^{(\frac{3}{2})}=0. \qquad (7.5.17)
\end{aligned}
$$

这里应注意,(7.5.11)和(7.5.14)式这两组退耦方程不是独立的,通过本节的变换式,可以由一组变为另一组. 比如,($7.5.17_1$)式可以变为($7.5.17_6$),($7.5.17_2$)式可以变为($7.5.17_5$)式.

3. 分离变量

把含有各个场分量的耦合方程变为只含一个场分量的方程称之为退耦;而分

离变量则进一步把偏微分方程化为常微分方程.

引入零标架

$$
\begin{aligned}
l^{\mu} &= \frac{1}{\Delta}[(r^2+a^2),\Delta,0,a],\\
n^{\mu} &= \frac{1}{2\Sigma}[(r^2+a^2),-\Delta,0,a],\\
m^{\mu} &= \frac{1}{\sqrt{2}(r+\mathrm{i}a\cos\theta)}[\mathrm{i}a\sin\theta,0,1,\mathrm{i}\operatorname{cosec}\theta],
\end{aligned}
\tag{7.5.18}
$$

相应的旋系数为

$$
\begin{aligned}
&\rho = -\frac{1}{(r-\mathrm{i}a\cos\theta)},\quad \beta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\rho^{*}\cot\theta,\\
&\pi = \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{i}a\rho^{2}\sin\theta,\quad \tau = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}a\rho\rho^{*}\sin\theta,\\
&\mu = \frac{1}{2}\rho^{2}\rho^{*}\Delta,\quad \gamma = \mu + \frac{1}{2}\rho\rho^{*}(r-M),\\
&\alpha = \pi - \beta^{*},\quad \epsilon = 0.
\end{aligned}
\tag{7.5.19}
$$

式中 $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$, $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$, M 是 Kerr 黑洞的质量, a 是比角动量.

对于 D 型时空(Kerr 度规属于 D 型时空),

$$
\kappa = \sigma = \nu = \lambda = 0. \tag{7.5.20}
$$

微分算符:

$$
D = l^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}},\quad \Delta = n^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}},\quad \delta = m^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}},\quad \bar{\delta} = (m^{*})^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}. \tag{7.5.21}
$$

在以上各式和以下各式中,应注意区分微分算符 $\Delta \equiv n^{\mu}\dfrac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ 和 Kerr 度规中常用的符号 $\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2$.

将(7.5.19)和(7.5.21)式代入(7.5.11)式,得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\Sigma}\Big\{\left[\frac{1}{\Delta}(r^2+a^2)^2 - a^2\sin^2\theta\right]\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2a\left[\frac{1}{\Delta}(r^2+a^2) - 1\right]\\
&\times\frac{\partial^2}{\partial t\partial\phi} + \left(\frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2\theta}\right)\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} - \Delta\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + 2(s-t-1)\\
&\times\left[\frac{1}{\Delta}M(r^2-a^2) - r - \mathrm{i}a\cos\theta\right]\frac{\partial}{\partial t} + [2(2s-t-1)\rho\Delta + 2(s-2)\\
&\times(r-M)]\frac{\partial}{\partial r} + [2(2s-t-1)\mathrm{i}a\rho\sin\theta - \cot\theta]\frac{\partial}{\partial\theta}\\
&+2(s-t-1)\left[\frac{a}{\Delta}(r-M) + \frac{\mathrm{i}\cos\theta}{\sin^2\theta}\right]\frac{\partial}{\partial\phi} + 2(t^2 - st - 2t + 4s - 2)\\
&\times\rho(r-M) - (t-1)\times(4s-3t-2)\rho^2\Delta + 2(2s^2 - 4st + 2 + s - 1)\\
&\times\mathrm{i}a\rho\cos\theta + (t-1)(4s-3t-2)\rho^2a^2\sin^2\theta + 2(s-t-1)
\end{aligned}
$$

$$+(s-t)(s-t-1)\cot^2\theta-(s-t-1)\frac{1}{\sin^2\theta}\Big\}\psi_{2s-t-1}^{(s)}=0. \quad (7.5.22)$$

当 $t=2s-1$,(7.5.22)式化简为

$$\Big\{\left[\frac{1}{\Delta}(r^2+a^2)^2-a^2\sin^2\theta\right]\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2a\left[\frac{1}{\Delta}(r^2+a^2)-1\right]\frac{\partial^2}{\partial t\partial\phi}$$
$$+\left[\frac{a^2}{\Delta}-\frac{1}{\sin^2\theta}\right]\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}-\Delta\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-2s\left[\frac{1}{\Delta}M(r^2-a^2)-r-\mathrm{i}a\cos\theta\right]$$
$$\times\frac{\partial}{\partial t}-2(s+1)(r-M)\frac{\partial}{\partial r}-\cot\frac{\partial}{\partial\theta}-2s\left[\frac{a}{\Delta}(r-M)+\frac{\mathrm{i}\cos\theta}{\sin^2\theta}\right]$$
$$\times\frac{\partial}{\partial\phi}+2(s-1)(2s-1)[\rho(r-M)+\rho^2\Delta+\mathrm{i}a\rho\cos\theta-\rho^2a^2\sin^2\theta]$$
$$+s^2\cot^2\theta-s\Big\}\psi_0^{(s)}=0. \quad (7.5.23)$$

对于中微子场和电磁场,s 分别为 1/2 和 1,(7.5.23)式中$(s-1)(2s-1)$一项为零,化简后得到

$$\Big\{\left[\frac{1}{\Delta}(r^2+a^2)^2-a^2\sin^2\theta\right]\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2a\left[\frac{1}{\Delta}(r^2+a^2)-1\right]\frac{\partial^2}{\partial t\partial\phi}$$
$$+\left[\frac{a^2}{\Delta}-\frac{1}{\sin^2\theta}\right]\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}-\Delta\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}-2s\left[\frac{1}{\Delta}M(r^2-a^2)-r-\mathrm{i}a\cos\theta\right]$$
$$\times\frac{\partial}{\partial t}-2(s+1)(r-M)\frac{\partial}{\partial r}-\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$
$$-2s\left[\frac{a}{\Delta}(r-M)+\frac{\mathrm{i}\cos\theta}{\sin^2\theta}\right]\cdot\frac{\partial}{\partial\phi}+s^2\cot^2\theta-s\Big\}\psi_0^{(s)}=0. \quad (7.5.24)$$

令

$$\psi_{2s-t-1}^{(s)}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}m\phi}R(r)S(\theta), \quad (7.5.25)$$

(7.5.22)式成为

$$\frac{1}{2\Sigma}\Big\{-\left[\frac{1}{\Delta}(r^2+a^2)^2-a^2\sin^2\theta\right]\omega+2\left[\frac{1}{\Delta}(r^2+a^2)-1\right]ma\omega-\left[\frac{a^2}{\Delta}-\frac{1}{\sin^2\theta}\right]m^2$$
$$-\Delta\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}-2(s-t-1)\left[\frac{1}{\Delta}M(r^2-a^2)-r-\mathrm{i}a\cos\theta\right]\mathrm{i}\omega$$
$$+[2(2s-t-1)\rho\Delta+2(s-t-2)(r-M)]\frac{\partial}{\partial r}$$
$$+[2(2s-t-1)\mathrm{i}a\rho\sin\theta-\cot\theta]\frac{\partial}{\partial\theta}+2(s-t-1)\left[\frac{a}{\Delta}(r-M)+\frac{\mathrm{i}\cos\theta}{\sin^2\theta}\right]\mathrm{i}m$$
$$+2(t^2-st-2t+4s-2)\rho(r-M)-(t-1)$$
$$\times(4s-3t-2)\rho^2\Delta+2(s-t-1)+2(2s^2-4st+2t^2+s-1)\mathrm{i}a\rho\cos\theta$$
$$+(t-1)(4s-3t-2)\rho^2a^2\sin^2\theta+(s-t)(s-t-1)\cot^2\theta$$

$$-(s-t-1)\frac{1}{\sin^2\theta}\Big\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}m\phi}R(r)S(\theta)=0. \tag{7.5.26}$$

能分离变量的条件是含 ρ 的项为零. 取 $t=2s-1$,(7.5.26)式变为

$$\Big\{-\left[\frac{1}{\Delta}(r^2+a^2)^2-a^2\sin^2\theta\right]\omega^2+2\left[\frac{1}{\Delta}(r^2+a^2)-1\right]ma\omega$$

$$-\left[\frac{a^2}{\Delta}-\frac{1}{\sin^2\theta}\right]m^2-\Delta\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+2s\left[\frac{1}{\Delta}M(r^2-a^2)-r\right.$$

$$\left.-\mathrm{i}a\cos\theta\right]\cdot\mathrm{i}\omega-2(s+1)(r-M)\frac{\partial}{\partial r}-\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$-2s\left[\frac{a}{\Delta}(r-M)+\frac{\mathrm{i}\cos\theta}{\sin^2\theta}\right]\mathrm{i}m+2(s-1)(2s-1)[\rho(r-M)+\rho^2\Delta+\mathrm{i}a\cos\theta$$

$$-\rho^2a^2\sin^2\theta]+s^2\cot^2\theta-s\Big\}R(r)S(\theta)=0. \tag{7.5.27}$$

由(7.5.27)式可以看出,仅当 $s=\frac{1}{2}$,1 时,含 ρ 的项才都为零. 分离变量,得

$$\Delta^{-s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\Delta^{s+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}R(r)\right]+\Big\{\frac{1}{\Delta}[K^2-2\mathrm{i}s(r-M)K]$$

$$+4\mathrm{i}s\omega r-\lambda\Big\}R(r)=0, \tag{7.5.28}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}S(\theta)\right]+\Big\{a^2\omega^2\cos^2\theta-\frac{m^2}{\sin^2\theta}$$

$$-2a\omega s\cos\theta-\frac{2ms\cos\theta}{\sin^2\theta}-s^2\cot^2\theta-s^2+E\Big\}S(\theta)=0, \tag{7.5.29}$$

式中,

$$K=(r^2+a^2)\omega-am,\quad \lambda=E+a^2\omega^2-2am\omega-s(s+1),$$

E 为分离变量常数.

类似的计算表明,只有电磁场的两个分场量 $\psi_0^{(1)}$,$\psi_2^{(1)}$ 和中微子场的两个分场量 $\psi_0^{(\frac{1}{2})}$,$\psi_1^{(\frac{1}{2})}$ 可以分离变量,其他场量均不能分离变量.

7.6　粒子的散射和吸收

在粒子的波长远大于中心质量的半径,且施瓦西场为弱场的情况下,粒子的散射问题已为许多作者计算过,用的是低阶微扰理论和散射场的弱场近似方法. 得到的结果是,标量和矢量粒子的散射遵守卢瑟福角分布,光子的散射截面和点质量牛顿场的散射公式相符(Westerwelt,1971). 在线性施瓦西场背景上计算二阶微扰可以给出光子的偏振效应.

当引力源已坍缩成黑洞时,相互作用势中的后牛顿项对散射图像有影响,这时只考虑线性项是不行的.具有自旋的粒子即使被球对称黑洞散射,也可以引起偏振效应.

黑洞的电荷和角动量强烈地影响对粒子的吸收,这可能与玻色子的极端辐射相联系(Gibbons,1975).费米子在 Kerr-Newman 场中的行为与玻色子的不同,没有极端辐射效应.弱相对论电子被施瓦西小黑洞吸收的截面为标量粒子的$\frac{1}{8}$(Unruh,1976).本章讨论 Reissner-Nordström 黑洞对标量粒子和电子的散射.

1. 标量粒子的波函数

设标量粒子的质量为 μ,电荷为 e.球对称荷电黑洞的引力场度规为(第 1 章 1.3 节):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{7.6.1}$$

式中 M 和 Q 分别为 Reissner-Nordström 黑洞的质量和电荷.系统的拉格朗日具有形式

$$\mathscr{L} = (\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu)\Phi g^{\mu\nu}(\partial_\nu - \mathrm{i}eA_\nu)\Phi^* - \mu^2\Phi\Phi^*. \tag{7.6.2}$$

式中四维势 $A_\mu = (-Q/r,0,0,0)$.Klein-Gordon 方程具有形式:

$$\begin{aligned}&(-g)^{-1/2}\partial_\nu[(-g)^{1/2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu)\Phi \\ &-\mathrm{i}eA^\nu\partial_\nu\Phi - (e^2A_\mu A^\mu - \mu^2)\Phi = 0,\end{aligned} \tag{7.6.3}$$

$$\begin{aligned}&(-g)^{-1/2}\partial_\nu[(-g)^{1/2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu)\Phi^* \\ &+\mathrm{i}eA^\nu\partial_\nu\Phi^* - (e^2A_\mu A^\mu - \mu^2)\Phi^* = 0,\end{aligned} \tag{7.6.4}$$

(7.6.3)和(7.6.4)式的区别只是将 e 换为 $-e$.下面我们研究函数 Φ 的方程.具有能量 ω,轨道角动量 l 和在 z 轴上的投影 m 的态的波函数表示为

$$\Phi_{\omega lm} = \frac{1}{r}R_{\omega l}(r)Y_l^m(\theta,\Phi)e^{\mathrm{i}\omega l},$$

它的径向部分在无限远处是入射波和出射波之和:

$$R_{\omega l} = \exp(-\mathrm{i}\omega\upsilon r - \mathrm{i}\eta\ln 2\omega\upsilon r) + A_l(\omega)\exp(\mathrm{i}\omega\upsilon r + \mathrm{i}\eta\ln 2\omega\upsilon r). \tag{7.6.5}$$

式中,

$$\upsilon = (1 - \mu^2/\omega^2)^{1/2},$$

$$\eta = [\omega M(1 + \upsilon^2) + Z_\alpha]/\upsilon$$

是粒子与黑洞相互作用势中的库仑部分,$Z_\alpha = eQ$.视界面 $r_+^h = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$上的边界条件为

$$R_{\omega l} = \exp[-\mathrm{i}(\omega + Z_\alpha / r_+^h) r^-], \tag{7.6.6a}$$

式中 r^- 由(7.6.6a)式确定:

$$\mathrm{d}r^-/\mathrm{d}r = (1 - 2M/r + Q^2/r^2) - 1. \tag{7.6.6b}$$

出射波振幅 $A_l(\omega)$ 可由这一边界条件确定.

2. 标量粒子的散射和吸收

沿 z 轴传播的粒子流,散射波函数的渐近行为具有形式

$$\Psi = \exp(-\mathrm{i}\omega t)\{\exp[\mathrm{i}\omega\upsilon z - \mathrm{i}\eta \ln \omega\upsilon(r - z)] + [f(\theta)/r]\exp(\mathrm{i}\omega\upsilon r + \mathrm{i}\eta \ln 2\omega\upsilon r)\}. \tag{7.6.7}$$

将弹性散射振幅按本征态分解,得到

$$f(\theta) = \frac{\mathrm{i}}{2\omega\upsilon}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(1-S_l)P_l(\cos\theta),\quad S_l = (-1)^{l+1}A_l. \tag{7.6.8}$$

弹性散射的总截面为

$$\sigma_e = \frac{\pi}{\omega^2\upsilon^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)|1-S_l|^2. \tag{7.6.9}$$

此时吸收总截面表示为

$$\sigma_A = \frac{\pi}{\omega^2\upsilon^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(1-|S_l|^2) = \frac{\pi}{\omega^2\upsilon^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)T_l, \tag{7.6.10}$$

式中 T_l 是局部吸收系数.

3. 慢速标量粒子的散射和吸收

在近似条件下,当 $\mu M \sim |Z_\alpha| \ll 1, \upsilon^2 \ll 1$ 时,再考虑到 $Q \ll M, r_+ \approx 2M, r_- \approx 0$,由径向方程的连接方法得到

$$\begin{aligned} A_l(\omega) &= (-1)^{l+1}\frac{\Gamma(1+l-\mathrm{i}\eta)}{\Gamma(1+l+\mathrm{i}\eta)}\left(1 - \frac{1}{2}T_l\right) \\ &= (-1)^{l+1}S_l^C\left(1 - \frac{T_l}{2}\right). \end{aligned} \tag{7.6.11}$$

式中 $S_l^C(\eta)$ 是散射算符的库仑矩阵元;局部吸收系数 T_l 具有形式:

$$\begin{aligned} T_l(\omega) &= 2\Gamma[2\omega\upsilon(r_+ - r_-)]^{2l+1}\frac{2\pi\eta}{1-\mathrm{e}^{-2\pi\eta}} \\ &\times \frac{(l!)^6}{(2l)!^2(2l+1)!^2}\prod_{k=1}^{l}\left(1 + 4\frac{\Gamma^2}{k^2}\right)\left(1 + \frac{\eta^2}{k^2}\right), \\ \Gamma &\equiv (\omega r_+ + Z_\alpha) r_+ / (r_+ - r_-) \approx 2\omega M + Z_\alpha. \end{aligned} \tag{7.6.12}$$

将 T_0 代入,得到总吸收截面:

$$\sigma_A = \frac{16\pi M^2}{\upsilon^2}\left(1 + \frac{Z_\alpha}{2\omega M}\right)2\pi\omega M$$

$$\times \frac{1+\upsilon^2+Z_\alpha/\omega M}{1-\exp[-2\pi\omega M/\upsilon(1+\upsilon^2+Z_\alpha/\omega M)]}. \tag{7.6.13}$$

当满足极端辐射条件 $Z_\alpha < -2\omega M$ 时,此截面为负的.

弹性散射的振幅具有形式:

$$f(\theta) = f_\eta^C(\theta) + \frac{\mathrm{i}}{4\omega\upsilon}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)T_l S_l^C(\eta)P_l(\cos\theta). \tag{7.6.14}$$

式中 $f_\eta^C(\theta)$ 是弹性散射的库仑振幅:

$$f_l^C(\theta) = \frac{\eta\Gamma(1-\mathrm{i}\eta)}{2\omega\upsilon\Gamma(1+\mathrm{i}\eta)}\frac{\exp[2\mathrm{i}\eta\ln\sin(\theta/2)]}{\sin^2(\theta/2)}. \tag{7.6.15}$$

如果 $(1+\upsilon^2)\omega M+Z_\alpha\neq 0$,只限于 S 波的吸收,我们得到修正后的卢瑟福散射角分布:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_e}{\mathrm{d}\Omega} = M^2\frac{(1+\upsilon^2+Z_\alpha/\omega M)^2}{4\upsilon^4\sin^4(\theta/2)}\left\{1+32\pi\frac{\omega^2M^2\upsilon}{1-\exp(-2\pi\eta)}\right.$$
$$\left.\times\left(1+\frac{Z_\alpha}{2\omega M}\right)\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\left(2\eta\ln\sin\frac{\theta}{2}\right)\right\}. \tag{7.6.16}$$

当 $\eta\approx 0$ 时,牛顿引力与电斥力相抵消,$f_l^C(\theta)\to 0$,弹性散射对角度的依赖关系很弱:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_e}{\mathrm{d}\Omega} \approx 16M^2(2\omega M+Z_\alpha)^2\left[1+\frac{1}{3}(\omega\upsilon M)^2\cos\theta\right]. \tag{7.6.17}$$

4. 电子的散射

本节研究电子在 Reissner-Nordström 黑洞场中的散射和吸收. 由量子电动力学可知,散射幅由系数 A 和 B 确定,A 和 B 的表达式可写为

$$A = \frac{1}{2\mathrm{i}\omega\upsilon}\sum_{l=0}^{\infty}[(l+1)(S_l^- -1)+l(S_l^+ -1)]P_l(\cos\theta),$$

$$B = \frac{1}{2\omega\upsilon}\sum_{l=0}^{\infty}[(S_l^- - S_l^+)]P_l^1(\cos\theta). \tag{7.6.18}$$

式中符号 ± 分别对应于 $k>0$ 和 $k<0$ 的态. 设入射束是非偏振的,微分散射截面(按所有下落粒子的自旋态取平均并按散射流中所有粒子态取和)等于

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_e}{\mathrm{d}\Omega} = |A|^2+|B|^2. \tag{7.6.19}$$

吸收总截面可写为

$$\sigma_A = \frac{\pi}{\omega^2\upsilon^2}\sum_{l=0}^{\infty}[(l+1)(1-|S_l^-|^2)+l(1-|S_l^+|^2)]$$
$$= \frac{\pi}{\omega^2\upsilon^2}\sum_{l=0}^{\infty}[(l+1)T_l^- + lT_l^+]$$

$$= \frac{\pi}{\omega^2 \upsilon^2} \sum_k |k| T_k. \tag{7.6.20}$$

与得到(7.6.11)式的过程类似,得到出射波振幅的表达式:

$$A_l^{\pm}(\omega) \approx (-1)^{l+1} S_l^C(\eta)(1 - T_l^{\pm}/2). \tag{7.6.21}$$

将(7.6.21)式代入(7.6.18)式,得到系数 A 和 B:

$$A = f_\eta^C(\theta) + \frac{\mathrm{i}}{4\omega\upsilon} \sum_{l=0}^{\infty} [(l+1)T_l^- + lT_l^+] S_l^C(\eta) P_l(\cos\theta),$$

$$B = \frac{1}{4\omega\upsilon} \sum_{l=1}^{\infty} (T_l^+ - T_l^-) S_l^C(\eta) P_l^1(\cos\theta). \tag{7.6.22}$$

吸收截面的大小和标量粒子的情况一样,主要由 S-波的吸收来确定:

$$\sigma_A = \frac{\pi M^2}{\upsilon^2}\left(1 + \frac{\mu}{\omega}\right) 2\pi\omega M \times \frac{1 + \upsilon^2 + Z_\alpha/\omega M}{1 - \exp[(-2\pi\omega M/\upsilon)(1 + \upsilon^2 + Z_\alpha/\omega M)]}. \tag{7.6.23}$$

显然,σ_A 随着静电引力的增大而增大. 在所讨论的近似条件下,确定偏振效应的系数 B 只是由于吸收才不等于零. 由于吸收的结果,散射束是偏振的,偏振矢量垂直于散射平面. 如果只限于 $P_{\frac{1}{2}}$波的贡献,可以得到散射粒子的偏振矢量:

$$\boldsymbol{P} = -4\pi \frac{(1 - \mu/\omega)(\omega M)^2 \upsilon}{1 - \exp(-2\pi\eta)} \sin^3\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} \left[(\eta^2 - 1) \times \cos\left(2\eta \ln\sin\frac{\theta}{2}\right) + 2\eta \sin\left(2\eta \ln\sin\frac{\theta}{2}\right)\right] \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}' \tag{7.6.24}$$

(7.6.24)式表明,偏振度 $\Delta(\theta)$ 是角的振荡函数,当 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 时 $\Delta = 0$. 如果 $\eta \gg 1$,即 $1 \gg \omega M \gg \upsilon$, $\upsilon \to 0$,则偏振矢量的模很小($\sim \omega^4 M^4$). 但当 $\upsilon \gg \omega M$ 时,它基本上与 ωM 成正比. 因此,黑洞视界可看做“起偏器”. 还可以得到含有吸收效应的电子的微分散射截面

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_e}{\mathrm{d}\Omega} = M^2 \frac{(1 + \upsilon^2 + Z_\alpha/\omega M)^2}{4\upsilon^4 \sin^4(\theta/2)} \left[1 + 2\pi(1 + \mu/\omega) \times \frac{\omega^2 M^2 \upsilon}{1 - \exp(-2\pi\eta)} \sin^2\frac{\theta}{2} \sin\left(2\eta \ln\sin\frac{\theta}{2}\right)\right]. \tag{7.6.25}$$

这里没考虑相对论效应.

5. 中微子的散射和吸收

前几节中的结果可用来研究无质量的自旋为 0 和$\frac{1}{2}$的粒子的散射和吸收过程,近似条件是 $\omega M \ll 1$. 对于中微子,除令 $\mu \to 0$ 以外,还要令 $e \to 0$. 我们得到中微子的微分散射截面

$$\frac{d\sigma_e}{d\Omega} = M^2\sin^{-4}\frac{\theta}{2}\left[1 + \frac{1}{4}\omega M\sin^2\theta\sin\left(4\omega M\ln\sin\frac{\theta}{2}\right)\right], \tag{7.6.26}$$

散射中微子的偏振度

$$\Delta(\theta) = \omega M\sin^3\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\left(4\omega M\ln\sin\frac{\theta}{2}\right). \tag{7.6.27}$$

由前边所得结果还可以求出中微子的吸收截面：

$$\sigma_A = (\pi/\omega^2)(T_0^- + T_1^+) = 2\pi M^2. \tag{7.6.28}$$

7.7 克尔-纽曼-德西特黑洞和中微子波

1. 黑洞微扰理论

如果黑洞的视界外面存在电磁场或中微子场,则这些物质场通过它们的能-动张量影响黑洞的空时度规;同时,黑洞的度规(引力场)又将作用于物质场.在通常情况下,电磁场或中微子场的强度是一阶无穷小量,能-动张量是二阶无穷小量.因此,若只保留一阶小量,则黑洞外物质的作用可略去,只剩下引力场(度规)对物质场的作用,此时可把物质场看做试验粒子场.这一类微扰理论称为引力场的半径典量子理论,或称为弯曲空时量子理论.关于黑洞的微扰理论已为 S. Chandrasekhar (1983)系统给出.黑洞微扰理论的数学工具是 Newman-Penrose 的旋系数和零标架方法.

黑洞微扰理论中的一个内容就是计算物质波的反射系数和入射系数.

Chandrasekhar(1977)计算了 Kerr 空时中的中微子波.

Khanal(1985)计算了 Kerr-de Sitter 空时中的中微子波.

在本节中我们讨论了 Kerr-Newman-de Sitter 空时中的中微子波(分静止质量为零和不为零两种情况),计算反射系数和入射系数.我们发现 Kerr-Newman-de Sitter 黑洞的有效势大于 Kerr-de Sitter 黑洞的有效势.

2. 狄拉克方程

在弯曲空时中,中微子的旋坐标形式的场方程为(Teukolsky,1973)

$$\nabla_{A\dot{B}}P^A = 0, \tag{7.7.1}$$

$$\nabla_{A\dot{B}}Q^A = 0, \tag{7.7.2}$$

这里 P^A 和 Q^A 是两个二分量旋量,∇_{AB} 是旋协变微分.

用旋标架表示的 Dirac 方程为

$$\nabla_{a\dot{b}}P^a = 0, \tag{7.7.3}$$

$$\nabla_{a\dot{b}}Q^a = 0, \tag{7.7.4}$$

在 Boyer-Lindquist 坐标系中 Kerr-Newman-de Sitter 度规具有形式：

$$
\begin{aligned}
ds^2 = &\frac{1}{\rho^2\Sigma^2}(\Delta_r - \Delta_\theta a^2\sin^2\theta)dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta_r}dr^2 - \frac{\rho^2}{\Delta\theta}d\theta^2 \\
&- \frac{1}{\rho^2\Sigma^2}[\Delta_\theta(r^2 + a^2)^2 - \Delta_r a^2\sin^2\theta]\sin^2\theta d\varphi^2 \\
&+ \frac{2a}{\rho^2\Sigma}[\Delta_\theta(r^2 + a^2) - \Delta_r]\sin^2\theta dt d\varphi.
\end{aligned}
\tag{7.7.5}
$$

式中，

$$
\begin{aligned}
&\bar{\rho} = r + ia\cos\theta, \rho^2 = \bar{\rho}\bar{\rho}^*, \\
&\Delta_r = (r^2 + a^2)\left(1 - \frac{\lambda}{3}r^2\right) - 2Mr + Q^2, \\
&\Delta_\theta = 1 + \frac{1}{3}\lambda a^2\cos^2\theta, \\
&\Sigma = 1 + \frac{1}{3}\lambda a^2.
\end{aligned}
\tag{7.7.6}
$$

度规张量的逆变分量为

$$
g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix}
\frac{\Sigma^2}{\rho^2}\left[\frac{(r^2+a^2)^2}{\Delta_r} - \frac{a^2\sin^2\theta}{\Delta_\theta}\right] & 0 & 0 & \frac{a^2\Sigma^2}{\rho^2}\left(\frac{r^2+a^2}{\Delta_r} - \frac{1}{\Delta_\theta}\right) \\
0 & -\frac{\Delta_r}{\rho^2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{\Delta_\theta}{\rho^2} & 0 \\
\frac{a^2\Sigma^2}{\rho^2}\left(\frac{r^2+a^2}{\Delta_r} - \frac{1}{\Delta_\theta}\right) & 0 & 0 & -\frac{\Sigma^2}{\rho^2\sin^2\theta}\left(\frac{1}{\Delta_\theta} - \frac{a^2\sin^2\theta}{\Delta_r}\right)
\end{bmatrix}
\tag{7.7.7}
$$

选取零标架

$$
\begin{aligned}
&l^\mu = \left[\frac{(r^2 + a^2)\Sigma}{\Delta_r}, 1, 0, \frac{a\Sigma}{\Delta_r}\right], \\
&n^\mu = \frac{1}{2\rho^2}[\Sigma(r^2 + a^2), -\Delta_r, 0, a\Sigma], \\
&m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2\Delta_\theta}\,\bar{\rho}}\left[ia\Sigma\sin\theta, 0, \Delta_\theta, \frac{i\Sigma}{\sin\theta}\right],
\end{aligned}
\tag{7.7.8}
$$

则 Dirac 方程(7.3)，(7.4)式化为四个耦合方程：

$$
\begin{aligned}
&(D + \varepsilon - \rho)F_1 + (\bar{\delta} + \pi - a)F_2 = 0, \\
&(\Delta + \mu - r)F_2 + (\delta + \beta - \tau)F_1 = 0, \\
&(D + \varepsilon^* - \rho^*)G_2 - (\delta + \pi^* - a^*)G_1 = 0, \\
&(\Delta + \mu^* - r^*)G_1 - (\bar{\delta} + \beta^* - \tau^*)G_2 = 0.
\end{aligned}
\tag{7.7.9}
$$

式中，

$$F_1 = P^0,\quad F_2 = P^1,\quad G_1 = \bar{Q}^{\dot{1}},\quad G_2 = -\bar{Q}^{\dot{0}},$$
$$D = l^{\mu}\partial_{\mu} = \partial_{0\dot{0}},\quad \Delta = n^{\mu}\partial_{\mu} = \partial_{1\dot{1}},$$
$$\delta = m^{\mu}\partial_{\mu} = \partial_{0\dot{1}},\quad \bar{\delta} = \bar{m}^{\mu}\partial_{\mu} = \partial_{1\dot{0}},$$
$$\rho = -\frac{1}{\bar{\rho}^*},\quad \tau = -\frac{\mathrm{i}a\sqrt{\Delta_\theta}\sin\theta}{\sqrt{2}\rho^2},$$
$$\mu = -\frac{\Delta_r}{2\rho^2\bar{\rho}^*},\quad \beta = \frac{1}{2\sqrt{2}\bar{\rho}\sin\theta}\frac{\mathrm{d}(\sqrt{\Delta_\theta}\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta},$$
$$r = \frac{1}{4\rho^2}\frac{\mathrm{d}\Delta_r}{\mathrm{d}r} + \mu,\quad \pi = \frac{\mathrm{i}a\sqrt{\Delta_\theta}\sin\theta}{\sqrt{2}(\bar{\rho}^*)^2},$$
$$a = \pi - \rho^*$$

经过下述三个变换，(沈有根，1985)：

(1) $F_1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{im\varphi}f_1(r,\theta)$,

$F_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{im\varphi}f_2(r,\theta)$,

$G_1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{im\varphi}g_1(r,\theta)$,

$G_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{im\varphi}g_2(r,\theta)$, (7.7.10)

(2) $U_1(r,\theta) = \bar{\rho}^* f_1(r,\theta)$, $U_2(r,\theta) = f_2(r,\theta)$,

$V_1(r,\theta) = g_1(r,\theta)$, $V_2(r,\theta) = \bar{\rho}g_2(r,\theta)$, (7.7.11)

(3) $U_1 = R_{-\frac{1}{2}}(r)S_{-\frac{1}{2}}(\theta)$, $U_2 = R_{+\frac{1}{2}}(r)S_{+\frac{1}{2}}(\theta)$,

$V_1 = R_{+\frac{1}{2}}(r)S_{-\frac{1}{2}}(\theta)$, $V_2 = R_{-\frac{1}{2}}(r)S_{+\frac{1}{2}}(\theta)$. (7.7.12)

(7.7.9)式化为

$$\mathscr{D}_0 R_{-\frac{1}{2}}S_{-\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{\Delta_\theta}{2}}\mathscr{L}_{\frac{1}{2}}R_{+\frac{1}{2}}S_{+\frac{1}{2}} = 0,$$
$$\Delta_r\mathscr{D}^{\dagger}_{\frac{1}{2}}R_{+\frac{1}{2}}S_{+\frac{1}{2}} - \sqrt{2\Delta_\theta}\mathscr{L}^{\dagger}_{\frac{1}{2}}R_{-\frac{1}{2}}S_{-\frac{1}{2}} = 0,$$
$$\mathscr{D}_0 R_{-\frac{1}{2}}S_{+\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{\Delta_\theta}{2}}\mathscr{L}^{\dagger}_{\frac{1}{2}}R_{+\frac{1}{2}}S_{-\frac{1}{2}} = 0,$$
$$\Delta_r\mathscr{D}^{\dagger}_{\frac{1}{2}}R_{+\frac{1}{2}}S_{-\frac{1}{2}} + \sqrt{2\Delta_\theta}\mathscr{L}^{\dagger}_{\frac{1}{2}}R_{-\frac{1}{2}}S_{+\frac{1}{2}} = 0. \tag{7.7.13}$$

式中，

$$\mathscr{D}_n = \partial_r - \frac{\mathrm{i}\Sigma K}{\Delta_r} + \frac{n}{\Delta_r}\frac{\mathrm{d}\Delta_r}{\mathrm{d}r},$$
$$\mathscr{D}^{+}_n = \partial_r + \frac{\mathrm{i}\Sigma K}{\Delta_r} + \frac{n}{\Delta_r}\frac{\mathrm{d}\Delta_r}{\mathrm{d}r},$$

$$\mathscr{L}_n = \partial_\theta - \frac{\Sigma H}{\Delta_\theta} + \frac{n}{\sqrt{\Delta_\theta}\sin\theta}\frac{\mathrm{d}(\sqrt{\Delta_\theta}\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta},$$

$$\mathscr{L}_n^+ = \partial_\theta + \frac{\Sigma H}{\Delta_\theta} + \frac{n}{\sqrt{\Delta_\theta}\sin\theta}\frac{\mathrm{d}(\sqrt{\Delta_\theta}\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta},$$

$$K = (r^2 + a^2)\omega - am,$$

$$H = a\omega\sin\theta - \frac{m}{\sin\theta}. \tag{7.7.14}$$

分离变量得

$$\mathscr{D}_0 R_{-\frac{1}{2}} = \lambda_1 R_{+\frac{1}{2}}, \qquad \sqrt{\frac{\Delta_\theta}{2}}\mathscr{L}_{\frac{1}{2}} S_{+\frac{1}{2}} = -\lambda_1 S_{-\frac{1}{2}},$$

$$\Delta_r \mathscr{D}_{1/2}^+ R_{+\frac{1}{2}} = \lambda_2 R_{-\frac{1}{2}}, \qquad \sqrt{2\Delta_\theta}\mathscr{L}_{1/2}^+ S_{-\frac{1}{2}} = \lambda_2 S_{+\frac{1}{2}},$$

$$\mathscr{D}_0 R_{-\frac{1}{2}} = \lambda_3 R_{+\frac{1}{2}}, \qquad \sqrt{\frac{\Delta_\theta}{2}}\mathscr{L}_{\frac{1}{2}}^+ S_{-\frac{1}{2}} = \lambda_3 S_{+\frac{1}{2}},$$

$$\Delta_r \mathscr{D}_{1/2}^+ R_{+\frac{1}{2}} = \lambda_4 R_{-\frac{1}{2}}, \qquad \sqrt{2\Delta_\theta}\mathscr{L}_{\frac{1}{2}} S_{+\frac{1}{2}} = -\lambda_4 S_{-\frac{1}{2}}, \tag{7.7.15}$$

这里 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 均为分离变量常数,不难得到

$$\lambda_1 = \lambda_3 = \frac{1}{2}\lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_4 \equiv \lambda. \tag{7.7.16}$$

因此(7.7.15)式成为

$$\mathscr{D}_0 R_{-\frac{1}{2}} = \lambda R_{+\frac{1}{2}},$$

$$\Delta_r \mathscr{D}_{1/2}^+ R_{+\frac{1}{2}} = 2\lambda R_{-\frac{1}{2}}, \tag{7.7.17}$$

$$\Delta_\theta^{1/2}\mathscr{L}_{\frac{1}{2}} S_{+\frac{1}{2}} = -\sqrt{2}\lambda S_{-\frac{1}{2}},$$

$$\Delta_\theta^{1/2}\mathscr{L}_{\frac{1}{2}}^+ S_{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\lambda S_{+\frac{1}{2}}. \tag{7.7.18}$$

记 $\sqrt{2}\lambda$ 为 λ, $\sqrt{2}R_{-\frac{1}{2}}$ 为 $R_{-\frac{1}{2}}$,则(7.7.17)式成为

$$\Delta_r^{1/2}\mathscr{D}_0 R_{-\frac{1}{2}} = \lambda \Delta_r^{1/2} R_{+\frac{1}{2}}, \tag{7.7.19}$$

$$\Delta_r^{1/2}\mathscr{D}_0^+ \Delta_r^{1/2} R_{+\frac{1}{2}} = \lambda R_{-\frac{1}{2}}, \tag{7.7.20}$$

$$\Delta_\theta^{1/2}\mathscr{L}_{\frac{1}{2}} S_{+\frac{1}{2}} = -\lambda S_{-\frac{1}{2}}, \tag{7.7.21}$$

$$\Delta_\theta^{1/2}\mathscr{L}_{\frac{1}{2}}^+ S_{-\frac{1}{2}} = \lambda S_{+\frac{1}{2}}, \tag{7.7.22}$$

令

$$\Delta_r^{1/2} R_{+\frac{1}{2}} = P_{+1/2}, R_{-\frac{1}{2}} = P_{-\frac{1}{2}}, \tag{7.7.23}$$

则(7.7.19)～(7.7.22)式化为

$$\Delta_r^{1/2}\mathscr{D}_0^+ P_{+\frac{1}{2}} = \lambda R_{-\frac{1}{2}}, \quad \Delta_r^{1/2}\mathscr{D}_0 P_{-\frac{1}{2}} = \lambda R_{\frac{1}{2}}, \tag{7.7.24}$$

$$\Delta_r^{1/2}\mathscr{L}_{\frac{1}{2}}S_{+\frac{1}{2}} = -\lambda S_{-}\frac{1}{2},\quad \Delta_\theta^{1/2}\mathscr{L}^{+}_{1/2}S_{-\frac{1}{2}} = \lambda S_{+\frac{1}{2}}. \tag{7.7.25}$$

我们把径向方程化为一维波动方程.为此,引进缓变(tortoise)坐标 r_*,其微分表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*} = \frac{\Delta_r \mathrm{d}}{\bar{\omega}^2\mathrm{d}r}, \tag{7.7.26}$$

式中,

$$\bar{\omega}^2 = r^2 + \alpha^2, \alpha^2 = a^2 - \frac{am}{\omega}. \tag{7.7.27}$$

令

$$\mathscr{D}_0 = \frac{\bar{\omega}^2}{\Delta_r}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*} + \mathrm{i}\sigma\right), \tag{7.7.28}$$

其中

$$\sigma = -\Sigma\omega, \tag{7.7.29}$$

而

$$\mathscr{D}_0^{+} = \frac{\bar{\omega}^2}{\Delta_r}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*} - \mathrm{i}\sigma\right), \tag{7.7.30}$$

因此由(5.2.24)式得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*} - \mathrm{i}\sigma\right)P_{+\frac{1}{2}} = \lambda\frac{\Delta_r^{1/2}}{\bar{\omega}^2}P_{-\frac{1}{2}}, \tag{7.7.31}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*} + \mathrm{i}\sigma\right)P_{-\frac{1}{2}} = \lambda\frac{\Delta_r^{1/2}}{\bar{\omega}^2}P_{+\frac{1}{2}}. \tag{7.7.32}$$

设

$$Z_{\pm} = P_{+\frac{1}{2}} \pm P_{-\frac{1}{2}}, \tag{7.7.33}$$

由(5.2.31)和(5.2.32)式得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*} - \lambda\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{\bar{\omega}^2}\right)Z_{+} = \mathrm{i}\sigma Z_{-}, \tag{7.7.34}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*} + \lambda\frac{\Delta_r^{\frac{1}{2}}}{\bar{\omega}^2}\right)Z_{-} = \mathrm{i}\sigma Z_{+}. \tag{7.7.35}$$

由(7.7.34)和(7.7.35)式,我们得到波动方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*^2} + \sigma^2\right)Z_{\pm} = V_{\pm}Z_{\pm}, \tag{7.7.36}$$

式中

$$V_{\pm} = \lambda^2\frac{\Delta_r}{\bar{\omega}^4} \pm \lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}\left(\frac{\Delta_r^{1/2}}{\bar{\omega}^2}\right). \tag{7.7.37}$$

3. 反射系数和入射系数

对于 Kerr-de Sitter 黑洞

$$\Delta_1 = (r^2 + a^2)(1 - \frac{1}{3}\lambda r^2) - 2Mr, \tag{7.7.38}$$

$$\bar{\omega}_1^2 = r^2 + a^2 - \frac{am}{\omega}. \tag{7.7.39}$$

对于 Kerr-Newman-de Sitter 黑洞

$$\Delta_2 = (r^2 + a^2)\left[1 - \frac{1}{3}\lambda r^2\right] - 2Mr + Q^2, \tag{7.7.40}$$

$$\bar{\omega}_2^2 = r^2 a^2 - \frac{am}{\omega}. \tag{7.7.41}$$

由此我们得到

$$V_{\pm(1)} < V_{\pm(2)}. \tag{7.7.42}$$

当$\frac{1}{\lambda} \gg M^2 > a^2$时,$\Delta_r = 0$有四个实根,记为$r_{++}, r_+, r_-, r_{--}$. r_{++}表示宇宙视界,r_+表示黑洞视界,r_-表示黑洞内视界,r_{--}表示宇宙内视界.

令

$$\omega_+ = \frac{am}{r_+^2 + a^2}, \omega_- = \frac{am}{r_{++}^2 + a^2}, \omega_c = \frac{m}{a}.$$

显然有

$$r_+ \leqslant r \leqslant r_{++}.$$

当$\omega > \omega_c$,有$a^2 > 0$,则

$$Z_\pm \to \frac{dZ_\mp}{i\sigma dr^*}(当\ r_* \to \pm\infty); \tag{7.7.43}$$

$$Z_+ \to \begin{cases} e^{+i\sigma r^*} + A(\sigma)e^{i-\sigma r_*}(r_* \to +\infty), \\ \qquad B(\sigma)e^{-i\sigma r_*}(r_* \to -\infty); \end{cases} \tag{7.7.44}$$

$$Z_- \to \begin{cases} e^{+i\sigma r^*} - A(\sigma)e^{i-\sigma r_*}(r_* \to +\infty), \\ \qquad B(\sigma)e^{+i\sigma r_*}(r_* \to -\infty). \end{cases} \tag{7.7.45}$$

因此对于势$V_\pm$,反射系数和入射系数为

$$\mathscr{R} = |A(\sigma)|^2, \mathscr{T} = |B(\sigma)|^2, \tag{7.7.46}$$

Khanal(1985)给出

$$\mathscr{R} + \mathscr{T} = 1. \tag{7.7.47}$$

当 $\omega_+ < \omega < \omega_c$,有 $a^2 < 0$,但 $r_+^2 + a^2 > 0$,此时仍有

$$\mathscr{R} + \mathscr{T} = 1. \tag{7.7.48}$$

当 $\omega_- < \omega < \omega_+$,有 $r_+^2 + a^2 < 0$,

$$Z \to \begin{cases} e^{i\sigma r_*} + Ae^{-i\sigma r_*}, & r \to r_{++}; \\ Be^{i\sigma r_*}, & r \to r_+, \end{cases} \tag{7.7.49}$$

Khanal 给出

$$\mathscr{R} = 1 + \mathscr{T}, \tag{7.7.50}$$

式中,$\mathscr{R} = |A|^2$,$\mathscr{T} = |B|^2$.

4. 中微子波

根据宇宙学的考虑,中微子静质量可能不为零. Lyubimov 等(1980)和 Reines 等(1980)的实验似乎也支持了这一点.

设中微子静质量为 μ. 与上节类似,我们有

$$\left(\frac{d}{dr_*} - i\sigma\right)P_{+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta_r^{1/2}}{\bar{\omega}^2}(\lambda - i\mu r)P_{-\frac{1}{2}}, \tag{7.7.51}$$

$$\left(\frac{d}{dr_*} + i\sigma\right)P_{-\frac{1}{2}} = \frac{\Delta_r^{1/2}}{\bar{\omega}^2}(\lambda + i\mu r)P_{+\frac{1}{2}}, \tag{7.7.52}$$

设

$$\theta = \arctan\frac{\mu r}{\lambda}, \tag{7.7.53}$$

则

$$\lambda \pm i\mu r = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 r^2}\, e^{\pm i\theta}. \tag{7.7.54}$$

于是(7.7.51)和(7.7.52)式可写为

$$\left(\frac{d}{dr^*} - i\sigma\right)P_{+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta_r^{1/2}}{\bar{\omega}^2}(\lambda^2 + \mu^2 r^2)^{1/2}P_{-\frac{1}{2}}\exp\left[-i\arctan\left(\frac{\mu r}{\lambda}\right)\right],$$

$$\left(\frac{d}{dr^*} + i\sigma\right)P_{-\frac{1}{2}} = \frac{\Delta_r^{1/2}}{\bar{\omega}^2}(\lambda^2 + \mu^2 r^2)^{1/2}P_{+\frac{1}{2}}\exp\left[+i\arctan\left(\frac{\mu r}{\lambda}\right)\right]. \tag{7.7.55}$$

令

$$P_{+\frac{1}{2}} = \psi_{+\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2}i\arctan\left(\frac{\mu r}{\lambda}\right)\right],$$

$$P_{-\frac{1}{2}} = \psi_{-\frac{1}{2}}\exp\left[+\frac{1}{2}i\arctan\left(\frac{\mu r}{\lambda}\right)\right], \tag{7.7.56}$$

则我们有

$$\frac{d\psi_{+\frac{1}{2}}}{dr_*} - i\sigma\left(1 + \frac{\Delta_r}{\bar{\omega}^2}\frac{\lambda\mu}{2\sigma}\frac{1}{\lambda^2 + \mu^2\lambda^2}\right)\psi_{+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\Delta_r^{1/2}}{\bar{\omega}^2}(\lambda^2 + \mu^2 r^2)^{\frac{1}{2}}\psi_{-\frac{1}{2}}, \tag{7.7.57}$$

$$\frac{d\psi_{-\frac{1}{2}}}{dr_*} + i\sigma\left[1 + \frac{\Delta_r}{\bar{\omega}^2}\frac{\lambda\mu}{2\sigma}\frac{1}{\lambda^2 + \mu^2\lambda^2}\right]\psi_{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\Delta_r^{1/2}}{\bar{\omega}^2}(\lambda^2 + \mu^2 r^2)^{\frac{1}{2}}\psi_{+\frac{1}{2}}. \tag{7.7.58}$$

引进坐标变换

$$\hat{r}_* = r_* + \frac{1}{2\sigma}\arctan\frac{\mu r}{\lambda}, \tag{7.7.59}$$

(7.7.59)式微分表达式为

$$d\hat{r}_* = \left[1 + \frac{\Delta_r}{\bar{\omega}^2}\frac{\lambda\mu}{2\sigma}\frac{1}{\lambda^2 + \mu^2 r^2}\right]dr_*. \tag{7.7.60}$$

由(7.7.56)和(7.7.60)式我们有

$$\left[\frac{d}{d\hat{r}_*} - i\sigma\right]\psi_{+\frac{1}{2}} = W\psi_{-\frac{1}{2}}, \tag{7.7.61}$$

$$\left[\frac{d}{d\hat{r}_*} + i\sigma\right]\psi_{-\frac{1}{2}} = W\psi_{+\frac{1}{2}}, \tag{7.7.62}$$

式中

$$W = \frac{\Delta_r^{1/2}(\lambda^2 + \mu^2 r^2)^{3/2}}{\bar{\omega}^2(\lambda^2 + \mu^2\gamma^2) + \frac{\lambda\mu\Delta_r}{2\sigma}}, \tag{7.7.63}$$

令

$$Z_\pm = \psi_{+\frac{1}{2}} \pm \psi_{-\frac{1}{2}}, \tag{7.7.64}$$

由(7.7.61)和(7.7.62)式可得

$$\left[\frac{d}{d\hat{r}_*} - W\right]Z_+ = i\sigma Z_-, \tag{7.7.65}$$

$$\left[\frac{d}{d\hat{r}_*} + W\right]Z_- = i\sigma Z_+, \tag{7.7.66}$$

将(7.7.65)和(7.7.66)式化成二阶微分方程,得到

$$\left[\frac{d^2}{d\hat{r}_*^2} + \sigma^2\right]Z_\pm = V_\pm Z_\pm. \tag{7.7.67}$$

式中,

$$V_\pm = W^2 \pm \frac{dW}{d\hat{r}_*} = \frac{\Delta_r^{1/2}(\lambda^2 + \mu^2 r^2)^{3/2}}{\left[\bar{\omega}^2(\lambda^2 + \mu^2 r^2) + \frac{\lambda\mu\Delta_r}{2\sigma}\right]^2}$$

$$\times\left\{\Delta_r^{1/2}(\lambda^2+\mu^2r^2)^{3/2}\pm\left[\frac{1}{2}(\lambda^2+\mu^2r^2)\frac{\mathrm{d}\Delta_r}{\mathrm{d}r}+3\mu^2r\Delta r\right]\right\}$$
$$\mp\frac{\Delta_r^{3/2}(\lambda^2+\mu^2r^2)^{5/2}}{\left[\bar{\omega}^2(\lambda^2+\mu^2r^2)+\frac{\Delta\mu\lambda}{2\sigma}\right]^3}\left[2r(\lambda^2+\mu^2r^2)+2\mu^2\bar{\omega}^2r+\frac{\lambda\mu\mathrm{d}\Delta_r}{2\sigma\mathrm{d}r}\right].$$
(7.7.68)

7.8 黑洞的表面几何效应

本节讨论黑洞表面几何效应.

1. 荷电匀加速动态黑洞的表面几何

荷电直线匀加速动态黑洞的时空线元:

$$\mathrm{d}s^2=g_{00}\mathrm{d}v^2+2g_{01}\mathrm{d}v\mathrm{d}r+2g_{02}\mathrm{d}v\mathrm{d}\theta+g_{22}\mathrm{d}\theta^2+g_{33}\mathrm{d}\varphi^2. \tag{7.8.1}$$

其中度规的各分量为

$$\begin{cases} g_{00}=1-\dfrac{2m}{r}+\dfrac{Q^2}{r^2}-2ar\cos\theta-4a\dfrac{Q^2}{r}\cos\theta-a^2r^2\sin^2\theta,\\ g_{01}=-1,\quad g_{02}=ar^2\sin\theta,\\ g_{22}=-r^2,\quad g_{33}=-r^2\sin^2\theta. \end{cases} \tag{7.8.2}$$

为了方便,(7.8.1)式中直接采用了超前爱丁顿坐标. 参量 $m=m(v)$, $Q=Q(v)$ 分别是黑洞的质量和所带电荷. a 为直线加速度的大小,它是一个常量. 根据(7.8.1),(7.8.2)两式,我们即可讨论该黑洞时空的三种类视界超曲面.

时空(7.8.2)式的类时极限面满足条件:

$$g_{vv}=g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^b=0, \tag{7.8.3}$$

即

$$1-\frac{2m}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-2ar\cos\theta-4a\frac{Q^2}{r}\cos\theta-a^2r^2\sin^2\theta=0, \tag{7.8.4}$$

$$r^4+\frac{2a\cos\theta}{a^2\sin^2\theta}r^3-\frac{1}{a^2\sin^2\theta}r^2+\frac{2m+4aQ^2\cos\theta}{a^2\sin^2\theta}r-\frac{Q^2}{a^2\sin^2\theta}=0. \tag{7.8.5}$$

方程(7.8.4)的有物理意义的三个根为

$$r_{\mathrm{TLS}_1}=\frac{1}{2}(-D+E+R)-\frac{a\cos\theta}{2a^2\sin^2\theta}, \tag{7.8.6}$$

$$r_{\mathrm{TLS}_2}=\frac{1}{2}(D-E+R)-\frac{a\cos\theta}{2a^2\sin^2\theta}, \tag{7.8.7}$$

$$r_{\mathrm{TLS}_3} = \frac{1}{2}(D + E - R) - \frac{a\cos\theta}{2a^2\sin^2\theta}. \tag{7.8.8}$$

其中,

$$D = \frac{1}{a\sin\theta}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cot^2\theta - \alpha\cos\left(\frac{\varphi}{3} - \frac{\pi}{3}\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{7.8.9}$$

$$E = \frac{1}{a\sin\theta}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cot^2\theta - \alpha\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{7.8.10}$$

$$R = \frac{1}{a\sin\theta}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cot^2\theta - \alpha\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{7.8.11}$$

其中,

$$\alpha = \left[3\cot^4\theta + 4\cot^2\theta + \frac{8}{9} + 16ma\cos\theta + 16a^2Q^2(1 + \cos^2\theta)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{\beta}{\alpha^3}\right).$$

在 $0<\varphi<\pi$ 范围内,有

$$\beta = 4a^6\sin^6\theta f,$$

$$\begin{aligned} f = {} & \frac{7}{216}\frac{(2 + \cos^2\theta)^3}{a^6\sin^{12}\theta} + \frac{2 + \cos^2\theta}{6a^2\sin^4\theta}\left[\frac{3}{4}\left(\frac{a\cos\theta}{a^2\sin^2\theta}\right)^4 + \left(\frac{a\cos\theta}{a^4\sin^4\theta}\right)^3\right. \\ & \left. + 4ma\cos\theta + 4a^2Q^2(1 + \cos^2\theta)\right] - \left[\left(\frac{a\cos\theta}{a^2\sin^2\theta}\right)^3 + \frac{a\cos\theta}{a^4\sin^4\theta}\right. \\ & \left. + \frac{2m}{a^2\sin^2\theta} + \frac{4aQ^2\cos\theta}{a^2\sin^2\theta}\right]^2, \end{aligned} \tag{7.8.12}$$

由 D,E,R 的大小我们可判断出:

$$r_{\mathrm{TLS}_1} > r_{\mathrm{TLS}_2} > r_{\mathrm{TLS}_3}.$$

下面对 $m=0,Q=0$ 和 $a=0$ 两种特殊情况做一分析.

(1) $m=0,Q=0$ 的情况.

此时(7.8.4)式简化为

$$a^2\sin^2\theta r^2 + 2a\cos\theta r - 1 = 0, \tag{7.8.13}$$

解之得 Rindler 类时极限面为

$$r = \frac{1}{a(1 + \cos\theta)}. \tag{7.8.14}$$

(2) 当 $a=0$ 即对于无加速动态惯性黑洞,有

$$r^2 - 2mr + Q^2 = 0, \tag{7.8.15}$$

解之得

$$r_{\mathrm{TLS}}^{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - Q^2}. \tag{7.8.16}$$

此式表明,在这种特殊情况下匀加速荷电动态黑洞的外部度规退化为 Vaidya-Bonner 度规. 若

（i）此时为蒸发黑洞,即 $\dot{m}=\frac{dm}{dv}<0$（设 $Q=\text{const.}$）,则

$$\dot{r}^{+}_{\text{TLS}}=\frac{dr^{+}}{dv}=\left(1+\frac{m}{\sqrt{m^2-Q^2}}\right)\dot{m}<0\text{（收缩态）}, \tag{7.8.17}$$

$$\dot{r}^{-}_{\text{TLS}}=\frac{dr^{-}}{dv}=\left(1-\frac{m}{\sqrt{m^2-Q^2}}\right)\dot{m}>0\text{（扩张态）}. \tag{7.8.18}$$

即在蒸发状态下,黑洞的外类时极限面处于收缩状态,内类时极限面处于扩张态. 其结果将导致内外类时极限面间的距离变小.

对于吸积黑洞 $\dot{m}=\frac{dm}{dv}>0$,则有相反结论.

（ii）对于正在吸收电荷的黑洞,即 $\dot{Q}=\frac{dQ}{dv}>0$（设 $m=\text{const.}$）,则

$$\dot{r}^{\pm}_{\text{TLS}}=\mp\frac{Q\dot{Q}}{\sqrt{m^2-Q^2}},$$

即

$$\dot{r}^{+}_{\text{TLS}}=-\frac{Q\dot{Q}}{\sqrt{m^2-Q^2}}<0\quad\text{（收缩态）}, \tag{7.8.19}$$

$$\dot{r}^{-}_{\text{TLS}}=+\frac{Q\dot{Q}}{\sqrt{m^2-Q^2}}>0\quad\text{（扩张态）}. \tag{7.8.20}$$

不难看出,动态黑洞吸收物质和吸收电荷产生的结果是相反的. 吸收电荷的黑洞,其外类时极限面不断收缩,而内类时极限面不断扩大,释放电荷的情况相反.

两种吸收都存在时,我们有

$$\dot{r}^{\pm}_{\text{TLS}}=\frac{dr^{\pm}}{dv}=\dot{m}\pm\frac{m\dot{m}-Q\dot{Q}}{\sqrt{m^2-Q^2}}, \tag{7.8.21}$$

如果

$$\frac{\dot{m}}{\dot{Q}}=\frac{Q}{m+\sqrt{m^2-Q^2}}, \tag{7.8.22}$$

则有

$$\dot{r}^{+}_{\text{TLS}}=0. \tag{7.8.23}$$

这表明,当满足条件(7.8.22)时,黑洞的外类时极限面处于动态平衡状态.

如果满足条件:

$$\frac{\dot{m}}{\dot{Q}}=\frac{Q}{m-\sqrt{m^2-Q^2}}, \tag{7.8.24}$$

则有

$$\dot{\bar{r}}_{\text{TLS}} = 0. \tag{7.8.25}$$

此时黑洞的内类时极限面处于动态平衡状态.

为了求出短程线汇的膨胀 Θ,引入零标架是方便的. 由(7.8.2)式可得

$$g = -r^4\sin^2\theta, \tag{7.8.26}$$

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & g^{11} & -a\sin\theta & 0 \\ 0 & -a\sin\theta & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}, \tag{7.8.27}$$

$$g^{11} = -1 + \frac{2m}{r} - \frac{Q^2}{r^2} + 2ar\cos\theta + 4a\frac{Q^2}{r}\cos\theta;$$

$$\begin{cases} l_\mu = (1,0,0,0), \\ n_\mu = \left(\frac{1}{2}g_{00}, -1, r^2 a\sin\theta, 0\right), \\ m_\mu = \left(-\frac{r}{\sqrt{2}}\right)(0,0,1,\mathrm{i}\sin\theta), \\ \bar{m}_\mu = \left(-\frac{r}{\sqrt{2}}\right)(0,0,1,-\mathrm{i}\sin\theta). \end{cases} \tag{7.8.28}$$

利用逆变度规升降指标得到逆变零标架为

$$\begin{cases} l^\mu = (0,-1,0,0), \\ n^\mu = \left(1,\frac{1}{2}g_{00},0,0\right), \\ m^\mu = \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)(0,a\sin\theta,r^{-2},\mathrm{i}r^{-2}\sin^{-1}\theta), \\ \bar{m}^\mu = \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)(0,a\sin\theta,r^{-2},-\mathrm{i}r^{-2}\sin^{-1}\theta). \end{cases} \tag{7.8.29}$$

经验证(7.8.28),(7.8.29)式满足零标架条件、伪正交条件及度规条件:

$$\begin{cases} l_\mu l^\mu = n_\mu n^\mu = m_\mu m^\mu = \bar{m}_\mu \bar{m}^\mu = 0, \\ n_\mu l^\mu = -m_\mu \bar{m}^\mu = 1, \\ l_\mu m^\mu = l_\mu \bar{m}^\mu = n_\mu m^\mu = n_\mu \bar{m}^u = 0, \\ g_{\mu\nu} = l_\mu n_\nu + n_\mu l_\nu - m_\mu \bar{m}_\nu - \bar{m}_\mu n_\nu, \end{cases} \tag{7.8.30}$$

而线汇的膨胀 Θ 为

$$\Theta = n^\mu{}_{;\mu} - \kappa, \quad \kappa = n_{\mu;\nu} l^\mu n^\nu. \tag{7.8.31}$$

经计算可得

$$\kappa = +\frac{m}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} - a\cos\theta + 2a\frac{Q^2}{r^2}\cos\theta - a^2 r\sin^2\theta, \tag{7.8.32}$$

$$\Theta = \frac{1}{r} - \frac{2m}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} - 2a\cos\theta - 4a\frac{Q^2}{r^2}\cos\theta - a^2 r\sin^2\theta. \tag{7.8.33}$$

由定义 $\Theta=0$ 知(7.8.31)式即为

$$g_{00} = 0, \tag{7.8.34}$$

故此荷电加速动态黑洞的表观视界与类时极限面相重合,因而前面关于类时极限面的讨论均适用于表观视界.

为了确定动态时空中事件视界,可采用 York 的定义,把 $L=-\dot{m}$ 作为小量,在一级近似下,事件视界由条件

$$\dot{r}_{\mathrm{EH}} \approx 0, \ddot{r}_{\mathrm{EH}} \approx 0 \tag{7.8.35}$$

确定. 由径向类光短程线

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\upsilon} = n^a \nabla_a = \frac{\partial}{\partial\upsilon} + \frac{1}{2}g_{00}\frac{\partial}{\partial r}$$

得

$$\dot{r} = \frac{1}{2}g_{00}, \tag{7.8.36}$$

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= \frac{\partial}{\partial\upsilon}\dot{r} + \frac{1}{2}g_{00}\frac{\partial}{\partial r}\dot{r}\\ &= -\frac{\dot{m}}{r} + \frac{Q\dot{Q}}{r}\left(\frac{1}{r} - 2a\cos\theta\right) + 2\dot{r}\left(\frac{m}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} - a\cos\theta\right.\\ &\quad\left. + 2a\frac{Q^2}{r^2}\cos\theta - a^2 r\sin^2\theta\right).\end{aligned} \tag{7.8.37}$$

采用逐次逼近法求事件视界. 令 $\ddot{r}=0$,则由(7.8.35)式得

$$\dot{r} = \frac{\dfrac{\dot{m}}{r} - \dfrac{Q\dot{Q}}{r}\left(\dfrac{1}{r} - 2a\cos\theta\right)}{2\left(\dfrac{m}{r^2} - \dfrac{Q^2}{r^3} - a\cos\theta + 2a\dfrac{Q^2}{r^2} - a^2 r\sin^2\theta\right)}. \tag{7.8.38}$$

由于 r_{AH} 与 r_{EH} 相近,故可令在 $r=r_{\mathrm{AH}}$ 上有

$$\frac{\dfrac{\dot{m}}{r_{\mathrm{AH}}} - \dfrac{Q\dot{Q}}{r_{\mathrm{AH}}}\left(\dfrac{1}{r_{\mathrm{AH}}} - 2a\cos\theta\right)}{2\left(\dfrac{m}{r_{\mathrm{AH}}^2} - \dfrac{Q^2}{r_{\mathrm{AH}}^3} - a\cos\theta + 2a\dfrac{Q^2}{r_{\mathrm{AH}}^2} - a^2 r_{\mathrm{AH}}\sin^2\theta\right)} \equiv A. \tag{7.8.39}$$

(7.8.39)式即

$$\dot{r} = A, \quad 当\ r = r_{\mathrm{AH}}. \tag{7.8.40}$$

由(7.8.40)和(7.8.36)式得到

$$g_{00} - 2A = 0. \tag{7.8.41}$$

此即黑洞的视界表达式. 代入 g_{00},得到

$$a^2\sin^2\theta r^4+2a\cos\theta r^3-(1-2A)r^2+(2m+4aQ^2\cos\theta)r-Q^2=0,$$

即

$$r^4+\frac{2a\cos\theta}{a^2\sin^2\theta}r^3-\frac{(1-2A)r^2}{a^2\sin^2\theta}+\frac{2m+4aQ^2\cos\theta}{a^2\sin^2\theta}r-\frac{Q^2}{a^2\sin^2\theta}=0. \quad (7.8.42)$$

解此代数方程,得到

$$r_{\mathrm{EH}_1}=\frac{1}{2}(-D'+E'+R')-\frac{a\cos\theta}{2a^2\sin^2\theta}, \quad (7.8.43)$$

$$r_{\mathrm{EH}_2}=\frac{1}{2}(D'-E'+R')-\frac{a\cos\theta}{2a^2\sin^2\theta}, \quad (7.8.44)$$

$$r_{\mathrm{EH}_3}=\frac{1}{2}(D'+E'-R')-\frac{a\cos\theta}{2a^2\sin^2\theta}, \quad (7.8.45)$$

式中,

$$D'=\frac{1}{a\sin\theta}\left[\frac{1-2A}{3}+\frac{1}{2}\cot^2\theta-\alpha'\cos\left(\frac{\varphi'}{3}-\frac{\pi}{3}\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \quad (7.8.46)$$

$$E'=\frac{1}{a\sin\theta}\left[\frac{1-2A}{3}+\frac{1}{2}\cot^2\theta-\alpha'\cos\left(\frac{\varphi'}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \quad (7.8.47)$$

$$R'=\frac{1}{a\sin\theta}\left(\frac{1-2A}{3}+\frac{1}{2}\cot^2\theta-\alpha'\cos\frac{\varphi'}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (7.8.48)$$

其中,

$$\alpha'=\Big[3\cot^4\theta+4(1-2A)\cot^2\theta+\frac{8}{9}(1-2A)^2$$
$$+16ma\cos\theta+16a^2Q^2(1+\cos^2\theta)\Big]^{1/2},$$

$$\varphi'=\arccos\left(-\frac{\beta'}{\alpha'^3}\right).$$

在 $0<\varphi'<\pi$ 范围内,$\beta'=4a^6\sin^6\theta f'$,

$$f'=\frac{7}{27}\left(\frac{3}{2}\frac{a^2\cos^2\theta}{a^4\sin^4\theta}+\frac{1-2A}{a^2\sin^2\theta}\right)^3+\left(\frac{a^2\cos^2\theta}{2a^4\sin^4\theta}+\frac{1-2A}{3a^2\sin^2\theta}\right)$$
$$\times\left[\frac{3}{4}\left(\frac{a\cos\theta}{a^2\sin^2\theta}\right)^4+\frac{(1-2A)a^2\cos^2\theta}{a^6\sin^6\theta}+\frac{4ma\cos\theta}{a^4\sin^4\theta}+\frac{4a^2Q^2}{a^4\sin^4\theta}\right.$$
$$\left.\times(1+\cos^2\theta)\right]-\left[\left(\frac{a\cos\theta}{a^2\sin^2\theta}\right)^3+\frac{(1-2A)a\cos\theta}{a^4\sin^4\theta}+\frac{2m}{a^2\sin^2\theta}\right.$$
$$\left.+\frac{4Q^2a\cos\theta}{a^2\sin^2\theta}\right]^2,$$

(7.8.43)~(7.8.45)式即动态匀加速荷电黑洞的三个事件视界的表达式. 其中

(7.8.43)式为 Rindler 事件视界.(7.8.44)和(7.8.45)式分别为外、内视界.

比较 D,E,R 与 D',E',R' 的表达式可知,在动态情况下,匀加速荷电动态黑洞的事件视界与类时极限面及表观视界分开.

(1) 当 $m=0,Q=0$ 时,(7.8.41)式变为

$$a^2\sin^2\theta r^2+2a\cos\theta r-(1-2A)=0, \qquad (7.8.49)$$

解之得

$$r_{\mathrm{H}}=\frac{-\cos\theta\pm(1-A\sin^2\theta)}{a\sin^2\theta},$$

取“+”得到

$$r_{\mathrm{H}}=\frac{1}{a(1+\cos\theta)}-\frac{A}{a}, \qquad (7.8.50)$$

由此可知:动态情况下黑洞的 Rindler 视界与稳态时空的 Rindler 视界相比,其位置向黑洞的中心移动了$\frac{A}{a}$,但形状并未发生改变,仍然是旋转抛物面.因而对于 Rindler 观测者来说,它的三个视界面不再是重合的.

而当 $m=0$ 时,$Q=0$ 满足时,$A=0$(因为 $m=0$),(7.8.50)式就变为

$$r_{\mathrm{H}}=\frac{1}{a(1+\cos\theta)}, \qquad (7.8.51)$$

这是一个稳定的 Rindler 视界.

(2) 当 $a=0$ 时,(7.8.41)式变为

$$(1-2A)r^2-2mr+Q^2=0, \qquad (7.8.52)$$

解之得

$$r_{\mathrm{EH}}=\frac{m\pm\sqrt{m^2-Q^2(1-2A)}}{1-2A}, \qquad (7.8.53)$$

此式即为动态 Vaidya-Bonner 黑洞的事件视界表达式.当 $A=0$ 时,事件视界回到早已熟悉的稳态 Reissner-Nordström 黑洞的事件视界位置

$$r_{\mathrm{EH}}=m\pm\sqrt{m^2-Q^2}, \qquad (7.8.54)$$

而当 $Q=0$ 时,(7.8.54)式表示的事件视界回到施瓦西事件视界位置

$$r_{\mathrm{EH}_1}=2m,\qquad r_{\mathrm{EH}_2}=0. \qquad (7.8.55)$$

(3) $A=0$ 时,(7.8.41)式就变为(7.8.4)式,于是得到

$$g_{00}|_{\mathrm{EH}}=g_{00}|_{\mathrm{TLS}}=g_{00}|_{\mathrm{AH}}=0. \qquad (7.8.56)$$

故在稳态情况下,荷电匀加速黑洞的三种类视界超曲面:事件视界、表观视界和类时极限面相互重合.

总之,我们求出了匀加速荷电动态黑洞的类时极限面(TLS)、表观视界(AH)和事件视界(EH)的位置.在动态情况下,事件视界与类时极限面和表观视界分

开,而类时极限面仍与表观视界重合.

2. Kerr-NUT 黑洞的表面几何

取 Weyl 坐标下的线元,其视界坐标为

$$\rho^h = 0, \ |z| \leqslant k, \tag{7.8.57}$$

其中

$$k = \sqrt{m^2 + l^2 - a^2}. \tag{7.8.58}$$

视界的二维线元具有形式:

$$\mathrm{d}s_{\mathrm{EH}}^2 = E^2(z)\mathrm{d}z^2 + G^2(z)\mathrm{d}\varphi^2. \tag{7.8.59}$$

为了计算方便,(7.8.59)式中已将原度规的号差由 -2 改为 +2,且

$$E(z) = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{k^2(m+k)^2 + (az+lk)^2}{k^2 - z^2}}, \tag{7.8.60}$$

$$\begin{aligned} G(z) &= 2(m^2 + l^2 + mk)\sqrt{\frac{k^2 - z^2}{k^2(m+k)^2 + (az+lk)^2}} \\ &= \frac{2(m^2 + l^2 + mk)}{kE(z)}. \end{aligned} \tag{7.8.61}$$

值得注意的是

$$E(z)G(z) = \frac{2}{k}(m^2 + l^2 + mk) = \text{const.}. \tag{7.8.62}$$

下面将用 Weyl 坐标进行计算. 当然同样的计算也可用这一度规的 Boyer-Linquist 形式进行,因此必要时,也将间或采用后一度规形式或将结果化为用后一坐标表示.

线元为(7.8.59)式的二维曲面的高斯曲率为

$$\begin{aligned} R &= -\frac{1}{2E(z)G(z)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{1}{E(z)G(z)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}G^2(z)\right] \\ &= -\frac{1}{2[E(z)G(z)]^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}G^2(z). \end{aligned} \tag{7.8.63}$$

直接计算可得

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}G^2(z) = &-16k(m^2 + l^2 + mk)^2 \times \{[k(m^2 + l^2 + mk) + alz] \\ &\times [k^2(m+k)^2 + (az+lk)^2] - 2a(az+lk)[2kz(m^2 + l^2 + mk) \\ &+ al(k^2 + z^2)]\}/[k^2(m+k)^2 + (az+lk)^2]^3, \end{aligned} \tag{7.8.64}$$

因此高斯曲率为

$$\begin{aligned} R = 2k^3 \cdot \{&[k(m^2 + l^2 + mk) + alz][k^2(m+k)^2 \\ &+ (az+lk)^2] - 2a(az+lk)[2kz(m^2 + l^2 + mk) \end{aligned}$$

$$+a(k^2+z^2)]\}/[k^2(m+k)^2+(az+lk)^2]^3. \tag{7.8.65}$$

此式的形式比较复杂,为了看清 R 的性质,可先讨论一些特殊情况.

(a) $l=a=0, k=m$.

$$R=\frac{1}{(2m)^2}. \tag{7.8.66}$$

这是 Schwarzschild 黑洞的视界曲率.

(b) $l=0, a\neq 0, k=\sqrt{m^2-a^2}$. (7.8.67)

此时不难求得

$$R=2mk^4(m+k)\cdot\frac{k^2(m+k)^2-3a^2z^2}{k^2(m+k)^2+a^2z^2}. \tag{7.8.68}$$

在 Boyer-Lindquist 坐标系中,R 的形式为

$$R=(r_+^{h2}+a^2)(r_+^{h2}-3a^2\cos^2\theta)(r_+^{h2}+a^2\cos^2\theta)^{-3}, \tag{7.8.69}$$

其中,

$$r_+^h=m+k.$$

(c) $a=0, l\neq 0, k=\sqrt{m^2+l^2}$. 这时 Kerr-NUT 度规成为 NUT-Taub 度规,

$$R=\frac{1}{2k(m+k)}=\frac{1}{2kr_+^h}, \tag{7.8.70}$$

此式表明视界的高斯曲率与 θ 无关.

(d) $l\neq 0, a\neq 0, k=\sqrt{m^2+l^2-a^2}$. 这是一般的 Kerr-NUT 情况,此时可以求得

$$R(z=k)=\frac{2(m^2+l^2+mk+al)[(m+k)^2-4a^2+(l-a)^2]}{[(m+k)^2+(a+l)^2]^3}, \tag{7.8.71}$$

$$R(z=-k)=\frac{2(m^2+l^2+mk-al)[(m+k)^2-4a^2+(l+a)^2]}{[(m+k)^2+(l-a)^2]^3}, \tag{7.8.72}$$

利用高斯曲率 R 还可以检查黑洞视界的拓扑. 易求出欧拉示性数

$$\begin{aligned}\chi&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_{-k}^{+k}R(z)E(z)G(z)\,\mathrm{d}z\\&=-\frac{1}{2E(z)G(z)}\int_{-k}^{+k}\mathrm{d}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}G^2(z)\right]\\&=\frac{2(m^2+l^2+mk)^2}{(m^2+l^2+mk)^2-a^2l^2}.\end{aligned} \tag{7.8.73}$$

显然 a, l 中至少有一个为零时 $\chi=2$,即 Schwarzschild, Kerr 和 NUT-Taub 黑洞的视

界从拓扑上看是二维球面,但当 a 和 l 均不为零时 $\chi>2$,即 Kerr-NUT 黑洞的视界不具有二维球的拓扑,而 Kerr-Newman 黑洞的视界却具有二维球的拓扑.

顺便给出 Kerr-NUT 黑洞视界的面积

$$A = 8\pi(m^2 + l^2 + mk). \tag{7.8.74}$$

显然 NUT 参数使视界面积增加.

除了高斯曲率之外,赤道周长 C_e 和极向周长 C_p 的变化也反映视界的变形. 根据(7.8.59)式可得 Kerr-NUT 黑洞视界的赤道周长:

$$C_e = \int_0^{2\pi} G(z=0)\,d\varphi = \frac{4\pi(m^2+l^2+mk)}{\sqrt{(m+k)^2+l^2}}. \tag{7.8.75}$$

不难证明:

$$C_e \geqslant 4\pi m = C_{Sch}, \tag{7.8.76}$$

式中 C_{Sch} 为孤立 Schwarzschild 黑洞的周长. 另外

$$C_e(l=0, a\neq 0) = 4\pi m. \tag{7.8.77}$$

视界的赤道周长与 Schwarzschild 黑洞的周长相同,即旋转对赤道周长无影响,而(7.8.76)式说明 NUT 参数使视界的赤道周长增大.

极向周长

$$\begin{aligned} C_p &= 2\int_{-k}^{+k} E(z)\,dz = \frac{2}{k}\int_{-k}^{+k}\sqrt{\frac{k^2(m+k)^2+(az+lk)^2}{k^2-z^2}}\,dz \\ &= 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big[\sqrt{(m+k)^2+(l+ax)^2} + \\ &\qquad \sqrt{(m+k)^2+(l-ax)^2}\Big]dx. \end{aligned} \tag{7.8.78}$$

当 a,l 不同时为零时,C_p 没有解析表达式也不能表示成椭圆积分. 当 a,l 中至少有一个为零时,可以求得

$$C_p = 4\pi m,\quad a = l = 0, \tag{7.8.79}$$

$$C_p = 4\sqrt{(m+k)^2+a^2}\,E\left(\frac{a}{\sqrt{(m+k)^2+a^2}}\right),\quad a\neq 0,\quad l=0, \tag{7.8.80}$$

$$C_p = 2\pi\sqrt{2k(m+k)},\quad a=0,\quad l\neq 0, \tag{7.8.81}$$

(7.8.80)式中 E 为第二类完全椭圆积分.

对于一般情况,由(7.8.75)和(7.8.78)式可以看出,C_e 和 C_p 都是 l 的增函数,虽然对于 Kerr-NUT 黑洞,C_e 和 C_p 都随 l 的增大而增大,仍然可以定义参数

$$\delta = \frac{C_e - C_p}{C_e}, \tag{7.8.82}$$

用以度量视界偏离球面的程度. 值得注意的是 C_e 和 C_p 随 l 的增大是无界的,但 C_e

$\geqslant C_p$,即 $\delta\geqslant 0$ 却恒成立. 对于有限的 a 和很大的 l,易得

$$C_e \approx C_p \approx 2\sqrt{2}\pi l, \tag{7.8.83}$$

$$\delta \approx 0. \tag{7.8.84}$$

对于线元为

$$ds^2 = E(b)db^2 + J(b)d\varphi^2 \tag{7.8.85}$$

的二维曲面,可以等距嵌入平直三维欧氏空间 E^3 或伪欧氏空间 PE^3. 满足条件

$$E \geqslant \frac{(J')^2}{4J}, J' = \frac{dJ}{db} \tag{7.8.86}$$

时可嵌入空间 $ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2$,不满足此条件时则只能嵌入空间 $ds^2 = dX^2 + dY^2 - dZ^2$.

二维曲面(7.8.85)的高斯曲率为

$$R = \frac{-(J'/H)'}{2H}, \quad H^2 = EJ. \tag{7.8.87}$$

设

$$X = F(z)\cos\phi, \quad Y = F(z)\sin\phi, \quad Z = Z(z), \tag{7.8.88}$$

$$ds_{eh}^2 = E^2(z)dz^2 + G^2(z)d\phi^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2, \tag{7.8.89}$$

则容易得到

$$F(z) = G(z), \tag{7.8.90}$$

$$Z(z) = \int_0^\pi \{E^2(z) - [(G^2(z))']^2/4G^2(z)\}^{1/2}dz. \tag{7.8.91}$$

对于这里讨论的情况,(7.8.86)式为

$$E^2(z) \geqslant \frac{[(G^2(z))']^2}{4G^2(z)}, \tag{7.8.92}$$

此式不成立的区域只能嵌入 PE^3.

由(7.8.60)和(7.8.61)式可以得到

$$E^2(z) - \frac{[(G^2(z))']^2}{4G^2(z)} = \frac{1}{k^2 - z^2}\left\{\frac{k^2(m+k)^2 + (az+lk)^2}{k^2} - \frac{4k^2(m^2+l^2+mk)^2[2kz(m^2+l^2+mk) + al(k^2+z^2)]^2}{[k^2(m+k)^2 + (az+lk)^2]^3}\right\}. \tag{7.8.93}$$

令 $a=0, l\neq 0$,由(7.8.61)和(7.8.90)式得

$$F(z) = \frac{1}{k}\sqrt{2(m^2+l^2+mk)(k^2-z^2)}, \tag{7.8.94}$$

(7.8.93)和(7.8.91)式变为

$$E^2(z) - \frac{[(G^2(z))']^2}{4G^2(z)} = \frac{2(m^2+l^2+mk)}{k^2} > 0, \tag{7.8.95}$$

$$Z(z)=\frac{z}{k}\sqrt{2(m^2+l^2+mk)}.\tag{7.8.96}$$

由此可见，NUT-Taub 黑洞视界可以整体嵌入 E^3. 由(7.8.88)，(7.8.94)和(7.8.96)式可以得到

$$X^2+Y^2+Z^2=2kr_+^h,\tag{7.8.97}$$

这表明嵌入图是一球面，半径为 $\sqrt{2k(m+k)}$.

下面讨论 Kerr-NUT 时空视界整体嵌入 E^3 的问题. 由(7.8.61)和(7.8.92)式可得

$$|(G^2(z))'|\leqslant\frac{4(m^2+l^2+mk)}{k},\tag{7.8.98}$$

或由(7.8.93)式有

$$\frac{2k^2(m^2+l^2+mk)}{[k^2(m+k)^2+(az+lk)^2]^2}\cdot|2kz(m^2+l^2+mk)+al(k^2+z^2)|\leqslant 1.\tag{7.8.99}$$

在两极处，可以得到

$$(G^2(z))'|_{z=k}=-\frac{4(m^2+l^2+mk)^2}{k(m^2+l^2+mk+al)},\tag{7.8.100}$$

$$(G^2(z))'|_{z=-k}=-\frac{4(m^2+l^2+mk)^2}{k[al-(m^2+l^2+mk)]}.\tag{7.8.101}$$

易证明

$$(m^2+l^2+mk)\pm al>0\tag{7.8.102}$$

恒成立，且与 a,l 的符号无关. 利用这一结果可以得到

$$\left.\begin{aligned}|(G^2(z))'|_{z=k}&<\frac{4(m^2+l^2+mk)}{k}\\|(G^2(z))'|_{z=-k}&>\frac{4(m^2+l^2+mk)}{k}\end{aligned}\right\}al>0,\tag{7.8.103}$$

$$\left.\begin{aligned}|(G^2(z))'|_{z=k}&>\frac{4(m^2+l^2+mk)}{k}\\|(G^2(z))'|_{z=-k}&<\frac{4(m^2+l^2+mk)}{k}\end{aligned}\right\}al<0.\tag{7.8.104}$$

显然，若 a 和 l 同号，则(7.8.98)或(7.8.99)式在 $z=-k$ 附近不满足；若 a 和 l 异号，则在 $z=k$ 附近不满足上两式. 就是说，若 a 和 l 均不为零，则 Kerr-NUT 黑洞视界不能整体嵌入 E^3.

3. 双施瓦西黑洞的表面几何

王永成给出的度规在 Boyer-Lindquist 坐标系中具有形式

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1-\frac{2m_1}{r_1}\right)\left(1-\frac{2m_2}{r_2}\right)\mathrm{d}t^2$$
$$+\left[\frac{E(1',2)E(1,2')}{E(1,2)E(1',2')}\right]\frac{r_2^2}{r_2^2-2m_2r_2+m_2^2\sin^2\theta_2}$$
$$\times\left[\frac{1}{1-\dfrac{2m_1}{r_1}}\mathrm{d}r_1^2+r_1^2\mathrm{d}\theta_1^2\right]+\frac{r_1^2\sin^2\theta_1}{1-\dfrac{2m_2}{r_2}}\mathrm{d}\phi^2, \tag{7.8.105}$$

其中,

$$E(A,B)=R_AR_B+(z-m_A-Z_A)(z-m_B-Z_B)+\rho^2,$$
$$E(A',B)=E(B,A')=R'_AR_B+(z+m_A-Z_A)(z-m_B-Z_B)+\rho^2,$$
$$E(A',B')=R'_AR'_B+(z+m_A-Z_A)(z+m_B-Z_B)+\rho^2,$$
$$A,B=1,2;\quad Z_1=0,Z_2=Z,$$
$$R_1=\pm[\rho^2+(z-m_1)^2]^{1/2},R'_1=\pm[\rho^2+(z+m_1)^2]^{1/2},$$
$$R_2=\pm[\rho^2+(z-m_2-Z)^2]^{1/2},$$
$$R'_2=\pm[\rho^2+(z+m_2-Z)^2]^{1/2}. \tag{7.8.106}$$

由

$$r=\frac{1}{2}(R+R'+2m),\cos\theta=\frac{1}{2m}(R-R'), \tag{7.8.107}$$

可将(7.8.105)式变至外尔坐标,其形式为

$$\mathrm{d}s^2=-\frac{(R_1+R'_1-2m_1)(R_2+R'_2-2m_2)}{(R_1+R'_1+2m_1)(R_2+R'_2+2m_2)}\mathrm{d}t^2$$
$$+\left[\frac{E(1',2)E(1,2')}{E(1,2)E(1',2')}\right]$$
$$\times\frac{(R_1+R'_1+2m_1)^2(R_2+R'_2+2m_2)^2}{16R_1R'_1R_2R'_2}(\mathrm{d}\rho^2+\mathrm{d}z^2)$$
$$+\frac{(R_1+R'_1+2m_1)(R_2+R'_2+2m_2)}{(R_1+R'_1-2m_1)(R_2+R'_2-2m_2)}\rho^2\mathrm{d}\varphi^2. \tag{7.8.108}$$

令

$$E(z)=\sqrt{g_{zz}}=\left[\frac{4m_1^2(Z-z-m_2)}{(m_1^2-z)^2(Z-z+m_2)}\cdot\right.$$
$$\left.\left(\frac{Z+m_1+m_2}{Z+m_1-m_2}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{7.8.109}$$

$$G(z)=\sqrt{g_{\varphi\varphi}}=\left[\frac{4(m_1^2-z^2)(Z-z+m_2)}{Z-z-m_2}\right]^{1/2},\tag{7.8.110}$$

则

$$E(z)G(z)=4m_1\left(\frac{Z+m_1+m_2}{Z+m_1-m_2}\right).\tag{7.8.111}$$

作代换 $\theta\to z$,则可得 m_1 视界的高斯曲率

$$\begin{aligned}K_1&=-\frac{1}{2(EG)^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}[G(z)]^2\\&=\frac{1}{2m_1^2}\left(\frac{Z+m_1-m_2}{Z+m_1+m_2}\right)^2\\&\quad\times\left[1+2m_2\frac{(Z-m_2)^2-m_1^2}{(Z-z-m_2)^3}\right]>0,\quad Z>m_1+m_2.\end{aligned}\tag{7.8.112}$$

可以求得

$$\frac{\mathrm{d}K_1}{\mathrm{d}z}=\frac{3m_2}{2m_1^2}\left(\frac{Z+m_1-m_2}{Z+m_1+m_2}\right)^2\frac{[(Z-m_2)^2-m_1^2]}{(Z-z-m_2)^4}>0.\tag{7.8.113}$$

所以 K_1 为 z 的增函数,即 m_1 从远离 m_2 的一端到靠近 m_2 的一端,高斯曲率 K_1 单调地增大. 在远离 m_2 的一端 K_1 为

$$\begin{aligned}K_{1f}&=K_1(z=-m_1)=\frac{1}{(2m_1)^2}\\&\quad\times\left[1-2m_2\frac{Z+m_2+3m_1}{(Z+m_1+m_2)^2}\right]<\frac{1}{(2m_1)^2}.\end{aligned}\tag{7.8.114}$$

显然 K_{1f}随 Z 的增大单调增加. 在靠近 m_2 的一端 K_1 为

$$\begin{aligned}K_{1n}&=K_1(z=m_1)\\&=\frac{(Z+m_1-m_2)^2[(Z-m_1)^2-m_2(m_2-4m_1)]}{(2m_1)^2[Z^2-(m_1+m_2)^2]^2}.\end{aligned}\tag{7.8.115}$$

与 K_{1f}不同,K_{1n}不是 Z 的单调函数.

下边求出 m_1 视界的赤道周长 $c_{1\mathrm{e}}$和极向周长 $c_{1\mathrm{p}}$.

$$\begin{aligned}c_{1\mathrm{e}}&=\int_0^{2\pi}G(z=0)\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}\left[\frac{4m_1^2(Z+m_2)}{Z-m_2}\right]^{1/2}\mathrm{d}\varphi\\&=4\pi m_1\sqrt{\frac{Z+m_2}{Z-m_2}}>4\pi m_1,\end{aligned}\tag{7.8.116}$$

式中 $4\pi m_1$ 为孤立 Schwarzschild 黑洞的赤道周长. 因

$$\frac{\mathrm{d}c_{1\mathrm{e}}}{\mathrm{d}z}=-\frac{4\pi m_1m_2}{(Z-m_2)^2}\sqrt{\frac{Z-m_2}{Z+m_2}}<0,\tag{7.8.117}$$

所以 m_2 靠近 m_1,使 m_1 视界的赤道周长增大.

极向周长

$$c_{1p} = 2\int_{-m_1}^{m_1} E(z)\,dz = 4m_1\left(\frac{Z+m_1+m_2}{Z+m_1-m_2}\right)$$

$$\times \int_{-m_1}^{m_1} \sqrt{\frac{Z-z-m_2}{(Z-z+m_2)(m_1^2-z^2)}}\,dz$$

$$= \frac{8m_1[Z^2-(m_1+m_2)^2]}{(Z+m_1-m_2)\sqrt{Z^2-(m_2-m_1)^2}}$$

$$\times \Pi_1\left(\frac{2m_1}{Z+m_1-m_2}, 2\sqrt{\frac{m_1m_2}{Z^2-(m_2-m_1)^2}}\right),$$

$$Z > m_1+m_2, \tag{7.8.118}$$

式中Π_1为第三类完全椭圆积分,容易证明模数

$$\kappa = 2\sqrt{\frac{m_1m_2}{Z^2-(m_2-m_1)^2}} < 1 \tag{7.8.119}$$

满足椭圆积分的要求.另外,容易证明

$$c_{1p} \leqslant c_{1e}. \tag{7.8.120}$$

与c_{1e}不同,c_{1p}不是Z的单调函数.m_1的视界面积为

$$A_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-m_1}^{m_1} EG\,dz = 16\pi m_1^2\left(\frac{Z+m_1+m_2}{Z+m_1-m_2}\right),$$

$$Z \geqslant m_1+m_2. \tag{7.8.121}$$

显然有

$$A_1(Z=m_1+m_2) = 16\pi m_1(m_1+m_2). \tag{7.8.122}$$

还可以证明Z为有限值时,m_1的视界不同胚于球面,这只要求出欧拉示性数:

$$\chi_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-m_1}^{m_1} K_1 EG\,dz$$

$$= 2\left[\frac{Z^2-m_2^2-m_1^2}{Z^2-(m_1+m_2)^2}\right] > 2, \quad Z > m_1+m_2. \tag{7.8.123}$$

因此,根据 Gauss-Bonnet 定理,m_1的视界不再同胚于球面.

黑洞m_2的视界的几何性质与m_1的视界的几何性质基本相同.将本节上边所有公式中的m_1与m_2互换,另外将z换为$Z-z$,就得到m_2视界的相应公式.

$$Z = m_1+m_2 \text{ 时}, \quad z = m_1 = Z-m_2, \quad \rho = 0 \tag{7.8.124}$$

的点不在视界上.根据(7.8.112)式并作上一节已指出的代换,可以求得

$$K = K_1(Z=m_1+m_2) = K_2(Z=m_1+m_2)$$

$$= \frac{1}{[2(m_1+m_2)]^2}, z \neq m_1. \tag{7.8.125}$$

根据(7.8.122)式得

$$c_{1\mathrm{p}} = 4(m_1 + m_2)\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)\right], \quad Z = m_1 + m_2, \tag{7.8.126}$$

将 m_1 和 m_2 互换得

$$c_{2\mathrm{p}} = 4(m_1 + m_2)\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)\right], \quad Z = m_1 + m_2. \tag{7.8.127}$$

下边证 $c_{1\mathrm{p}}(Z = m_1 + m_2) \geqslant 4\pi m_1$,而 $c_{2\mathrm{p}}(Z = m_1 + m_2) \leqslant 4\pi m_2$.

令

$$f(x) = \arcsin x - \frac{\pi}{2}x, \quad x = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{7.8.128}$$

对 $f(x)$ 求导可知,其在[0,1]间有一极小值,而在端点处 $f(0) = f(1) = 0$,所以

$$f(x) \leqslant 0, \quad \arcsin\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) \leqslant \frac{\pi}{2}\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right), \tag{7.8.129}$$

$$\begin{aligned} c_{1\mathrm{p}}(Z = m_1 + m_2) &\geqslant 4(m_1 + m_2)\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)\right] \\ &= 4\pi m_1, \end{aligned} \tag{7.8.130}$$

$$\begin{aligned} c_{2\mathrm{p}}(Z = m_1 + m_2) &= 4(m_1 + m_2)\left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)\right] \\ &\leqslant 4(m_1 + m_2)\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)\right] = 4\pi m_2. \end{aligned} \tag{7.8.131}$$

值得注意的是,这种临界状态下 $c_{1\mathrm{p}}$ 和 $c_{2\mathrm{p}}$ 的不同性质,说明质量不同的两个 Schwarzschild 黑洞中的一个对另一个极向周长的影响不同.

由(7.8.125)和(7.8.126)式得

$$c_{1\mathrm{p}} + c_{2\mathrm{p}} = 2\pi[2(m_1 + m_2)]. \tag{7.8.132}$$

视界的总面积:

$$\begin{aligned} A &= A_1(Z = m_1 + m_2) + A_2(Z = m_1 + m_2) \\ &= 4\pi[2(m_1 + m_2)]^2. \end{aligned} \tag{7.8.133}$$

还可以求出横向周长 c_{t},无论 $-m_1 \leqslant z \leqslant m_1$ 或 $Z - m_2 = m_1 \leqslant z \leqslant Z + m_2 = m_1 + 2m_2$,都有

$$\begin{aligned} c_{\mathrm{t}}(z) &= \int_0^{2\pi}[G(z)\mid_{Z = m_1 + m_2}]\mathrm{d}\varphi \\ &= 4\pi\sqrt{(z + m_1)(m_1 + 2m_2 - z)}. \end{aligned} \tag{7.8.134}$$

不难证明,$-m_1 \leqslant z \leqslant m_2$ 时 $c_{\mathrm{t}}(z)$ 单调增加,$m_2 \leqslant z \leqslant m_1 + 2m_2$ 时 $c_{\mathrm{t}}(z)$ 单调减少,其最大值 $c_{\mathrm{t,max}} = c_{\mathrm{t}}(z = m_2)$.因此,如果把 z 的原点移到 $z = m_2$ 处,即令 $z' = z - m_2$,则

$$c_{\mathrm{t}}(z') = 4\pi\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - z'^2}. \tag{7.8.135}$$

显然 $c_t(z')$ 关于 $z'=0$,即 $z=m_2$ 对称. 且 $z'=0$ 时

$$
\begin{aligned}
G(z'=0) &= c_{t,\max} = 4\pi(m_1+m_2) \\
&= 2\pi[2(m_1+m_2)] \\
&= c_e.
\end{aligned}
\tag{7.8.136}
$$

这正是质量为 m_1+m_2 的孤立 Schwarzschild 黑洞的赤道周长.

4. 加速克尔黑洞的特征曲面

匀加速直线运动的克尔黑洞的外部度规时空线元为

$$
\begin{aligned}
ds^2 = &(1-F)dv^2 - 2dvdr - 2fp^2 dvd\theta + 2\sin^2\theta AFdvd\varphi \\
&+ 2A\sin^2\theta drd\varphi - p^2 d^2\theta + 2Afp^2\sin^2\theta d\theta d\varphi \\
&- \sin^2\theta(A^2F\sin^2\theta + A^2 + r^2)d\varphi^2,
\end{aligned}
\tag{7.8.137}
$$

其中,

$$
\begin{aligned}
&F \equiv 2ar\cos\theta + 2mr/p^2 + p^2 f^2, \\
&f \equiv -a\sin\theta, \\
&p^2 \equiv r^2 + A^2\cos^2\theta.
\end{aligned}
\tag{7.8.138}
$$

转动轴的北极 $\theta=0$,指向加速度方向,A 为单位质量的角动量,是一个常量;a 为加速度,是一个常量;m 为源质量,是 v 的函数.

类时极限面的定义为

$$
g_{vv} = g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^b = 0. \tag{7.8.139}
$$

由方程(1)可知:

$$
g_{vv} = 1 - F = 0, \tag{7.8.140}
$$

即

$$
\begin{aligned}
&-a^2\sin^2\theta r^4 - 2a\cos\theta r^3 + (1 - 2A^2a^2\sin^2\theta\cos^2\theta)r^2 \\
&- (2m + 2A^2a\cos^3\theta)r + A^2\cos^2\theta - A^4a^2\sin^2\theta\cos^4\theta = 0.
\end{aligned}
\tag{7.8.141}
$$

解此方程,得到

$$
r_{\mathrm{TLS}_1} = -D + E + R - \frac{1}{2}\frac{\cos\theta}{a\sin^2\theta}, \tag{7.8.142}
$$

$$
r_{\mathrm{TLS}_2} = D - E + R - \frac{1}{2}\frac{\cos\theta}{a\sin^2\theta}, \tag{7.8.143}
$$

$$
r_{\mathrm{TLS}_3} = D + E - R - \frac{1}{2}\frac{\cos\theta}{a\sin^2\theta}
$$

其中,

$$
D = \frac{1}{\sqrt{6}a\sin\theta}[1 - \alpha\cos(\varphi/3 - \pi/3)]^{1/2}, \tag{7.8.144}
$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{6}a\sin\theta}\left[1 - \alpha\cos(\varphi/3 + \pi/3)\right]^{1/2}, \tag{7.8.145}$$

$$R = \frac{1}{\sqrt{6}a\sin\theta}\left[1 + \alpha\cos(\varphi/3)\right]^{1/2}, \tag{7.8.146}$$

$$\begin{aligned}\alpha = \Bigg[& \left(1 - 2A^2a^2\sin^2\theta\cos^2\theta + \frac{3}{2}\cot^2\theta\right)^2 \\ & - 12\left(\frac{3}{16}\frac{\cos^4\theta}{a^2\sin^6\theta} + \frac{1}{4}\frac{\cos^2\theta}{a^2\sin^4\theta} + \frac{m\cos\theta}{a\sin^2\theta} + \frac{1}{2}\frac{A^2\cos^4\theta}{\sin^2\theta}\right. \\ & \left. + A^2\cos^2\theta - A^4a^2\sin^2\theta\cos^4\theta\right)\Bigg]^{1/2},\end{aligned} \tag{7.8.147}$$

$$\varphi = \arccos(-\beta/\alpha^3). \tag{7.8.148}$$

当 $0 < \varphi < \pi$ 时,

$$\begin{aligned}\beta = & \left(1 - 2A^2a^2\sin^2\theta\cos^2\theta + \frac{3}{2}\cot^2\theta\right)^3 \\ & + 30a^2\sin^2\theta\left(1 - 2A^2a^2\sin^2\theta\cos^2\theta + \frac{3}{2}\cot^2\theta\right) \\ & \times\left(\frac{3}{16}\frac{\cos^4\theta}{a^2\sin^6\theta} + \frac{1}{4}\frac{\cos^2\theta}{a^2\sin^4\theta} + \frac{m\cos\theta}{a\sin^2\theta} + \frac{1}{2}\frac{A^2\cos^4\theta}{\sin^2\theta}\right. \\ & \left. + A^2\cos^2\theta - A^4a^2\sin^2\theta\cos^4\theta\right) - 27a^2\sin^2\theta \\ & \times\left(2m + \frac{\cos\theta}{a\sin^2\theta} + \frac{3}{2}\frac{\cos^3\theta}{a\sin^4\theta}\right)^2.\end{aligned} \tag{7.8.149}$$

r_{TLS_1}为 Rindler 的类时极限面,r_{TLS_2}和 r_{TLS_3}分别为匀加速直线运动的 Kerr 黑洞的外部和内部类时极限面.

当 $A = 0, m = 0$ 时,方程(7.8.141)化为

$$a^2\sin^2\theta r^4 + 2a\cos\theta r^3 - r^2 = 0, \tag{7.8.150}$$

解之得 Rindler 的类时极限面

$$r = [a(1 + \cos\theta)]^{-1}. \tag{7.8.151}$$

当 $a = 0$ 时,(7.8.141)式简化为

$$r^2 - 2mr + A^2\cos^2\theta = 0, \tag{7.8.152}$$

解之得

$$r_{TLS}^{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - A^2\cos^2\theta}. \tag{7.8.153}$$

此时显然与克尔黑洞的情况相符.

蒸发黑洞,$\dot{m} = \mathrm{d}m/\mathrm{d}v < 0$,可以发现其外类时极限面收缩,内极限面膨胀. 吸积黑洞的情况相反.

表观视界由 $\Theta=0$ 确定. 为了得到这一方程,可先将度规(7.8.137)对称化:

$$
\begin{aligned}
ds^2 =& [\gamma(r^2+A^2)(dv - A\sin^2\theta d\varphi)] \\
&\times \left[\frac{1}{r^2+A^2}\left(\frac{\Delta}{2}dv - \gamma^{-1}dr - f\gamma^{-2}d\theta - \frac{\Delta}{2}A\sin^2\theta d\varphi\right)\right] \\
&+ \left[\frac{1}{r^2+A^2}\left(\frac{\Delta}{2}dv - \gamma^{-1}dr - f\gamma^{-2}d\theta - \frac{\Delta}{2}A\sin^2\theta d\varphi\right)\right] \\
&\times [\gamma(r^2+A^2)(dv - A\sin^2\theta d\varphi)] - \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \\
&\times [iA\sin\theta dv + \gamma^{-1}d\theta - i(r^2+A^2)\sin\theta d\varphi] \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \\
&\times [-iA\sin\theta dv + \gamma^{-1}d\theta + i(r^2+A^2)\sin\theta d\varphi] - \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \\
&\times [-iA\sin\theta dv + \gamma^{-1}d\theta + i(r^2+A^2)\sin\theta d\varphi] \times \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \\
&\times [iA\sin\theta dv + \gamma^{-1}d\theta - i(r^2+A^2)\sin\theta d\varphi],
\end{aligned}
\tag{7.8.154}
$$

式中,

$$
\gamma = 1/p^2, \quad \Delta = r^2 + A^2 - \gamma^{-1}F. \tag{7.8.155}
$$

于是得零标架的表达式:

$$
\begin{aligned}
n_\mu &= \gamma(r^2+A^2)(1,0,0,-A\sin^2\theta), \\
l_\mu &= \frac{1}{r^2+A^2}\left(\frac{\Delta}{2}, -\gamma^{-1}, -f\gamma^{-2}, -\frac{\Delta}{2}A\sin^2\theta\right), \\
m_\mu &= \sqrt{\frac{\gamma}{2}}(-iA\sin\theta, 0, \gamma^{-1}, i(r^2+A^2)\sin\theta), \\
\bar{m}_\mu &= \sqrt{\frac{\gamma}{2}}(iA\sin\theta, 0, \gamma^{-1}, -i(r^2+A^2)\sin\theta),
\end{aligned}
\tag{7.8.156}
$$

和

$$
\begin{aligned}
n^\mu &= \gamma(r^2+A^2)(0,-1,0,0), \\
l^\mu &= \left(1, \frac{\Delta}{2(r^2+A^2)}, 0, \frac{A}{r^2+A^2}\right), \\
m^\mu &= \sqrt{\frac{\gamma}{2}}\left(iA\sin\theta, 0, 1, \frac{i}{\sin\theta}\right), \\
\bar{m}^\mu &= \sqrt{\frac{\gamma}{2}}\left(-iA\sin\theta, 0, 1, -\frac{i}{\sin\theta}\right),
\end{aligned}
\tag{7.8.157}
$$

膨胀为

$$
\Theta = l^\mu_{;\mu} - \kappa, \tag{7.8.158}
$$

$$\kappa = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r} + \frac{A^2\sin^2\theta}{2(r^2+A^2)}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r} - \frac{A^2Fr\sin^2\theta}{(r^2+A^2)^2}, \tag{7.8.159}$$

即

$$\Theta = \frac{r\Delta}{p^2(r^2+A^2)}. \tag{7.8.160}$$

$\Theta=0$，即

$$-a^2\sin^2\theta r^4 - 2a\cos\theta r^3 + (1-2A^2a^2\sin^2\theta\cos^2\theta)r^2$$
$$-(2m+2A^2a\cos^3\theta)r - A^4a^2\sin^2\theta\cos^4\theta + A^2 = 0. \tag{7.8.161}$$

解之得

$$r_{\mathrm{AH}_1} = -D' + E' + R' - \frac{1}{2}\frac{\cos\theta}{a\sin^2\theta}, \tag{7.8.162}$$

$$r_{\mathrm{AH}_2} = D' - E' + R' - \frac{1}{2}\frac{\cos\theta}{a\sin^2\theta}, \tag{7.8.163}$$

$$r_{\mathrm{AH}_3} = D' + E' - R' - \frac{1}{2}\frac{\cos\theta}{a\sin^2\theta}, \tag{7.8.164}$$

式中，

$$D' = \frac{1}{\sqrt{6}a\sin\theta}[1-\alpha'\cos(\varphi'/3-\pi/3)]^{1/2}, \tag{7.8.165}$$

$$E' = \frac{1}{\sqrt{6}a\sin\theta}[1-\alpha'\cos(\varphi'/3+\pi/3)]^{1/2}, \tag{7.8.166}$$

$$R' = \frac{1}{\sqrt{6}a\sin\theta}[1+\alpha'\cos(\varphi'/3)]^{1/2}, \tag{7.8.167}$$

$$\alpha' = \left[\left(1-2A^2a^2\sin^2\theta\cos^2\theta+\frac{3}{2}\cot^2\theta\right)^2\right.$$
$$-12\left(\frac{3}{16}\frac{\cos^4\theta}{a^2\sin^6\theta}+\frac{1}{4}\frac{\cos^2\theta}{a^2\sin^4\theta}+\frac{m\cos\theta}{a\sin^2\theta}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}\frac{A^2\cos^4\theta}{\sin^2\theta}+A^2-A^4a^2\sin^2\theta\cos^4\theta\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{7.8.168}$$

$$\varphi' = \arccos(-\beta'/\alpha'^3). \tag{7.8.169}$$

当 $0<\varphi'<\pi$ 时，

$$\beta' = \left(1-2A^2a^2\sin^2\theta\cos^2\theta+\frac{3}{2}\cot^2\theta\right)^3 + 30a^2\sin^2\theta$$
$$\times\left(1-2A^2a^2\sin^2\theta\cos^2\theta+\frac{3}{2}\cot^2\theta\right)$$
$$\times\left[\frac{3}{16}\frac{\cos^4\theta}{a^2\sin^6\theta}+\frac{1}{4}\frac{\cos^2\theta}{a^2\sin^4\theta}+\frac{m\cos\theta}{a\sin^2\theta}+\frac{1}{2}\frac{A^2\cos^4\theta}{\sin^2\theta}\right.$$

$$+ A^2 - A^4 a^2 \sin^2\theta\cos^4\theta\Big]$$

$$- 27\left(2m + \frac{\cos\theta}{a\sin^2\theta} + \frac{3}{2}\frac{\cos^3\theta}{a\sin^4\theta}\right)^2 a^2\sin^2\theta. \quad (7.8.170)$$

r_{AH_1}为 Rindler 的表观视界,r_{AH_2}和 r_{AH_3}分别为匀加速直线运动的 Kerr 黑洞的外部和内部的表观视界.

下面讨论事件视界.由

$$\frac{d}{dv} = l^a\Delta_a = \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\Delta}{2(r^2+A^2)}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{A}{r^2+A^2}\frac{\partial}{\partial\varphi} \quad (7.8.171)$$

得到

$$\dot{r} = \frac{dr}{dv} = \frac{\Delta}{2(r^2+A^2)}, \quad (7.8.172)$$

$$\ddot{r} = -\frac{p^2}{2(r^2+A^2)}\frac{dF}{dv} + \dot{r}\left[\frac{r(1-F)}{r^2+A^2} - \frac{p^2}{2(r^2+A^2)}\frac{dF}{dr} - \frac{2r\dot{r}}{r^2+A^2}\right]. \quad (7.8.173)$$

事件视界由(7.8.35)式确定.采用逐次逼近法,先令(7.8.173)式中 $\ddot{r}=0$,得到

$$-\frac{p^2}{2(r^2+A^2)}\frac{dF}{dv} + \dot{r}\left[\frac{r(1-F)}{r^2+A^2} - \frac{p^2}{2(r^2+A^2)}\frac{dF}{dr} - \frac{2r\dot{r}}{r^2+A^2}\right] = 0.$$

当$\frac{dF}{dv}=0$ 时,即稳态情况下,

$$\dot{r}\left[\frac{r(1-F)}{r^2+A^2} - \frac{p^2}{2(r^2+A^2)}\frac{dF}{dr} - \frac{2r\dot{r}}{r^2+A^2}\right] = 0. \quad (7.8.174)$$

解之得

$$\dot{r} = \frac{1}{2}\left(1 - 2ar\cos\theta - \frac{2mr}{p^2} - p^2 f^2\right) - \frac{p^2}{4}\left(2a\cos\theta + 2rf^2 + \frac{2mp^2 - 4mr}{p^4}\right). \quad (7.8.175)$$

令 $r = r_{AH}^+$,我们有

$$\dot{r} = \frac{1}{2}\left[1 - 2ar_{AH}^+\cos\theta - \frac{2mr_{AH}^+}{r_{AH}^{+2} + A^2\cos^2\theta} - A^2\sin^2\theta(r_{AH}^{+2} + A^2\cos^2\theta)\right] - \frac{1}{4}(r_{AH}^{+2} + A^2\cos^2\theta)\left[2a\cos\theta + \frac{2m(r_{AH}^{+2} + A^2\cos^2\theta) - 4mr_{AH}^+}{(r_{AH}^{+2} + A^2\cos^2\theta)^2} + 2a^2\sin^2\theta r_{AH}^+\right]. \quad (7.8.176)$$

将(7.8.176)式代入(7.8.172)式,得到

$$-a^2\sin^2\theta r^4-2a\cos\theta r^3-(2A^2a^2\sin^2\theta\cos^2\theta+2\dot{r}-1)r^2$$

$$-(2m+2A^2\cos^3\theta a)r-2\dot{r}A^2+A^2-a^2\sin^2\theta A^4\cos^4\theta=0,\quad(7.8.177)$$

解之得

$$r_{\mathrm{EH}_1}=-D''+E''+R''-\frac{1}{2}\frac{\cos\theta}{a\sin^2\theta},\quad(7.8.178)$$

$$r_{\mathrm{EH}_2}=D''-E''+R''-\frac{1}{2}\frac{\cos\theta}{a\sin^2\theta},\quad(7.8.179)$$

$$r_{\mathrm{EH}_3}=D''+E''-R''-\frac{1}{2}\frac{\cos\theta}{a\sin^2\theta},\quad(7.8.180)$$

式中,

$$D''=\frac{1}{\sqrt{6}a\sin\theta}[1-\alpha''\cos(\varphi''/3-\pi/3)]^{1/2},$$

$$E''=\frac{1}{\sqrt{6}a\sin\theta}[1-\alpha''\cos(\varphi''/3+\pi/3)]^{1/2},$$

$$R''=\frac{1}{\sqrt{6}a\sin\theta}[1+\alpha''\cos(\varphi''/3)]^{1/2},$$

$$\alpha''=\left[\left(1-\dot{r}r-2A^2a^2\sin^2\theta\cos^2\theta+\frac{3}{2}\cot^2\theta\right)^2\right.$$

$$-12\left(\frac{3}{16}\frac{\cos^4\theta}{a^2\sin^6\theta}+\frac{m\cos\theta}{a\sin^2\theta}+\frac{1}{4}\frac{\cos^2\theta}{a^2\sin^4\theta}+\frac{1}{2}\frac{A^2\cos^4\theta}{\sin^2\theta}\right)$$

$$\left.\times\left(-2\dot{r}A^2+A^2-a^2\sin^2\theta A^4\cos^4\theta\right)\right]^{1/2},$$

$$\varphi''=\arccos(-\beta''/\alpha''^3).\quad(7.8.181)$$

当$0<\varphi''<\pi$时,

$$\beta''=\left(1-2\dot{r}-2A^2a^2\sin^2\theta\cos^2\theta+\frac{3}{2}\cot^2\theta\right)^3$$

$$+30a^2\sin^2\theta\left(1-2\dot{r}-2A^2a^2\sin^2\theta\cos^2\theta+\frac{3}{2}\cot^2\theta\right)$$

$$\times\left(\frac{3}{16}\frac{\cos^4\theta}{a^2\sin^4\theta}+\frac{m\cos\theta}{a\sin^2\theta}+\frac{1}{2}\frac{A^2\cos^4\theta}{\sin^2\theta}-2\dot{r}A^2+A^2-A^4a^2\sin^2\theta\cos^4\theta\right)$$

$$-27\left(2m+\frac{\cos\theta}{a\sin^2\theta}+\frac{3}{2}\frac{\cos^3\theta}{a\sin^4\theta}\right)^2a^2\sin^2\theta.\quad(7.8.182)$$

r_{EH_1}为 Rindler 视界,r_{EH_2}和r_{EH_3}分别为匀加速直线运动的 Kerr 黑洞的外部和内部事件视界.

附录

不为零的联络分量

$$\Gamma^0_{00} = -\frac{A^2\sin^2\theta}{2p^2}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}v} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{A^2}{p^2}\sin^2\theta\right)\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r},$$

$$\Gamma^0_{02} = \Gamma^0_{20} = -\left(1 + \frac{A^2}{p^2}\sin^2\theta\right)rf - \frac{A^2F}{2p^2}\sin2\theta,$$

$$\Gamma^0_{03} = \Gamma^0_{30} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{A^2}{p^2}\sin^2\theta\right)\left(A\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{A^3\sin^4\theta}{2p^2}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}v},$$

$$\Gamma^0_{12} = \Gamma^0_{21} = -\frac{A^2\sin2\theta}{2p^2}, \Gamma^0_{13} = \Gamma^0_{31} = \frac{Ar\sin^2\theta}{p^2},$$

$$\Gamma^0_{22} = -\frac{(A^2 + r^2)r}{p^2} - A^2f\sin2\theta,$$

$$\Gamma^0_{23} = \Gamma^0_{32} = \frac{A^3\sin^2\theta}{2p^2}F\sin2\theta + \frac{(A^2 + r^2)}{p^2}Afr\sin^2\theta,$$

$$\Gamma^0_{33} = -\frac{A^4\sin^6\theta}{2p^2}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}v} + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}\right) - \frac{1}{2}A^2\sin^4\theta\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r} - \frac{(A^2 + r^2)r\sin^2\theta}{p^2},$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{A^2}{p^2}\sin^2\theta\right) + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}v} + \frac{1}{2}g^{11}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{2}f\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\theta},$$

$$\Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r} - rf^2,$$

$$\Gamma^1_{02} = \Gamma^1_{20} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\theta} + g^{11}(rf) - \frac{A^2}{2p^2}F\sin2\theta,$$

$$\Gamma^1_{03} = \Gamma^1_{30} = -\frac{1}{2}g^{11}\left(A\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}\right) - \frac{1}{2}Af\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\theta}$$
$$- \frac{1}{2}AfF\sin2\theta + \frac{A^3\sin^4\theta}{2p^2}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}v},$$

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\frac{A^2\sin2\theta}{2p^2},$$

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = -\frac{1}{2}A\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r} + Arf^2\sin^2\theta - Af\sin\theta\cos\theta + \frac{Ar\sin^2\theta}{p^2},$$

$$\Gamma^1_{22} = fp^2\cot\theta - \frac{3}{2}A^2f\sin2\theta + rg^{11},$$

$$\Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} = -\frac{1}{2}A\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\theta} - \frac{1}{2}f^2p^2A\sin2\theta - g^{11}Afr\sin^2\theta,$$

$$\Gamma^1_{33} = -\frac{1}{2}A^2\sin^4\theta\left(1 + \frac{A^2}{p^2}\sin^2\theta\right)\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}v}$$
$$+ \frac{1}{2}g^{11}\left(A^2\sin^4\theta\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r} + 2r\sin^2\theta\right)$$

$$+\frac{1}{2}f\left[A^2\sin^4\theta\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\theta}+2A^2F\sin^2\theta\sin2\theta+(A^2+r^2)\sin2\theta\right],$$

$$\Gamma^2_{00}=\frac{1}{2}f\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}-\frac{1}{2p^2}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\theta},$$

$$\Gamma^2_{01}=\Gamma^2_{10}=\frac{rf}{p^2},\Gamma^2_{02}=\Gamma^2_{20}=rf^2,$$

$$\Gamma^2_{03}=\Gamma^2_{30}=-\frac{1}{2}fA\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}+\frac{A\sin^2\theta}{2p^2}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\theta}+\frac{AF}{2p^2}\sin2\theta,$$

$$\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\frac{r}{p^2},\Gamma^2_{13}=\Gamma^2_{31}=\frac{A\sin2\theta-2Arf\sin^2\theta}{2p^2},$$

$$\Gamma^2_{22}=rf-\frac{A^2\sin2\theta}{2p^2},\Gamma^2_{23}=\Gamma^2_{32}=\frac{1}{2}Af\sin2\theta-Af^2r\sin^2\theta,$$

$$\Gamma^2_{33}=\frac{1}{2}f\left(A^2\sin^4\theta\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}+2r\sin^2\theta\right)$$

$$-\frac{1}{2p^2}\left(A^2\sin^4\theta\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\theta}+2A^2F\sin^2\theta\sin2\theta+(A^2+r^2)\sin2\theta\right),$$

$$\Gamma^3_{00}=-\frac{A}{2p^2}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}+\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}v}\right),\Gamma^3_{02}=\Gamma^3_{20}=-\frac{A}{p^2}(rf+F\cot\theta),$$

$$\Gamma^3_{03}=\Gamma^3_{30}=\frac{A^2\sin^2\theta}{2p^2}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}+\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}v}\right),\Gamma^3_{12}=\Gamma^3_{21}=-\frac{A}{p^2}\cot\theta,$$

$$\Gamma^3_{13}=\Gamma^3_{31}=\frac{r}{p^2},\Gamma^3_{22}=-2Af\cot\theta-\frac{Ar}{p^2},$$

$$\Gamma^3_{23}=\Gamma^3_{32}=\frac{(A^2+r^2)}{p^2}\cot\theta+\frac{A^2fr\sin^2\theta}{p^2}+\frac{A^2F\sin2\theta}{2p^2},$$

$$\Gamma^3_{33}=-\frac{A^3\sin^4\theta}{2p^2}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}v}+\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{Ar}{p^2}\sin^2\theta.$$

5. 荷电动态黑洞的特征曲面

轴对称荷电动态黑洞的外部度规：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2=&[1-(2mr-Q^2)\rho\bar{\rho}\mathrm{d}u^2+2\mathrm{d}u\mathrm{d}r+2a(2mr\\&-Q^2)\rho\bar{\rho}\sin^2\theta\mathrm{d}u\mathrm{d}\varphi-2a\sin^2\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi-\frac{1}{\rho\bar{\rho}}\mathrm{d}\theta^2\\&+\left[(Q^2-2mr)a^2\rho\bar{\rho}-\frac{a^2+r^2}{\sin^2\theta}\right]\sin^4\theta\mathrm{d}\varphi^2,\end{aligned}\tag{7.8.183}$$

其中 u 为超前爱丁顿坐标，质量 $m=m(u)$，电荷 $Q=Q(u)$，$\rho=-(r-\mathrm{i}a\cos\theta)^{-1}$，$a$ 为比角动量.

由类时极限面的定义

$$g_{uu} = g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^b = 0, \tag{7.8.184}$$

可得

$$r^2 - 2mr + (Q^2 + a^2\cos^2\theta) = 0. \tag{7.8.185}$$

解方程求出黑洞的类时极限面为

$$r_{\text{TLS}}^{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - (Q^2 + a^2\cos^2\theta)}, \tag{7.8.186}$$

r_{TLS}^{+}和 r_{TLS}^{-}分别为黑洞的外类时极限面和内类时极限面. 在稳态情况下,它们即为 Kerr-Newman 黑洞的类时极限面. 下面对其动态过程进行讨论.

(1) 当 $m = m(u)$, $Q = \text{const.}$

$$\frac{\mathrm{d}r_{\text{TLS}}^{\pm}}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}\left[1 \pm \frac{m}{\sqrt{m^2 - (Q^2 + a^2\cos^2\theta)}}\right]. \tag{7.8.187}$$

可见,黑洞蒸发时($\mathrm{d}m/\mathrm{d}u < 0$),黑洞的外类时极限面收缩,内类时极限面膨胀;黑洞吸收时($\mathrm{d}m/\mathrm{d}u > 0$),黑洞的外类时极限面膨胀,内类时极限面收缩.

(2) 当 $Q = Q(u)$, $m = \text{const.}$,

$$\frac{\mathrm{d}r_{\text{TLS}}^{\pm}}{\mathrm{d}u} = \mp \frac{Q}{\sqrt{m^2 - (Q^2 + a^2\cos^2\theta)}}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}. \tag{7.8.188}$$

不难看出,黑洞电荷的减少,将使外类时极限面膨胀,内类时极限面收缩;黑洞电荷的增加,将使外类时极限面收缩,内类时极限面膨胀.

(3) 当 $m = m(u)$, $Q = Q(u)$,

$$\frac{\mathrm{d}r_{\text{TLS}}^{\pm}}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u} \pm \frac{m\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u} - Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}}{\sqrt{m^2 - (Q^2 + a^2\cos^2\theta)}}. \tag{7.8.189}$$

此时黑洞类时极限面位置的变化与质量 m 和电荷 Q 变化速率的比值$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}/\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}$有关. 但是只要它们的比值满足

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}/\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u} < \frac{m - \sqrt{m^2 - (Q^2 + a^2\cos^2\theta)}}{Q}, \tag{7.8.190}$$

则黑洞类时极限面位置变化与仅仅只有质量变化时的情形类似,即黑洞处于吸收状态时,其外类时极限面膨胀,内类时极限面收缩. 黑洞处于蒸发状态时,其外类时极限面收缩,内类时极限面膨胀.

一般情况下,$[m - \sqrt{m^2 - (Q^2 + a^2\cos^2\theta)}]/Q$ 小于 1,故(7.8.190)式可写为

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u} < \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}. \tag{7.8.191}$$

表观视界被定义为出射光子陷获面的外边界,从它出发的两簇类光测地线汇

的膨胀 Θ 为零,即

$$\Theta = n^{\mu}_{;\mu} - k = 0, \tag{7.8.192}$$

其中

$$k = n_{\mu;\nu} l^{\mu} n^{\nu}.$$

引入零标架:

$$\begin{aligned}
l_{\mu} &= \delta^{0}_{\mu} - a\sin^{2}\theta\delta^{3}_{\mu},\\
n_{\mu} &= \rho\bar{\rho}\left[\frac{r^{2}+a^{2}+Q^{2}-2mr}{2}\delta^{0}_{\mu} + \frac{1}{\rho\bar{\rho}}\delta^{1}_{\mu} + \right.\\
&\qquad \left.\frac{2mr-Q^{2}-r^{2}-a^{2}}{2}a\sin^{2}\theta\delta^{3}_{\mu}\right],\\
m_{\mu} &= -\frac{\bar{\rho}}{\sqrt{2}}\left[\mathrm{i}a\sin\theta\delta^{0}_{\mu} - \frac{1}{\rho\bar{\rho}}\delta^{2}_{\mu} - \mathrm{i}(r^{2}+a^{2})\sin\theta\delta^{3}_{\mu}\right],\\
\bar{m}_{\mu} &= -\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left[-\mathrm{i}a\sin\theta\delta^{0}_{\mu} - \frac{1}{\rho\bar{\rho}}\delta^{2}_{\mu} + \mathrm{i}(r^{2}+a^{2})\sin\theta\delta^{3}_{\mu}\right],
\end{aligned} \tag{7.8.193}$$

其逆变分量为

$$\begin{aligned}
l^{\mu} &= \delta^{\mu}_{1},\\
n^{\mu} &= \rho\bar{\rho}\left[(r^{2}+a^{2})\delta^{\mu}_{0} + \frac{2mr-Q^{2}-r^{2}-a^{2}}{2}\delta^{\mu}_{1} + a\delta^{\mu}_{3}\right],\\
m^{\mu} &= -\frac{\bar{\rho}}{\sqrt{2}}\left[\mathrm{i}a\sin\theta\delta^{\mu}_{0} - \delta^{\mu}_{2}\ \frac{\mathrm{i}}{\sin\theta}\delta^{\mu}_{3}\right],\\
\bar{m}^{\mu} &= -\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left[-\mathrm{i}a\sin\theta\delta^{\mu}_{0} + \delta^{\mu}_{2} + \frac{\mathrm{i}}{\sin\theta}\delta^{\mu}_{3}\right].
\end{aligned} \tag{7.8.194}$$

它们显然满足正交关系:

$$\begin{aligned}
&l_{\mu}n^{\mu} = -m_{\mu}\bar{m}^{\mu} = 1,\\
&l_{\mu}m^{\mu} = l_{\mu}\bar{m}^{\mu} = n_{\mu}m^{\mu} = n_{\mu}\bar{m}^{\mu} = 0,\\
&l_{\mu}l^{\mu} = n_{\mu}n^{\mu} = m_{\mu}m^{\mu} = \bar{m}_{\mu}\bar{m}^{\mu} = 0.
\end{aligned}$$

利用(7.8.193)~(7.8.194)式及联络(见附录),经计算得膨胀 Θ 为

$$\Theta = (2mr - Q^{2} - r^{2} - a^{2})r\rho^{2}\bar{\rho}^{2}. \tag{7.8.195}$$

由表观视界的定义 $\Theta = 0$,有

$$2mr - Q^{2} - r^{2} - a^{2} = 0. \tag{7.8.196}$$

由此得到表观视界

$$r^{\pm}_{\mathrm{AH}} = m \pm \sqrt{m^{2} - (a^{2} + Q^{2})}. \tag{7.8.197}$$

在稳态情况下,它就是 Kerr-Newman 黑洞的视界位置,其表观视界与事件视界重合,显然它是一个球面. 在动态情况下,该黑洞表观视界的位置随黑洞的吸收和蒸

发发生变化,其讨论与类时极限面相似. 下面还将看到,动态情况下表观视界与事件视界不再重合,事件视界也不再是一个球面.

事件视界由

$$\dot{r}_{\mathrm{EH}} \approx 0,\ \ddot{r}_{\mathrm{EH}} \approx 0$$

决定,现在考察径向出射类光测地线:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} = n^a\nabla_a &= \rho\bar{\rho}(r^2 + a^2)\frac{\partial}{\partial u} \\ &\quad + \frac{1}{2}(2mr - Q^2 - r^2 - a^2)\rho\bar{\rho}\frac{\partial}{\partial r} + a\rho\bar{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}.\end{aligned}$$

由上式得

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{2}(2mr - Q^2 - r^2 - a^2)\rho\bar{\rho}. \tag{7.8.198}$$

$$\begin{aligned}\ddot{r} = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}u^2} &= \rho\bar{\rho}(r^2 + a^2)\frac{\partial\dot{r}}{\partial u} + \frac{1}{2}(2mr - Q^2 - r^2 - a^2)\rho\bar{\rho}\frac{\partial\dot{r}}{\partial u} \\ &= (r^2 + a^2)(\dot{m}r - Q\dot{Q})\rho^2\bar{\rho}^2 + \dot{r}[(m - r) \\ &\quad - (2mr - Q^2 - r^2 - a^2)r\rho\bar{\rho}]\rho\bar{\rho}.\end{aligned} \tag{7.8.199}$$

由(7.8.198)和(7.8.199)式可知,当$(\dot{m}r - Q\dot{Q}) > 0$时,在外表观视界处

$$\dot{r}_{\mathrm{AH}} = 0,\quad \ddot{r}_{\mathrm{AH}} > 0,$$

因此,光子可以从表观视界处逃逸到远方,这与事件视界的定义不符,所以对于轴对称荷电动态黑洞,其表观视界不再与事件视界重合.

为了求出事件视界的位置,令(7.8.199)式为零,得

$$\dot{r} = \frac{(r^2 + a^2)(\dot{m}r - Q\dot{Q})\rho\bar{\rho}}{(2mr - Q^2 - r^2 - a^2)r\rho\bar{\rho} + (r - m)}. \tag{7.8.200}$$

由于 r_{AH} 与 r_{EH} 接近,故

$$\begin{aligned}\dot{r} &\approx \dot{r}\,|_{r=r^+_{\mathrm{AH}}} \\ &= \frac{[2m(m + \sqrt{m^2 - a^2 - Q^2}) - Q^2][\dot{m}(m + \sqrt{m^2 - a^2 - Q^2}) - Q\dot{Q}]}{\sqrt{m^2 - a^2 - Q^2}[2m(m + \sqrt{m^2 - Q^2 - a^2}) - Q^2 - a^2\sin^2\theta]} \\ &\equiv D.\end{aligned} \tag{7.8.201}$$

将(7.8.201)式代入(7.8.198)式,得到

$$(1 + 2D)r^2 - 2mr + Q^2 + a^2(1 + 2D\cos^2\theta) = 0. \tag{7.8.202}$$

此式即为在动态情况下,轴对称荷电黑洞的事件视界表达式. 解(7.8.202)式,可得

$$r^{\pm}_{\mathrm{EH}} = \frac{m \pm [m^2 - (1 + 2D)(Q^2 + a^2 + 2Da^2\cos^2\theta)]^{1/2}}{1 + 2D}. \tag{7.8.203}$$

r^+_{EH} 和 r^-_{EH} 分别为该黑洞的外事件视界和内事件视界. 它们与 θ 有关,因此黑洞事件

视界不是一个球面.

(1) 当 $\dot{m}=0,\dot{Q}=0$ 时,由(7.8.201)式得 $D=0$.

$$r_{\mathrm{EH}}^{\pm}=m\pm\sqrt{m^2-Q^2-a^2}. \tag{7.8.204}$$

事件视界回到我们熟悉的稳态 Kerr-Newman 黑洞视界的位置,这时表观视界和事件视界重合.

(2) 当 $a=0$ 时,由(7.8.201)式得

$$D=\frac{\dot{m}(m+\sqrt{m^2-Q^2})-Q\dot{Q}}{\sqrt{m^2-Q^2}}. \tag{7.8.205}$$

此时的事件视界位置为

$$r_{\mathrm{EH}}^{\pm}=\frac{m\pm[m^2-(1+2D)Q^2]^{1/2}}{1+2D}, \tag{7.8.206}$$

这就是球对称荷电动态黑洞的事件视界. 显然,在静态情况下($D=0$),它回到 Reissner-Nordström 黑洞的事件视界位置

$$r_{\mathrm{EH}}^{\pm}=m\pm\sqrt{m^2-Q^2}.$$

(3) 当 $\dot{m}<0,\dot{Q}=0$ 时,由(7.8.201)式得

$$D=\frac{[2m(m+\sqrt{m^2-a^2-Q^2})-Q^2](m+\sqrt{m^2-a^2-Q^2})}{\sqrt{m^2-a^2-Q^2}[2m(m+\sqrt{m^2-Q^2-a^2})-Q^2-a^2\sin^2\theta]}\dot{m}<0. \tag{7.8.207}$$

在 $o(L)$ 量级,可将(7.8.203)式表示为

$$r_{\mathrm{EH}}^{\pm}\approx(1-2D)r_{\mathrm{AH}}^{\pm}\mp\frac{Q^2+a^2(1+\cos^2\theta)}{\sqrt{m^2-Q^2-a^2}}D,$$

其中, $r_{\mathrm{AH}}^{\pm}=m\pm\sqrt{m^2-a^2-Q^2}$ 为事件的表观视界,由上式可知,$r_{\mathrm{EH}}^{+}>(1-2D)r_{\mathrm{AH}}^{+}\approx r_{\mathrm{AH}}^{+}$,$r_{\mathrm{EH}}^{-}<(1-2D)r_{\mathrm{AH}}^{-}\approx r_{\mathrm{AH}}^{-}$,即内事件视界收缩,外事件视界膨胀. 因此,黑洞的内外能层都变薄.

(4) 当 $\dot{m}>0,\dot{Q}=0$ 时,由(7.8.207)式得 $D>0$.

同上讨论,由上式可知 $r_{\mathrm{EH}}^{+}<r_{\mathrm{AH}}^{+}$,$r_{\mathrm{EH}}^{-}>r_{\mathrm{AH}}^{-}$, 即内事件视界膨胀,外事件视界收缩. 因此,黑洞的内外能层都变厚.

(5) 若 $\dot{Q}\neq0,\dot{m}=0$,则事件视界的变化正好与(3),(4)的结论相反.

附录:不为零的联络分量为

$$\Gamma_{00}^{0}=-(\dot{m}r-Q\dot{Q})a^2\sin^2\theta\rho^2\bar{\rho}^2-(mr^2-Q^2r)\rho^2\bar{\rho}^2+ma^2\rho^2\bar{\rho}^2$$
$$-(2mr-Q^2)ra^2\sin^2\theta\rho^3\bar{\rho}^3,$$

$$\Gamma^0_{02}=-(2mr-Q^2)a^2\sin\theta\cos\theta\rho^2\bar{\rho}^2,$$

$$\Gamma^0_{03}=(2mr-Q^2r)a^3\sin^4\theta\rho^3\bar{\rho}^3+(2mr-Q^2)ar\sin^2\theta\rho^2\bar{\rho}^2$$
$$-ma^3\sin^4\theta\rho^2\bar{\rho}^2+(\dot{m}r-Q\dot{Q})a^3\sin^4\theta\rho^2\bar{\rho}^2-ma\sin^2\theta\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^0_{12}=a^2\sin\theta\cos\theta\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^0_{13}=ra\sin^2\theta\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^0_{22}=r(r^2+a^2)\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^0_{23}=(2mr-Q^2)a^3\sin^3\theta\cos\theta\rho^2\bar{\rho}^2,$$

$$\Gamma^0_{33}=-(mr^4-Q^2r^3-Q^2ra^2)a^2\sin^4\theta\rho^3\bar{\rho}^3-mr^2a^4\sin^6\theta\rho^3\bar{\rho}^3$$
$$+ma^6\sin^4\theta\cos^2\theta\rho^3\bar{\rho}^3-(\dot{m}r-Q\dot{Q})a^4\sin^6\theta\rho^2\bar{\rho}^2$$
$$+ra^2\sin^4\theta\rho\bar{\rho}+r\sin^2\theta,$$

$$\Gamma^1_{00}=(2mr^2-Q^2r)a^2\sin^2\theta\rho^3\bar{\rho}^3-(2mr-Q^2)^2r\rho^3\bar{\rho}^3+(\dot{m}r$$
$$-Q\dot{Q})\cdot a^2\sin^2\theta\rho^2\bar{\rho}^2+(2mr-Q^2)m\rho^2\bar{\rho}^2+(2mr^2$$
$$-Q^2r)\rho^2\bar{\rho}^2-ma^2\sin^2\theta\rho^2\bar{\rho}^2-(\dot{m}r-Q\dot{Q})\rho\bar{\rho}-m\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^1_{01}=(2mr-Q^2)r\rho^2\bar{\rho}^2-m\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^1_{03}=(2mr-Q^2)^2ra\sin^2\theta\rho^3\bar{\rho}^3-(2mr-Q^2)^2ra^3\sin^4\theta\rho^3\bar{\rho}^3$$
$$-(2mr-Q^2)ma\sin^2\theta\rho^2\bar{\rho}^2-(2mr-Q^2)ra\sin^2\theta\rho^2\bar{\rho}^2$$
$$+ma^3\sin^4\theta\rho^2\bar{\rho}^2-(\dot{m}r-Q\dot{Q})a^3\sin^4\theta\rho^2\bar{\rho}^2+ma\sin^2\theta\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^1_{12}=-a^2\sin\theta\cos\theta\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^1_{13}=-(2mr-Q^2)ra\sin^2\theta\rho^2\bar{\rho}^2+ma\sin^2\theta\rho\bar{\rho}-ra\sin^2\theta\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^1_{22}=(2mr-Q^2)r\rho\bar{\rho}-ra\sin^2\theta\rho\bar{\rho}-r,$$

$$\Gamma^1_{33}=-(2mr-Q^2)^2ra^2\sin^4\theta\rho^3\bar{\rho}^3+(2mr-Q^2)^2ra^4\sin^2\theta\rho^3\bar{\rho}^3$$
$$+(\dot{m}r-Q\dot{Q})a^4\sin^6\theta\rho^2\bar{\rho}^2+(2mr-Q^2)ra^2\sin^4\theta\rho^2\bar{\rho}^2$$
$$+(2mr-Q^2)ma^2\sin^4\theta\rho^2\bar{\rho}^2-ma^4\sin^6\theta\rho^2\bar{\rho}^2+(\dot{m}r$$
$$-Q\dot{Q})a^2\sin^4\theta\rho\bar{\rho}-ma^2\sin^4\theta\rho\bar{\rho}+(2mr-Q^2)r\sin^2\theta\rho\bar{\rho}$$
$$-ra^2\sin^4\theta\rho\bar{\rho}-r\sin^2\theta,$$

$$\Gamma^2_{00}=-(2mr-Q^2)a^2\sin\theta\cos\theta\rho^3\bar{\rho}^3,$$

$$\Gamma^2_{03}=(2mr-Q^2)r^2a\sin\theta\cos\theta\rho^3\bar{\rho}^3+(2mr-Q^2)a^3\sin\theta\cos\theta\rho^3\bar{\rho}^3,$$

$$\Gamma^2_{12}=r\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^2_{13}=-a\sin\theta\cos\theta\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^{2}_{22} = -a^{2}\sin\theta\cos\theta\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^{2}_{33} = -(2mr - Q^{2})a^{4}\sin^{5}\theta\cos\theta\rho^{3}\bar{\rho}^{3} - 2(2mr - Q^{2})a^{2}\sin^{3}\theta\cos\theta\rho^{2}\bar{\rho}^{2}$$
$$- (r^{2} + a^{2})\sin\theta\cos\theta\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^{3}_{00} = -(\dot{m}r - Q\dot{Q})a\rho^{2}\bar{\rho}^{2}$$
$$+ ma\rho^{2}\bar{\rho}^{2} - (2mr - Q^{2})ra\rho^{3}\bar{\rho}^{3},$$

$$\Gamma^{3}_{02} = -(2mr - Q^{2})a\cos\theta\operatorname{cosec}\theta\rho^{2}\bar{\rho}^{2},$$

$$\Gamma^{3}_{03} = (2mr - Q^{2})ra^{2}\sin^{2}\theta\rho^{3}\bar{\rho}^{3} - ma^{2}\sin^{2}\theta\rho^{2}\bar{\rho}^{2} + (\dot{m}r$$
$$- Q\dot{Q})a^{2}\sin^{2}\theta\rho^{2}\bar{\rho}^{2},$$

$$\Gamma^{3}_{12} = a\cos\theta\operatorname{cosec}\theta\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^{3}_{13} = r\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^{3}_{22} = ra\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^{3}_{23} = (2mr - Q^{2})a^{2}\sin\theta\cos\theta\rho^{2}\bar{\rho}^{2} + \cos\theta\operatorname{cosec}\theta,$$

$$\Gamma^{3}_{33} = -(2mr - Q^{2})ra^{3}\sin^{4}\theta\rho^{3}\bar{\rho}^{3} - (\dot{m}r - Q\dot{Q})a^{3}\sin^{4}\theta\rho^{2}\bar{\rho}^{2}$$
$$+ ma^{3}\sin^{4}\theta\rho^{2}\bar{\rho}^{2} + ra\sin^{2}\theta\rho\bar{\rho}.$$

参 考 文 献

梁灿彬,周彬. 2006. 微分几何入门与广义相对论. 第2版. 北京:科学出版社.

刘辽,赵峥. 2004. 广义相对论. 第2版. 北京:高等教育出版社.

罗志坚,朱建阳. 1999. Schwarzschild 背景下 Dirac 场的熵. 物理学报, 48:395.

强稳朝. 1992. 两个 Schwarzschild 黑洞的表面几何. 物理学报, 41:1919.

王永久,唐智明. 1990. 引力理论和引力效应. 长沙: 湖南科学技术出版社.

王永久. 2000. 广义相对论和宇宙学. 长沙: 湖南科学技术出版社.

王永久. 2000. 黑洞物理学. 长沙: 湖南师范大学出版社.

王永久. 2004. 引力论和宇宙论. 长沙: 湖南师范大学出版社.

须重明,吴雪君. 1999. 广义相对论与现代宇宙学. 南京: 南京师范大学出版社.

许殿彦. 1981. Kerr 时空中任意自旋场方程的退耦和分离变量. 物理学报, 30:225.

赵峥. 1999. 黑洞的热性质与时空奇异性. 北京: 北京师范大学出版社.

Andersson N. 1997. Evolving test fields in a black-hole geometry. Phys. Rev., D55: 468.

Andersson N, Howls C J. 2004. The asymptotic quasinormal mode spectrum of non-rotating black holes. Class Quantum Grav., 21: 1623.

Anninos P, Hobill D, Seidel E, et al. 1993. Collision of two black holes. Phys. Rev. Lett., 71: 2851.

Barack L. 1999. Late time dynamics of scalar perturbations outside black holes I a shell toy model. Phys. Rev., D59: 044016.

Barack L, Ori A. 1999. Late-time decay of scalar perturbations outside rotating black holes. Phys. Rev. Lett., 82: 4388.

Barbón J L, Emparan R. 1995. Quantum black hole entropy and Newton constant renormalization. Phys. Rev., D 52: 4527.

Bateman H, Erdelyi A. 1954. Tables of integral transformations. New York: McGraw-Hill Book Company.

Bekenstein J D. 1973. Do we understand black hole entropy? 7th Marcel Grossman meeting on general relativity at Stanford University. Phys. Rev., D7:2333.

Berti E, Cardoso V, Yoshida S. 2004. Highly damped quasinormal modes of Kerr black holes: A complete numerical investigation. Phys. Rev., D69: 124018.

Birrell N D, Davies P C W. 1982. Quantum fields in curved space. Cambridge: Cambridge University Press.

Burko L M, Khanna G. 2003. Radiative falloff in the background of rotating black holes. Phys. Rev., D67: 081502(R).

Burko L M, Khanna G. 2004. Universality of massive scalar field late-time tails in black-hole spacetimes. Phys. Rev., D70: 044018.

Burko L M, Ori A. 1997. Late-time evolution of nonlinear gravitational collapse. Phys. Rev.,

D56：7820.

Caldarelli M M, Cognola G, Klemm D. 1998. Thermodynamics of Kerr-Newman-AdS black holes and conformal field theories. hep-th/9908022.

Caldwell R R. 2002. A Phantom menace? Cosmological consequences of a dark energy component with super-negative equation of state. Phys. Lett., B545：23.

Cardoso V, Lemos J P S. 2003. Quasinormal modes of the near extremal Schwarzschild-de Sitter black hole. Phys. Rev., D67：084020; Cardoso V, Yoshida S, Dias O J C, et al. 2003. Late-time tails of wave propagation in higher dimensional spacetimes. Phys. Rev., D68：061503(R).

Carlip S. 1995. Entropy from conformal field theory at killing horizons// Carlip S. 1995. Logarithmic corrections to black hole entropy from the Cardy formula. Statistical mechanics of the (2+1)-dimensional black hole. Phys. Rev., D51：632; Carlip S. 1997. Statistical mechanics of the threedimensional Euclidean black hole. Phys. Rev., D55：878.

Cheeger J. 1983. Spectral geometry of singular Riemannian spaces. J Differential Geometry, 18：575.

Chen S B, Jing J L. 2005. Asimptotic quasinormal modes of a coupled scalar field in the Garfinkle-Horowitz-Strominger dilation spacetime. Class Quant Grav., 22:533; 陈松柏. 2003. 长沙：湖南师范大学博士论文.

Chiba T, Okabe T, Yamaguchi M. 2000. Kinetically driven quintessence. Phys. Rev., D62：023511.

Ching E S C, Leung P T, Suen W M, et al. 1995. Wave propagation in gravitational systems：Late time behavior. Phys. Rev., D52：2118.

Cho H T. 2003. Dirac quasinormal modes in Schwarzschild black hole spacetimes. Phys. Rev., D68：024003.

Christodoulou D. 1970. Reversible and irreversible transformation in black-hole physics. Phys. Rev. Lett., 25:1596.

Damour T, Ruffini R. 1976. Black-hole evaporation in the Klein-Sauter-Heisenberg-Euler formalism. Phys. Rev., D14：332.

Das S, Ghosh A, Mitra P. 2003. Statistical entropy of Schwarzschild black strings and black holes. hep-th/0005108.

de Alwis S P, Ohta N. 1995. Thermodynamics of quantum fields in black hole backgrounds. Phys. Rev., D52：3529.

Demers J G, Lafrance R, Myers R C. 1995. Black hole entropy without brick walls. Phys. Rev., D52：2245.

Dowker J S. 1994. A note on Polyakov's non-local form of the effective action. Class Quantum Grav., 11：L7.

Dreyer O. 2003. Quasinormal modes, the area spectrum, and black hole entropy. Phys. Rev. Lett., 90：081301.

Ferrari V, Mashoon B. 1984. Oscillations of a black hole. Phys. Rev. Lett.,52：1361.

Ferrari V, Mashoon B. 1984. New approach to the quasinormal modes of a black hole. Phys. Rev.,

D30: 295.

Fodor G, Racz I. 2003. Massive fields tend to form highly oscillating selfsimilarly expanding shells. Phys. Rev., D68: 044022.

Frolov V P. 1992. Two-dimensional black hole physics. Phys. Rev. , D46: 5383.

Frolov V P, Fursaev D V, Zelnikov A I. 1996. Black hole entropy: Off shell versus on shell. Phys. Rev., D54: 2711; Frolov V, Novikov I. 1993. Dynamical origin of the entropy of a black hole. Phys. Rev., D48: 4545; Frolov V P, Fursaev D V. 1998. Thermal fields, entropy and black holes. Class Quantum Grav., 15:2041; Frolov V P, Israel W, Solodukhin S N. 1996. One-loop quantum corrections to the thermodynamics of charged black holes. Phys. Rev., D54: 2732; Frolov V P, Zelnikov A I. 1988. Quantum gravity: Proceedings of the fourth seminar on quantum gravity. Singapore: World Scientific Publishing Company.

Fursaev D. Euclidean and canonical formulations of statistical mechanics in the presence of killing horizons. hep-th/9709213.

Fursaev D V. 1995. Temperature and entropy of a quantum black hole and conformal anomaly. Phys. Rev., D51: 5352.

Gao C J, Shen Y G. 2002. Relation between black holes entropy and quantum field spin. Phys. Rev., D56:084043; 高长军. 2003. 上海: 中国科学院上海天文台博士论文.

Ghosh A, Mitra P. 1994. Entropy in dilatonic black hole background. Phys. Rev. Lett., 73: 2521.

Gibbons G W. 1978. Differential geometrical methods in mathematical Physics Ⅱ. New York: Springer.

Gibbons G W, Hawking S W. 1977. Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation. Phys. Rev., D15: 2738.

Gleiser R J, Nicasio C O, Price R H, et al. 1996. Colliding black holes: how far can the close approximation go? Phys. Rev. Lett., 77: 4483.

Gradshteyn I S, Ryzhik I M. 1994. Table of intergrals, series, and products. New York: A Cademic Press.

Green M B, Schwarz J H, Witten E. 1987. Superstring theory. Cambridge: Cambridge University Press.

Gundlach C, Price R H, Pullin J. 1994. Late-time behavior of stellar collapse and explosions I. Linearized perturbations. Phys. Rev., D49:883; Gundlach C, Price R H, Pullin J. 1994. Late-time behavior of stellar collapse and explosions II. Nonlinear evolution. Phys. Rev., D49: 890.

Gusev Yu, Zelnikov A. 1989. Finite temperature nonlocal effective action for scalar fields. hep-th/9709074.

Hartle J B, Hawking S W. 1976. Path-integral derivation of black-hole radiance. Phys. Rev., D13: 2188.

Hawking S. 1976. Breakdown of predictability in gravitational collapse. Phys. Rev., D14: 2460.

Hawking S W. 1979. General relativity: an einstein centenary survey. Cambridge: Cambridge University Press.

Heusler M. 1996. Black hole uniqueness theorems. Cambridge:Cambridge University press.

Hod S. 1998. Bohr's correspondence principle and the area spectrum of quantum black holes. Phys. Rev. Lett., 81: 4293. Hod S. 2000. Radiative tail of realistic rotating gravitational collapse. Phys. Rev. Lett., 84: 10; Hod S, Piran T. 1998. Late-time evolution of charged gravitational collapse and decay of charged scalar hair Ⅱ. Phys. Rev., D58: 024018; Hod S, Piran T. 1998. Late-time tails in gravitational collapse of a selfinteracting (massive) scalar-field and decay of a self-interacting scalar hair. Phys. Rev., D58: 044018.

Ho J, Kim W T, Park Y J, et al. 2000. Entropy in the Kerr-Newman black hole. gr-qc/9704032.

Iyer S, Will C M. 1987. Black-hole normal modes: A WKB approach. I. Foundations and application of a higher-order WKB analysis of potential-barrier scattering. Phys. Rev., D35: 3621; Iyer S, Will C M. 1987. Black-hole normal modes: A WKB approach. II. Schwarzschild black holes. Phys. Rev., D35: 3632.

Jacobson T. 2003. Black hole entropy and induced gravity. gr-qc/9404039.

Jing J L. 2005. Dirac Quasinormal modes of Schwarzschild black hole. Phys. Rev., D71: 124006; Jing J L. 2004. Late-time behavior of massive Dirac fields in a Schwarzschild background. Phys. Rev., D70:065004; Jing J L. 2004. Dirac quasinormal modes of the Reissner-Norstrom-de Sitter black hole. Phys. Rev., D69:084009; Jing J L. 2001. Quantum entropy of the Kerr black hole arising from the gravitational perturbation. Phys. Rev., D64:064015; Jing J L. 1999. Quantum entropy of a nonextreme stationary axisymmetric black hole due to a minimally coupled quantum scalar field. Phys. Rev., D60: 084015;Jing J L, Pan Q Y. 2005. Dirac quasinormal frequencies of Schwarzschild-anti- de sitter and Reissner-Nordstrom-anti-de sitter black holes Phys. Rev., D72:124011.

Kabat D, Strassler M J. 1994. A comment on entropy and area. Phys. Lett., B329: 46.

Kaul R K, Majumdar P. Logarithmic correction to the Bekenstein-Hawking entropy. gr-qc/0002040.

Kiselev V V. 2003. Quintessence and blackhole. Class Quant. Grav.,22:4651.

Kokkotas K D, Schmidt B G. 1999. Quasi-normal modes of stars and black holes. Living Rev. Relativ, 2:2.

Koyama H, Tomimatsu A. 2001. Asymptotic tails of massive scalar fields in a Schwarzschild background. Phys. Rev., D64: 044014; Koyama H, Tomimatsu A. 2001. Asymptotic power-law tails of massive scalar fields in a Reissner-Nordstrom background. Phys. Rev., D63: 064032; Koyama H, Tomimatsu A. 2002. Slowly decaying tails of massive scalar fields in spherically symmetric spacetimes. Phys. Rev., D65: 084031.

Krivan W. 1999. Late-time dynamics of scalar fields on rotating black hole backgrounds. Phys. Rev., D60: 101501.

Leaver E W. 1985. An analytic representation for quasi-normal modes of Kerr black holes. Proc R Soc London, A402: 285; Leaver E W. 1986. Spectral decompsition of the perturbation response of the Schwarzschild geometry. Phys. Rev., D34:384.

Mäkelä J, et al. 2001. Quantum-mechnical model of the Kerr-Newman black hole. Phys. Rev., D64:

024018; Makela J, Repo P. 1998. Quantum-mechanical model of the Reissner-Nordstrom black hole. Phys. Rev., D57:4899.

Mann R B, Solodukhin S N. 1996. Conical geometry and quantum entropy of a charged Kerr black hole. Phys. Rev., D 54: 3932.

Mann R B, Tarasov L, Zelnikov A. 1992. Brick walls for black holes. Class Quantum Grav., 9: 1487.

Moretti V, Iellici D. ζ-function regularization and one-loop renormalization of field fluctuations in curved space-times. gr-qc/9705077.

Motl L. 2003. An analytical computation of asymptotic Schwarzschild quasinormal frequencies. Adv. Theor. Math. Phys., 6: 1135.

Motl L, Neitzke A. 2003. Asymptotic black hole quasinormal frequencies. Adv. Theor. Math. Phys., 7: 307.

Myers R C. 1994. Black hole entropy in two dimensions. Phys. Rev., D 50: 6412.

Nojiri S, Odintsov S D. 2003. Quantum de sitter cosmology and phantom matter. Phys. Lett., B562: 147; Nojiri S, Odintsov S D. 2003. De sitter brane universeinduced by phantom and quantum effects. Phys. Lett., B565: 1.

Nollert H P. 1993. Quasinormal modes of Schwarzschild black holes: The determination of quasinormal frequencies with very large imaginary parts. Phys. Rev., D47: 5253; Nollert H P. 1999. Quasinormal modes: The characteristic 'sound' of black holes and neutron stars. Class Quantum Grav., 16: R159.

Novikov I D, Frolov V P. 1989. Physics of black holes. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Peebles P J E, Ratra B. 2003. The cosmological constant and dark energy. Rev Mod. Phys., 75: 559.

Polyakov A M. 1981. Quantum geometry of bosonic strings. Phys. Lett., B 103: 207.

Ratra B, Peebles P J E. 1988. Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field. Phys. Rev., D37: 3406.

Schutz B, Will C. 1985. Black hole normal modes - A semianalytic approach. Astrophys J, 291: L33.

Scranton R, et al. 2004. Physical evidence for dark energy. astro-ph/0307335.

Shen Y G. 2000. The femionic entropy of spherically symmetric black holes. Mod. Phys. Lett., A15:1901; 孙祖尧. 2007. 上海: 中国科学院上海天文台博士论文; Gao C J, Shen Y G. 2002. Entropy in Kerr-Newman-Kasuya spacetime. Class Quantum Grav., 19:4933; Gao C J, Shen Y G. 2003. DBB quantization of a torus-like black hole. Class Quant Grav., 20: 119; Shen Y G. 2002. Entropy of Horowitz-Strominger black holes due to arbitrary spin fields. Physics Letters, B537:187.

Shu FW, Shen Y G. 2004. Quasinormal modes of charged black holes in string theory. Physic Review, D70:084046; 舒富文. 2007. 上海: 中国科学院上海天文台博士论文.

Solodukhin S N. 1995. Conical singularity and quantum corrections to the entropy of a black hole. Phys. Rev., D51: 609.

Soloviev V O. 2002. Black hole entropy from Poisson brackets (demystification of some calculations). Hep-th/9905220.

Stephani H. 1982. General relativity. Cambridge: Cambridge University Press.

Sun Z Y, Shen Y G. 2006. Dark energy cosmology. Int. J. Theor. Phys., 45:813.

Suneeta V. 2003. Quasinormal modes for the SdS black hole: an analytical approximation scheme. Phys. Rev., D68: 024020.

Susskind L, Uglum J. 1994. Black hole entropy in canonical quantum gravity and superstring theory. Phys. Rev., D50: 2700.

Tegmark M, et al. 2004. Cosmological parameters from SDSS and WMAP. Phys. Rev., D69: 103501.

't Hooft G. 1985. On the quantum structure of a black hole. Nucl. Phys., B256: 727.

Teukolsky S. 1972. Rotating black holes-separable wave equations for gravitational and electromagnetic perturbations. Phys. Rev. Lett., 29: 1114.

Thome K S, Price R H, Macdonald D A. 1986. Black holes: the membrane paradigm. New Haven CT: Yale University Press.

Vishveshwara C. 1970. Scattering of gravitational radiation by a Schwarzschild black-hole. Nature, 227: 936.

Volovik G E. 2004. Simulation of quantum field theory and gravity in superfluid He-3. cond-mat/9706172.

Wang Y J, Tang Z M. 2002. Energy levels of electron near Kerr black hole. Astrophysics and Space Science, 281:689; Wang Y J, Tang Z M. 2002. Gravitational properties of an accelerating celestial body with a large number of monopoles. Astrophysics and Space Science, 282: 363; Aigen Li, Misset K A, Wang Y J. 2006. On the unusual depletions toward Sk 155. Astrophys. J. Lett., 640: 151; Jing J L, Wang Y J, Zhu J Y. 1994. Generalized first law of thermody-namics for black-holes in spacetimes which Are not asymptotically Flat. Physics Letters, A 187:31; Jing J L, Yu H W, Wang Y J. 1993. Thermodynamics of a black hole with a global monopole. Physics Letters, A 178: 59; Chen J H, Wang Y J. 2003. Chaotic dynamics of a test particle around a grawitational field with a dipole. Class Quantum Grav., 20: 3897; Wang Yong-Jiu, Tang Zhi-Ming. 1986. Field of an accelerating celestial body with a large number of magnetic monopoles. Scientia Sinica, 29:639; Wang Yong-Jiu, Peng Q H. 1985. Gravitational properties of the Neutron star with magnetic charge and magnetic moment. Scientia Sinica, 28:422; Wang Yong-Jiu, Tang Zhi-Ming. 2002. On density perturbations and missing mass. Science in China, 45: 508; Wang Yong-Jiu, Tang Zhi-Ming. 2001. Metric of the gravitational field outside the neutron star. Science in China, 44:801.

Weinberg S. 1989. The cosmological constant problem. Rev. Mod. Phys., 61: 1.

Wu Z C. 1997. Quantum Creation of a Black Hole. Int. J. Modern Phys., D6:199.

Wu Z C. 1999. Pair creation of black holes in anti-de sitter space background. Phys. Lett., B445:274.

Yang I-Ching, Yeh Ching-Tzung, Hsu Rue-Ron, et al. 2005. On the energy of a charged dilaton black hole. gr-qc/9609038.

Yu H W. 2002. Decay of massive scalar hair in the background of a black hole with a global monopole. Phys. Rev., D65:087502; Yu H W, Zhou W T. 2007. Relationship between Hawking radiation from black holes and spontaneous excitation of atoms. Phys. Rev., D76:027503; Yu H W, Zhou W T. 2007. Do static atoms outside a Schwarzschild black hole spontaneously excite? Phys. Rev., D76:044023.

Zaslavskii O B. 1996. Role of a boundary in the relationship between black hole temperature and the trace anomaly. Phys. Rev., D53: 4691.

Zerilli F J. 1974. Perturbation analysis for gravitational and electromagnetic radiation in a Reissner-Nordstrom geometry. Phys. Rev., D9: 860.

Zhidenko A. 2004. Quasi-normal modes of Schwarzschild-de sitter black holes. Class Quantum Grav., 21: 273.

Zurek W H, Thorne K S. 1985. Statistical mechanical origin of the entropy of a rotating, charged black hole. Phys. Rev. Lett., 54: 2171.

《现代物理基础丛书》已出版书目

(按出版时间排序)

1. 现代声学理论基础	马大猷 著	2004.03
2. 物理学家用微分几何 (第二版)	侯伯元, 侯伯宇 著	2004.08
3. 数学物理方程及其近似方法	程建春 编著	2004.08
4. 计算物理学	马文淦 编著	2005.05
5. 相互作用的规范理论 (第二版)	戴元本 著	2005.07
6. 理论力学	张建树 等 编著	2005.08
7. 微分几何入门与广义相对论 (第二版)	梁灿彬, 周彬 著	2006.01
8. 物理学中的群论 (第二版)	马中骐 著	2006.02
9. 辐射和光场的量子统计	曹昌祺 著	2006.03
10. 实验物理中的概率和统计 (第二版)	朱永生 著	2006.04
11. 声学理论与工程应用	朱海潮 等 编著	2006.05
12. 高等原子分子物理学 (第二版)	徐克尊 著	2006.08
13. 大气声学 (第二版)	杨训仁, 陈宇 著	2007.06
14. 输运理论 (第二版)	黄祖洽 著	2008.01
15. 量子统计力学（第二版）	张先蔚 编著	2008.02
16. 凝聚态物理的格林函数理论	王怀玉 著	2008.05
17. 激光光散射谱学	张明生 著	2008.05
18. 量子非阿贝尔规范场论	曹昌祺 著	2008.07
19. 狭义相对论（第二版）	刘 辽 等 编著	2008.07
20. 经典黑洞和量子黑洞	王永久 著	**2008.07**